高等院校教材同步辅导及考研复习用书

燎原教育

吕成军 彭 辉 主编

高等数学习题详解

（同济·六版 上下册合订）

张天德 主审

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

全国百佳图书出版单位

时代出版传媒股份有限公司
安徽人民出版社

高等数学习题详解

（同济·六版 上下册合订）

主　编　吕成军　彭　辉
副主编　李亿民　秦玉芳　刘　燕
主　审　张天德

全国百佳图书出版单位
ARTIME 时代出版
时代出版传媒股份有限公司
安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题详解 ：同济6版 / 吕成军主编. —
合肥 ：安徽人民出版社，2013.6
ISBN 978-7-212-06609-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吕… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—
题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第123630号

高等数学习题详解(同济6版)

吕成军 主编

出 版 人:胡正义　　责任编辑:杜宇民　吴 筠
封面设计:燎原视觉设计中心
出版发行:时代出版传媒股份有限公司 http://www.press-mart.com
安徽人民出版社 http://www.ahpeople.com
合肥市政务文化新区翡翠路1118号出版传媒广场八楼
邮　编:230071
营销部电话:0551—63533258　0551—63533292(传真)
印　刷:淄博恒业印务有限公司
(如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂商联系调换)

开本:880×1230　1/32　印张:18　字数:530千
版次:2013年6月第1版　2013年6月第1次印刷

标准书号:ISBN　978-7-212-06609-3　定价:26.80元

前 言

高等数学是理工类专业重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为帮助、指导广大读者学好高等数学，我们编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》（第六版）配套的《高等数学习题详解》，以帮助读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，最终提高应试能力和数学思维水平。

本书共分十二章，章节的划分与同济六版教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识进行简要的概括，然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构四大部分

一、教材习题详解：对六版教材里各节全部习题作了详细解答。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“归纳总结”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。另外本书还用“警示语”的形式对解题要点、技巧和易错的地方做了简短警示。

二、本节考点清单：用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式在各类考试中常考命题点进行了系统的梳理，并针对考点对本节课后练习题进行分类整理。

三、本章总习题详解：对教材中各章节章末全部习题作详细解答，重点题也给出了“思路探索”和“归纳总结”，以便进一步提高读者的分析能力和归纳能力。

四、本章知识总结：对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好的复习与总结。

前言

全书内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容融入到习题讲解中，抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的考点，然后针对每一个考点，深入分析课后练习题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，课后习题讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目录

教材习题详解

目录

教材习题详解

目录

目 录

教材习题详解

第一章　函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学讨论的主要对象，它以极限理论为基础. 在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数的性质，所以应该用运动变化的观点来掌握函数. 极限与函数的连续性理论是高等数学的基础，如何用已知的、可求的来逼近未知的、要求的，用有限来逼近无限，在无限变化的过程中考查变量的变化趋势，从有限过渡到无限，这是本章需掌握的基本思想.

本章知识图解

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念与分类 —— 分段函数、隐函数、初等函数、反函数、复合函数
    - 函数的性质 —— 有界性、单调性、奇偶性、周期性
  - 极限
    - 极限的定义 —— 极限概念及“ε-N”、“ε-δ”表述
    - 极限的性质
      - 数列极限的唯一性、有界性、保号性，收敛数列与其子数列间的关系
      - 函数极限的唯一性、局部有界性、局部保号性，函数极限与数列极限的关系
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、幂指函数运算
      - 夹逼准则、单调有界准则
      - 洛必达法则、泰勒公式
      - 两个重要极限、等价无穷小因子替换
    - 无穷小
      - 无穷小与无穷大的定义及之间的关系
      - 无穷小的性质及运算、无穷小与极限的关系
      - 无穷小阶的比较与确定
  - 连续
    - 连续的定义 —— 初等函数、反函数与复合函数的连续性的判定
    - 连续函数的性质 —— 闭区间上连续函数的有界性与最大值最小值定理、零点定理与介值定理、一致连续性
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点：左右极限皆存在（包括：可去间断点和跳跃间断点）
      - 第二类间断点：左、右极限至少有一个不存在

第一节 映射与函数

教材习题详解

教材习题 1-1 详解(教材 $P_{21} \sim P_{23}$)

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出 $A\cup B$,$A\cap B$,$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

【思路探索】 此题考查集合的运算. 利用数轴求解.

解:$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,

$A\cap B=[-10,-5)$,

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,

$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

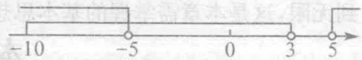

图 1-1

归纳总结:求多个部分的交集时,若借助数轴表示,可以简单而快速地得到结果.

2. 设 A、B 是任意两个集合,证明对偶律:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明:$(\Rightarrow)$ $\forall a\in(A\cap B)^C$,则 $a\notin A\cap B$,$\therefore a\notin A$ 或 $a\notin B$,

即 $a\in A^C$ 或 $a\in B^C$, $\therefore a\in A^C\cup B^C$,

由 a 的任意性知:$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$. ①

$(\Leftarrow)$ $\forall a\in A^C\cup B^C$,则 $a\in A^C$ 或 $a\in B^C$,即 $a\notin A$ 或 $a\notin B$,

$\therefore a\notin A\cap B$,即 $a\in(A\cap B)^C$,

由 a 的任意性,知 $(A\cap B)^C\supset A^C\cup B^C$, ②

由 ①、② 得:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f:X\to Y$,$A\subset X$,$B\subset X$. 证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明:(1) $(\Rightarrow)$ $\because A\subset X,B\subset X$, $\therefore A\cup B\subset X$,$\therefore f(A\cup B)$ 有意义.

$\forall y\in f(A\cup B)$,$\exists x\in A\cup B$,使得 $f(x)=y$,

$\therefore x\in A$ 或 $x\in B$,有 $f(x)\in f(A)$ 或 $f(x)\in f(B)$,

$\therefore f(x)\in f(A)\cup f(B)$,即 $y\in f(A)\cup f(B)$,

由 y 的任意性,知:$f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$. ①

$(\Leftarrow)$ 设 $\forall y\in f(A)\cup f(B)$,则 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$,

$\therefore \exists x\in A$ 或 $x\in B$,使得 $f(x)=y$,

即 $\exists x\in A\cup B$,使 $f(x)=y$, $\therefore y=f(x)\in f(A\cup B)$,

由 y 的任意性,知 $f(A\cup B)\supset f(A)\cup f(B)$, ②

由 ①、②,得 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) $\because A\subset X, B\subset X$， $\therefore A\cap B\subset X$， $\therefore f(A\cap B)$ 有意义.

$\forall y\in f(A\cap B)$，$\exists x\in A\cap B$，使得 $f(x)=y$，

$\because x\in A$ 且 $x\in B$，$\therefore f(x)\in f(A)$ 且 $f(x)\in f(B)$，

$\therefore f(x)\in f(A)\cap f(B)$，即 $y\in f(A)\cap f(B)$，

由 y 的任意性，知 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$； (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$； (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$； (6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$； (8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$； (10) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

【思路探索】 此题考查函数定义域的确定. 函数的定义域就是其自变量的取值范围. 解析式函数的自然定义域就是实数范围内使函数有意义的所有点的集合.

函数的自变量 x 必须满足能够运算的条件. 常见的条件有：

① 分式的分母不能为零.

② 对数的真数要大于零.

③ 开偶次方根时，根式下的式子要非负.

④ 正切函数 $\tan x$ 需满足 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k$ 为整数），余切函数 $\cot x$ 需满足 $x\neq k\pi$（k 为整数）.

⑤ 反正弦 $\arcsin x$ 和反余弦 $\arccos x$ 均需满足 $|x|\leqslant 1$.

解：(1) 由 $3x+2\geqslant 0$，得定义域为：$\{x\,|\,x\geqslant -\dfrac{2}{3}\}$.

(2) 由 $1-x^2\neq 0$，得定义域为：$\{x\,|\,x\neq\pm 1\}$.

(3) 由 $x\neq 0, 1-x^2\geqslant 0$，得定义域为：$\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0\}$.

(4) 由 $4-x^2>0$，得定义域为：$\{x\,|\,-2<x<2\}$.

(5) 由 $x\geqslant 0$，得定义域为：$\{x\,|\,x\geqslant 0\}$.

(6) 由 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，得定义域为：$\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1, k\in\mathbf{Z}\}$.

(7) 由 $|x-3|\leqslant 1$，得定义域为：$\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 4\}$.

(8) 由 $3-x\geqslant 0, x\neq 0$，得定义域为：$\{x\,|\,x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0\}$.

(9) 由 $x+1>0$，得定义域为：$\{x\,|\,x>-1\}$.

(10) 定义域显然为：$\{x\,|\,x\neq 0\}$.

归纳总结:求函数定义域的解题步骤:

① 首先,给定的函数通常是由基本初等函数(或简单函数)复合而成,列出使每个基本初等函数(或简单函数)有定义所需满足的关系式(等式或不等式),得到使函数有意义的联立不等式组;

② 其次,求解所得的联立不等式组;

③ 最后,用区间或集合的形式表示所得到的结果,即为所求的定义域.

5. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【思路探索】 此题考查函数定义的要点.函数定义有两个要素:定义域和对应法则.当两个函数定义域相同、对应法则一致时,这两个函数表示同一个函数.

解:(1) 不同. $f(x)$ 定义域为 $x\neq 0$,而 $g(x)$ 定义域为 $x>0$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同.

(2) 不同. 对应法则不同.当 $x<0$ 时,$f(x)=x$ 而 $g(x)=-x$.

(3) 相同. $f(x)=\sqrt[3]{x^3(x-1)}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$.

(4) 不同. $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$ 定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$.

6. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

【思路探索】 此题考查函数值的计算.函数值的计算常有两类问题:一是知道函数的表达式,求某些函数值;二是给出一些运算的结果,去确定函数的具体表达式.

解:$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$,

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-2)=0$.

函数 $y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-2 所示:

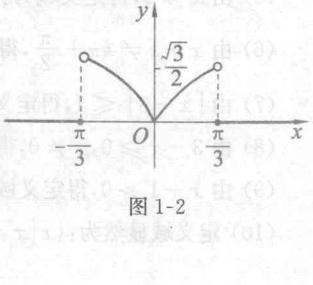

图 1-2

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$; (2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

【思路探索】 此题考查函数的单调性的判断. 判断函数的单调性步骤如下:

(1) 记 I 为自变量的变化范围,任取两点 $x_1,x_2\in I$,不妨设 $x_1<x_2$;

(2) 研究是否恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)成立,一般通过考察 $f(x_1)-f(x_2)$ 是否不变号来研究;

(3) 根据定义,确定函数是否具备单调性.

证明:证法一:

(1) $y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$,

$\because \dfrac{1}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 上单调递增,$\therefore$ y 在$(-\infty,1)$ 上也单调递增.

(2) $y=f(x)=x+\ln x$,

$\because$ x 在$(0,+\infty)$ 单调递增,$\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 上单调递增,

而两单调递增函数的和函数也是单调递增的,

$\therefore$ y 在$(0,+\infty)$ 上单调递增.

证法二:

(1) $y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$.

设 $x_1<x_2<1$,则 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$,

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$,即 $f(x)$ 在$(-\infty,1)$ 内单调递增.

(2) $\because x\in(0,+\infty)$,设 $0<x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$,

即 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内单调递增.

归纳总结:判断函数的单调性,一般用定义法:设区间上 $x_1<x_2$,作差 $f(x_1)-f(x_2)$,通过因式分解判定其符号,从而判定函数的单调性,如证法二. 有时也将较复杂函数分解成简单函数,通过简单函数的单调性,判定原函数的单调性,如证法一.

8. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

【思路探索】 此题考查函数奇偶性的应用及单调性的定义. 由任意 $x_1,x_2\in(-l,0)$,$x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$,且 $-x_1>-x_2$,再利用 $f(x)$ 在$(0,l)$ 的单调性及

$f(x)$ 的奇偶性得 $f(x_1) < f(x_2)$.

证明:设 $\forall x_1, x_2 \in (-l, 0)$,不妨假设 $x_1 < x_2$,则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$,且 $-x_1 > -x_2$.

$\because$ $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加,

$\therefore$ $f(-x_1) > f(-x_2)$,

又由 $f(x)$ 为奇函数,则 $-f(x_1) > -f(x_2)$,即 $f(x_1) < f(x_2)$.

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【思路探索】 此题考查函数奇偶性的定义. 对任意的 x,写出 $f(-x)$ 的表达式,并考察它与 $f(x)$ 的关系. 根据两者关系,确定奇偶性. 有三种可能性:如果 $f(-x) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数;若前两式都不满足,则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

证明:(1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 都是偶函数,$g_1(x), g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$,则

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) + (-g_2(x)) \\ &= -(g_1(x) + g_2(x)) = -G(x), \end{aligned}$$

$\therefore$ $F(x)$ 为偶函数,$G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 都是偶函数,$g_1(x), g_2(x)$ 都是奇函数.

令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, $G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, $H(x) = f_1(x) \cdot g_1(x)$,则

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x),$$

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)] \\ &= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x), \end{aligned}$$

$$H(-x) = f_1(-x) \cdot g_1(-x) = f_1(x) \cdot [-g_1(x)] = -f_1(x) \cdot g_1(x) = -H(x),$$

$\therefore$ $F(x)$ 为偶函数,$G(x)$ 为偶函数. $H(x)$ 为奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2)$; (2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; (4) $y = x(x - 1)(x + 1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$; (6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

【思路探索】 此题考查函数奇偶性的判断,可用定义来判.

解:(1) $\because f(-x) = (-x)^2[1 - (-x)^2] = x^2(1 - x^2) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数.

(2) $\because f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，$\therefore f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，$\therefore f(x)$ 非奇非偶.

(3) $\because f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数.

(4) $\because f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)$，$\therefore f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $\because f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，$\therefore f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，故 $f(x)$ 非奇非偶.

(6) $\because f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数.

归纳总结：

① 奇函数 ± 奇函数 = 奇函数，偶函数 ± 偶函数 = 偶函数.

② 奇函数 × 奇函数 = 偶函数，奇函数 ÷ 奇函数 = 偶函数.

③ 偶函数 × 偶函数 = 偶函数，偶函数 ÷ 偶函数 = 偶函数.

④ 奇函数 × 偶函数 = 奇函数，奇函数 ÷ 偶函数 = 奇函数.

11. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin\pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

【思路探索】 此题考查函数的周期性.

解：(1) $y=\cos(x-2)$ 为周期函数，周期 $T=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$ 为周期函数，周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin\pi x$ 为周期函数，周期 $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 为周期函数，周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

归纳总结：有关周期函数的几个结论：

① 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x)$，$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

③ 若 $f(x)$，$g(x)$ 分别是以 T_1，T_2 $(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1，T_2 的最小公倍数为周期的函数.

12. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；　　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【思路探索】　此题考查反函数的求法.求给定函数的反函数，一般先将 x 反解出来，将 x 用 y 的表达式表达；然后将 x，y 对调，即用 x 表示自变量，用 y 表示因变量.如此对调是为了合乎习惯.

解：(1) 因 $y=\sqrt[3]{x+1}$，所以 $x=y^3-1$，则反函数为 $y=x^3-1$；

(2) 因 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，所以 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，则 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) 因 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，所以 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$，则所求的反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$；

(4) 因 $y=2\sin 3x$，所以 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，则 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$；

(5) 因 $y=1+\ln(x+2)$，故 $x=\dfrac{e^y}{e}-2$，所以所求反函数为 $y=e^{x-1}-2$；

(6) 因 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以所求反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

归纳总结：

① 单调函数一定存在反函数，且反函数也单调.

② 反函数与直接函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

③ 常见的反函数有：指数函数与对数函数；三角函数与反三角函数；双曲函数与反双曲函数.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【思路探索】　此题考查函数的有界性.利用定义证明函数有界的方法：

(1) 首先，对函数取绝对值(或者直接利用上述“有界的等价表述”，直接转入下面的第二步)；

(2) 其次，进行适当的不等式放大；

(3) 最后，找出定义中所说的常数 M.

证明：$\Rightarrow$ 若函数 $f(x)$ 在 X 上有界，即 $\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对 $\forall x\in X$ 都成立，

$\therefore -M\leqslant f(x)\leqslant M$，

$\therefore$ 对 $\forall x\in X$，$f(x)\leqslant M$，$f(x)\geqslant -M$，即 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.