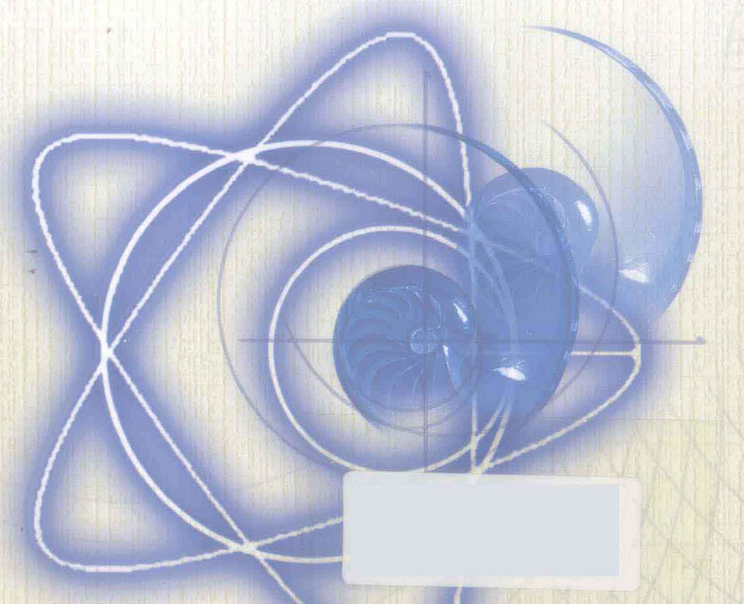
"十二五"规划教材

21世纪应用型本科系列教材

高等数学（第2版）

（应用理工类）（下册）

寿纪麟　于大光　张世梅



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

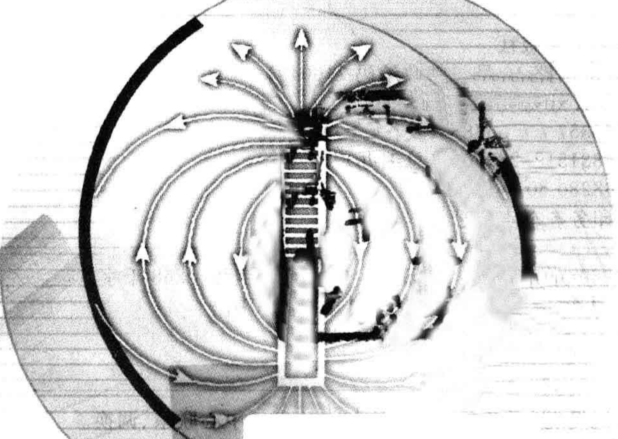
"十二五"规划教材
21世纪应用型本科系列教材

高等数学（第2版）

（应用理工类）

（下册）

寿纪麟 于大光 张世梅



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:应用理工类.下册/寿纪麟,于大光,张世梅编著.
—2版.—西安:西安交通大学出版社,2013.1
ISBN 978-7-5605-4971-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①寿…②于…③张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 005671 号

书　　名	高等数学(应用理工类) 下册 (第2版)
编　　著	寿纪麟 于大光 张世梅
责任编辑	刘雅洁

出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路10号 邮政编码710049)
网　　址	http://www.xjtupress.com
电　　话	(029)82668357 82667874(发行中心) (029)82668315 82669096(总编办)
传　　真	(029)82668280
印　　刷	西安建科印务有限责任公司

开　　本	727mm×960mm [redacted] **印张** 1[redacted] **字数** 268千字
版次印次	2013年1月第1[redacted]印刷
书　　号	ISBN 978-7-560[redacted]
定　　价	24.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248 (029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

目 录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

本章先介绍向量的概念及其运算，然后重点介绍空间解析几何，主要是平面和空间直线及其方程；一些常用的空间曲面和曲线及其方程. 正如平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用.

7.1　向量及其运算

在研究物理及其他应用科学时，除了像体积、重量、路程等只需用数的大小来表示的量以外，还会经常会遇到一些像位移、速度、加速度、力等物理量，它们既有大小又有方向. 这些既有大小又有方向的量称为“向量”.

7.1.1　向量的概念

向量是既有大小，又有方向的量. 在数学上用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向. 通常用黑体的英文字母或上面带箭头的字母来表示向量. 例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{F}$、$\overrightarrow{OM}$ 等. 在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关. 在数学上只研究与起点无关的向量，称这种向量为**自由向量**(简称向量)，即只考虑向量的大小和方向. 在一些实际问题中，当要表示与起点有关的向量时，只需作特别处理即可.

向量的大小称为向量的**模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{OM}|$. 模为1的向量叫**单位向量**；模为零的向量叫**零向量**. 规定零向量的方向是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相同，则称这两个向量**相等**(即经过平移后能完全重合的向量)，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**，记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小相等但方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

7.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$(见图 7－1).

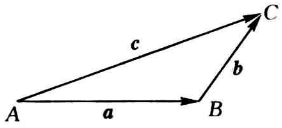


图 7－1

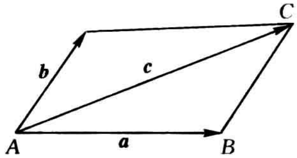


图 7－2

注　上述求两个向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则，它与力学中求合力的平行四边形法则相一致(见图 7－2).

向量的加法符合下列运算规律：

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

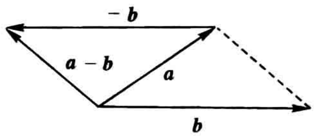


图 7－3

2. 向量的减法

定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，其中 $-\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 7－3).

3. 数与向量的乘法

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的**数乘**是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(见图 7－4). 当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量与数的乘法符合下列运算规律：

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

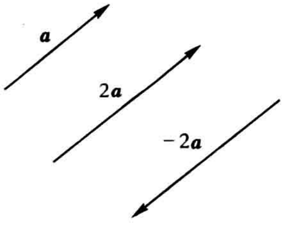


图 7－4

向量的加法、减法及数乘运算统称为**向量的线性运算**.

例 7.1　已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示平行四边形四边所对应的向量(见图 7－5).

解　由三角形法则，得

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

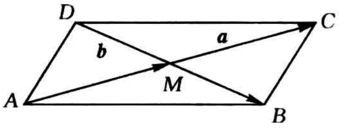


图 7 - 5

7.1.3　空间直角坐标系

众所周知，图形与数的沟通是通过坐标系来实现的. 在平面解析几何中，通过平面直角坐标系建立了平面几何图形的方程. 下面用类似的方法通过引进空间直角坐标系来研究空间几何图形及其方程. 先来建立空间直角坐标系.

在空间取定一点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴、y 轴、z 轴，统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴设置在水平面上，而 z 轴垂直于水平面，并规定它们的正向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，则大拇指的指向就是 z 轴的正向(见图 7 - 6). 这样的三条坐标轴就构成一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$ 坐标系，O 称为**坐标原点**.

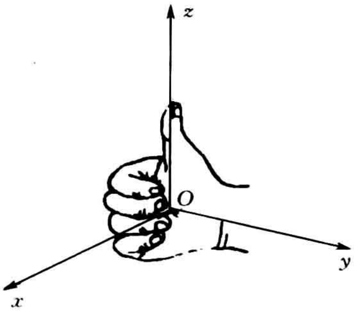


图 7 - 6

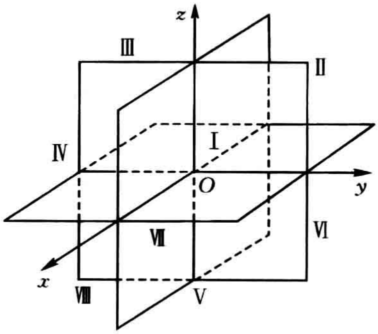


图 7 - 7

在空间直角坐标系中，x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 坐标面，y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 坐标面，z 轴和 x 轴所确定的平面称为 zOx 坐标面，统称为**坐标平面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 由 x 轴、y 轴、z 轴正向组成的三个坐标面所围成的区域称为第一卦限，在 xOy 坐标面上方，按逆时针方向确定第二、第三、第四卦限. 在 xOy 坐标面下方，第一卦限下面是第五卦限，按逆时针方向确定第六、第七、第八卦限，分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(见图 7 - 7).

1. 空间点的坐标表示 在空间直角坐标系中，从空间的点M分别向Ox、Oy、Oz三个坐标轴作垂线，它们的垂足在对应的坐标轴上的坐标组成一个有序数组(x,y,z)，这样空间中的点M就与这个有序数组(x,y,z)一一对应，并将x、y、z分别称为**M点的x、y、z坐标**，通常表示为$M(x,y,z)$(见图7-8).

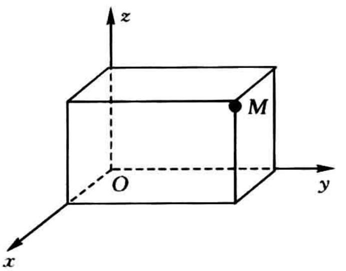


图 7-8

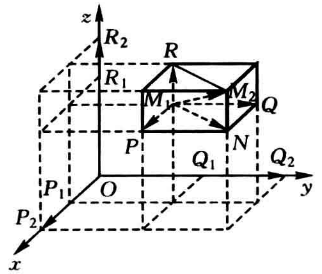


图 7-9

2. 两点间的距离 若$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点，则由直角三角形勾股定理知M_1M_2的距离(见图7-9)为

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|M_1R|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2$$

而 $|M_1P|=|x_2-x_1|$，$|PN|=|y_2-y_1|$，$|NM_2|=|z_2-z_1|$，所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特殊地:若两点分别为$M(x,y,z)$,$O(0,0,0)$，则

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 7.2 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证 由两点间距离公式计算

$$|M_1M_2|=\sqrt{(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{14}$$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$$

$$|M_3M_1|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$$

由于$|M_2M_3|=|M_3M_1|$，故结论成立.

7.1.4 向量的坐标

1. 向量的分向量与向量的坐标表示

通过坐标系，使平面上或空间的点与有序数组之间建立了一一对应关系，同样地，还需要建立向量与有序数组之间的对应关系.

设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$是以$M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$

分别表示 x、y、z 轴正向的单位向量，称它们为这一坐标系的**基本单位向量**，由图 7－9，应用向量的加法规则知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其中，$a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴方向的**分向量**．上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位**向量的分解式**．而 a_x、a_y、a_z 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的 x、y、z **坐标**，记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，并把它称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**．于是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量可以表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

特别地，以原点 O 为起点，$M(x,y,z)$ 为终点的向量表示为 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$．

2. 向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

则向量模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

向量线性运算的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},\quad \lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}$，即向量的对应坐标成比例

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}\quad(a_xa_ya_z\neq 0)$$

3. 向量的模与方向余弦

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$（见图 7－10），由两点间的距离公式得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

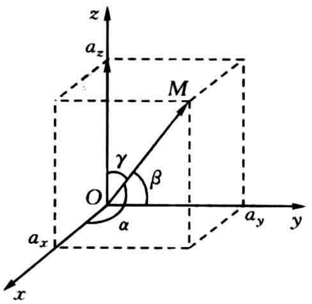


图 7－10

用向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角 α,β,γ（均大于等于 0，小于等于 π）来表示它的方向，称 α、β、γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，其余弦表示形式 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**．把与三个方向余弦成比例的三个数称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向数**．

当 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$ 时，向量方向余弦的坐标表示式为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

显然对任意非零向量,其方向余弦有关系

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_y, a_y, a_z\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

例 7.3　已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$、$M_2(1,3,0)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角以及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

解　$\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$,则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角分别为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\quad \cos\beta = \frac{1}{2},\quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3},\quad \beta = \frac{\pi}{3},\quad \gamma = \frac{3\pi}{4}$$

设 $\boldsymbol{a}^0$ 为与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量,因此

$$\boldsymbol{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

7.1.5　向量的数量积

1. 数量积的定义

设物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,用 $\boldsymbol{r}$ 表示位移向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$,力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{r}$ 方向上分力的大小为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角(见图 7-11).

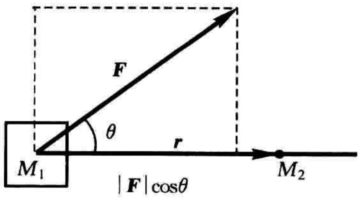


图 7-11

在其他力学和物理的应用中,也有类似的数学运算,抛开这些问题的物理背景,可以抽象出两个向量的数量积定义.

定义 7.1　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个向量,它们之间的夹角为 θ,称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$

的**数量积**(或**点积**)，并记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

其中 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 向量的模在 $\boldsymbol{b}$ 向量方向上的**投影**. 上式表明两向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量的模在该向量方向上的投影的乘积.

据此定义，所求的功 W 实际上是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{r}$ 的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$.

2. 数量积的性质

由数量积的定义可以推得常用的性质：

(1) 基本单位向量的数量积：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

事实上，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角 $\theta=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 时，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **正交**，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(3) 两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 正交即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

可以证明，数量积的运算满足下列规律：

(1) **结合律**　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为实数

(2) **交换律**　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(3) **分配律**　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

3. 数量积的坐标表示式

设两个向量　$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，　$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_xb_x)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+(a_yb_x)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+(a_zb_x)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})\\&\quad+(a_xb_y)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+(a_yb_y)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+(a_zb_y)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})\\&\quad+(a_xb_z)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+(a_yb_z)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+(a_zb_z)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

即数量积的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

利用向量数量积的坐标表示式，易得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，得两向量间夹角余弦的坐标表示式

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

例 7.4　已知三点 $M_1(1,1,1)$、$M_2(2,2,1)$ 和 $M_3(2,1,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 之间的夹角 θ.

解　由于

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{2-1, 2-1, 1-1\} = \{1,1,0\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{2-1, 1-1, 2-1\} = \{1,0,1\}$$

而

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},\ |\overrightarrow{M_1M_3}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

故 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

例 7.5　设不可压缩液体流过平面 π 上面积为 A 的一个区域(见图 7-12)，液体在该区域上各点处的流速均为常向量 $\boldsymbol{v}$，设 $\boldsymbol{n}^0$ 为垂直于 π 的单位向量，计算单位时间内经过该区域流向 $\boldsymbol{n}^0$ 所指向一侧的液体流量(指质量)P (设液体的密度为 $\mu = 1$).

解　单位时间内流过区域的液体形成一个底面积为 A，斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体，且斜高与底面垂线的夹角即为向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}^0$ 之间的夹角 θ. 所以，该斜柱体的高为 $|\boldsymbol{v}| \cdot \cos\theta$，即 $|\boldsymbol{v}|$ 在 $\boldsymbol{n}^0$ 方向上的投影. 斜柱体的体积为

$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta = A|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}^0|\cos\theta = A\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^0$

从而，单位时间内经过区域流向所指一侧的液体重量为

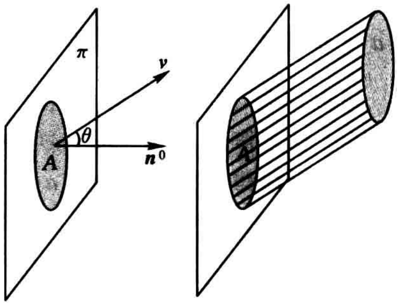


图 7-12

$$P = \mu A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^0$$

显然，若 $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{n}^0$，即 $\boldsymbol{v}$ 垂直于平面 π 时，$P = \mu A|\boldsymbol{v}|$.

7.1.6　向量的向量积

1. 向量积的定义

设 O 为一根杠杆的支点，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上的点 P 处，$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ(见图 7-13)，由力学知识可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$，它的模为

$$|\boldsymbol{M}| = |\overrightarrow{OQ}||\boldsymbol{F}| = |\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

而方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，其指向依右手规则来决定，即当右手的四个

手指从$\overrightarrow{OP}$以不超过 π 的角度转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指的指向就是力矩 $\boldsymbol{M}$ 的指向.

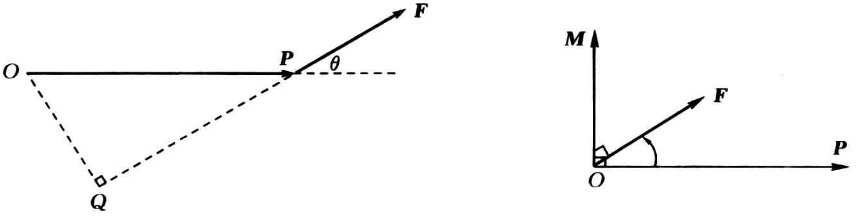


图 7 - 13

由这类物理问题所反映出的数学运算，抽象出两个向量间的向量积的概念.

定义 7.2　设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 依下列方式决定：

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角；

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向(转角小于 π) $\boldsymbol{b}$ 来决定. 那么称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(或**叉积**)，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 也常读作“$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$”.

因此，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于$\overrightarrow{OP}$与力 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

2. 向量积的性质

由向量积的定义，直接可得下列的性质：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) 对于基本单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，有下述关系式：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

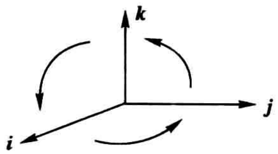


图 7 - 14

基本单位向量的向量积符合右手轮换法则(见图 7 - 14)；

(3) 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$)的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(4) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 在几何上表示以 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 为邻边的平行四边形的面积 A(见图 7 - 15)，即

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\\&=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\sin\theta)=A\end{aligned}$$

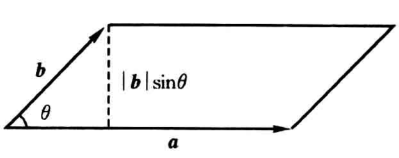


图 7 - 15

向量积的运算符合下列规律：

(1) **数乘结合律**　设 λ、μ 为实数，则

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

(2) **反交换律**　$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

按右手系规则，从 $\boldsymbol{b}$ 转到 $\boldsymbol{a}$ 所决定的方向恰好与从 $\boldsymbol{a}$ 转到 $\boldsymbol{b}$ 所决定的方向相反(见图 7-16)，故向量积运算不满足交换律.

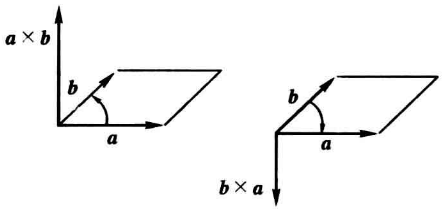


图 7-16

(3) **分配律**

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$$

3. 向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=[(a_xb_y)\boldsymbol{k}-(a_xb_z)\boldsymbol{j}]+[(-a_yb_x)\boldsymbol{k}+(a_yb_z)\boldsymbol{i}]+[(a_zb_x)\boldsymbol{j}-(z_zb_y)\boldsymbol{i}]\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

为了便于记忆，我们引入形式化的三阶行列式的记法：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

例 7.6　已知 $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求此三角形的面积 $S_\triangle$.

解　由于 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

而
$$\overrightarrow{AB}=\{3-1,4-2,5-3\}=\{2,2,2\}$$
$$\overrightarrow{AC}=\{2-1,4-2,7-3\}=\{1,2,4\}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\2&4\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=(2\times4-2\times2)\boldsymbol{i}-(2\times4-2\times1)\boldsymbol{j}+(2\times2-2\times1)\boldsymbol{k}\\&=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以
$$S_\triangle=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

习题 7-1

1. 写出 $P(1,-2,-1)$ 的下列对称点的坐标：

(1) 关于三个坐标平面分别对称；

(2) 关于三个坐标轴分别对称；