人民教育出版社高中教材

配套辅导用书

数学

总复习

人民教育出版社高中教材配套辅导用书编委会 编

吉林大学出版社

人民教育出版社高中教材配套辅导用书

数学

总复习

主　编　蔡上鹤

副主编　王国珍　刘见闻

编　者　于永泉　王海鹰

史　亮

吉林大学出版社

人民教育出版社高中教材配套辅导用书

顾　问　唐敖庆　刘中树

编　委　会

主　编　徐利治

编　委　张同恂　董蔚君　庄文中

蔡上鹤　胡美玲　崔　粲

魏超群

人民教育出版社高中教材配套辅导用书

数　学

总复习

主　编　蔡上鹤

副主编　王国珍　刘见闻

编　者　于永泉　王海鹰　史　亮

责任编辑、责任校对：赵洪波　　封面设计：张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

（长春市东中华路37号）　　梅河口市美术印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/16　　1997年4月第1版

印张：13.5　　1997年4月第1次印刷

字数：342千字　　印数：1－10 000册

ISBN 7-5601-2018-0/G・226　　全套共六册总定价：91.50元

本　册　定　价：15.80元

人民教育出版社签约授权　版权归吉林大学出版社所有　侵权必究

前　言

得到人民教育出版社的首肯，吉林大学出版社为人民教育出版社出版的现行高中教材配了一套辅导用书（简称《配套用书》）。这是一件国内首创，有助于培育21世纪人才的好事。对此我很感兴趣，愿意为它做一点工作。我曾经为长春、大连、武汉、南京等地的中学教师和大学青年学生们做过几次有关教学思想与学习方法的报告，国内有的出版社也正在准备出版我的有关这方面内容的论文集。现今吉林大学出版社邀我主编《配套用书》，我想应该乘此机会，将我从教50年来的一些教学方法和经验心得，融会到这套用书中去，供立志成材的青年们参考。

《配套用书》编写指导思想十分明确，在编写中尽量参考了正在试行的实验教材的改革思路和部分内容，也汲取了一些中学复习资料的精华。所以，这套用书源于教材又丰富于教材。

《配套用书》是由教学经验丰富、谙熟教材并对教法有专门研究的重点中学特级教师和高级教师执笔，而且还特邀了人民教育出版社的各个学科的专家参与编写并负责主审。此书从结构到内容均有所创新、有所突破，有自己的特点。

特点之一，它与课本同步到章节，因此它与课堂场景相互照应，能帮助学生全面地消化理解课本内容。

特点之二，内容安排上主次分明，详略得当，便于学生自学，能起到课文导读的作用。

特点之三，知识重点突出在课程的各环节中，对其中的要点、难点和易错、易混的内容与问题分别给予分析说明、剖析解疑并精选例题加以深化，能巩固和扩大学生的基础知识和基本技能，为学生顺利达标服务。

特点之四，注重启发性和培育兴趣原则，讲究"题眼"布局，有助于形成正确的解题思路，掌握解题技巧，有助于学习能力和学习兴趣的培养，故有利于改善学生素质，提高高考应试能力。

一套好书宛如一座知识宝库，蕴藏着青年学生们所要追索的思想方法和知识，又像一把金钥匙，能够启迪思维，开发智力。我相信全国的高中学生和自学成材的青年朋友们，一定会欢迎《配套用书》的问世，我衷心祝愿大家能利用它来激发自己的智慧火花，获得成功的喜悦！

徐利治

1997年3月20日于长春

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、基础知识与基本技能

1. 集合是近代数学的基础，在中学阶段，只要求学生对集合的概念能有初步的认识，能掌握集合的一些简单的计算（交、并、补等），能用集合符号表达一些简单的数学问题.

2. 函数的映射定义：若 A，B 是非空的数集，则称映射 $f:A\to B$ 是以 A 为定义域的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in A$$

设函数的值域为 C，则 $C\subseteq B$.

(1)函数的映射定义概括了函数的变量定义，强调了对应关系，可使学生对函数的理解更深入. 如函数 $f(x)=b$ $(b\in\mathrm{R})$，对这个常数函数，学生理解起来就不困难了.

(2)映射有三要素（两个集合、一个法则），函数也有三要素（定义域、值域、对应关系），由这三要素引出函数的三个基本问题，即求定义域、值域，求函数关系式.

(3)初学者对函数符号 $f(x)$ 的理解往往有一定的困难，从映射的三要素去观察理解，可加深对它的理解.

3. 函数的奇、偶性

(1)定义：函数 $y=f(x)$，$x\in A$，对于任意 $x\in A$，$-x\in A$ 且均有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数；对于任意 $x\in A$，$-x\in A$ 且均有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数.

由以上定义可知，判断一个函数是否具有奇偶性，须检查两点：一是定义域 A 是否满足 $x\in A$，$-x\in A$；另一个是看关系，若 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则为奇函数，若 $f(-x)=f(x)$ 成立，则为偶函数.

(2)奇函数的图象关于坐标原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

函数表达式与函数图象之间的关系是由函数图象的定义联系在一起的. 函数的图象定义是：函数 $y=f(x)$，曲线 C，满足：①若点 $P(a,b)$ 在曲线 C 上，则有 $b=f(a)$；②若 $P'(m,n)$ 满足 $n=f(m)$，则点 P' 在曲线 C 上. 这时称曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，$y=f(x)$ 是曲线 C 的函数表达式.

4. 函数的单调性

(1)定义：函数 $y=f(x)$，$x\in A$.

对于任意 $x_1,x_2\in A$，$x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 A 上是增函数. A 叫做增区间；

对于任意 $x_1,x_2\in A$，$x_1<x_2$，均有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 A 上是减函数. A 叫做减区间.

(2)函数的单调性是函数的基本问题，这类问题主要有两个方面：一是利用定义证明函数的单调性，二是利用已知函数的单调性判断另一些函数在某区间上的单调性问题.

5. 函数的周期性

(1)定义：函数 $y=f(x)$，$x\in A$，如果存在一个不为零的常数 T，满足对任意 $x\in A$，$x+T$

$\in A$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 是 $f(x)$ 的一个周期.

由定义可知，若 T 是 $y=f(x)$ 的周期，则 $\pm T,\pm 2T,\pm 3T,\cdots,\pm nT$ 都是它的周期. 在这些周期中若存在一个最小的正数，则称这最小的正数为该函数的最小正周期. 以后所说的函数的周期，一般是指这个最小正周期.

(2)定理：函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 T 的充要条件是函数 $f(ax+b)$ $(a>0)$ 的最小正周期为 $\frac{T}{a}$.

证明：(必要性)先证 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax+b)$ 的周期.

$\because T$ 是 $f(x)$ 的周期，

$\therefore f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+b+T)=f(ax+b)$.

$\therefore \frac{T}{a}$ 是 $f(ax+b)$ 的周期.

再证其最小性(反证法).

若 $\frac{T}{a}$ 不是 $f(ax+b)$ 的最小正周期，则存在 $0<l<\frac{T}{a}$，满足 $f(ax+b)=f(a(x+l)+b)$.

令 $F(x)=f(ax+b)$，则有

$$f(x)=F\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right).$$

$\because l$ 是 $F(x)$ 的周期，与上同样有 $\frac{l}{\frac{1}{a}}=al$ 是 $f(x)$ 的周期.

$\because 0<l<\frac{T}{a}$，$0<al<T$，这与 T 是 $f(x)$ 的最小正周期矛盾.

$\therefore \frac{T}{a}$ 是 $f(ax+b)$ 的最小正周期.

(充分性)只需利用 $f(x)=F\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)$，证明的步骤与上面完全相同.

(3)周期函数的图象特征，可由以下定理给出：如果函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 对称，那么 $f(x)$ 是周期函数.

证明：设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，$P(m,n)$，$P'(m',n')$ 是 C 上两点，且关于直线 $x=a$ 对称，则 $n=f(m)$，$n'=f(m')$，且 $f(m)=f(m')(n=n')$.

又 $m+m'=2a$，$m'=2a-m$，

$\therefore n=f(m)=f(m')=f(2a-m)$. 因而 $f(x)=f(2a-x)$.

同样有 $f(x)=f(2b-x)$.

应用上述两式可得

$$f(x)=f(2a-x)=f(2b-(2a-x))=f(2b-2a+x).$$

$\therefore f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的周期函数.

注意：$2b-2a$ 不一定是最小正周期.

6. 反函数

(1)定义：函数 $y=f(x)$，定义域为 A，值域为 C，从式子 $y=f(x)$ 中解出 x，得式子 $x=\phi(y)$，如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过式子 $x=\phi(y)$，x 在 A 中都有唯一确定的值和它

对应，那么式子 $x=\psi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数，这样的函数 $x=\psi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，即

$$x=\psi(y)=f^{-1}(y).$$

习惯上把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in C$.

函数 $y=f(x)$ 的定义域是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；函数 $y=f(x)$ 的值域是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

(2)互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

(3)如果函数是单调函数，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也是单调的，并且 $y=f^{-1}(x)$ 的增减性与 $y=f(x)$ 的增减性相同.

7. 一次函数

(1)定义：形如 $y=ax+b(a\neq 0)$ 的函数叫做一次函数，当 $b=0$ 时，叫做正比例函数.

(2)一次函数的图象是一条直线，但须注意以直线为图象的函数不一定是一次函数.

(3)基本性质：

①定义域为实数集 R，值域也是 R；

② $a>0$ 时为增函数，$a<0$ 时为减函数.

8. 二次函数

(1)定义：形如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函数叫做二次函数.

(2)二次函数的图象是一条抛物线，但要注意抛物线的解析表达式不一定是二次函数.

由 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，知抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$；当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下.

(3)基本性质：掌握了二次函数的图象，对比图象不难记住二次函数的性质.

①定义域为 R(实数集).

②值域：$a>0$，$y\in\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$；$a<0$，$y\in\left[-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

③单调区间：

$a>0$，函数在区间 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上为减函数，在区间 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上为增函数.

$a<0$，函数在区间 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上为增函数，在区间 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上为减函数.

④最大值和最小值：

$a>0$，仅在 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；

$a<0$，仅在 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

9. 反比例函数

(1)定义：形如 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的函数叫做反比例函数，其图象为等轴双曲线.

(2)基本性质：

①定义域是 $\{x\mid x\in\mathrm{R}$ 且 $x\neq 0\}$，值域为 $\{y\mid y\in\mathrm{R}$ 且 $y\neq 0\}$.

②单调性：$k>0$ 时，在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上都是减函数；$k<0$ 时，在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上都是增函数.

反比例函数在解决一些简单的分段函数时，可发现有它独特的应用，也可以与解析几何的

等轴双曲线相联系.

10. 幂函数

(1)定义:形如 $y=x^{\alpha}$(α 是 Q 中的常数)的函数叫做幂函数.

(2)基本性质:

当 $\alpha>0$ 时:

①图象过(0,0),(1,1)两点,即无论 α 为何正数,$x\geqslant0$ 时函数总有意义;

②当 $x\geqslant0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 为增函数.

当 $\alpha=0$ 时,$y=x^{0}=1(x\neq0)$是一个常数函数.

当 $\alpha<0$ 时:

①图象过(1,1)点,$x\neq0$;

②$y=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$上为减函数;

③在第一象限内的图象向上无限靠近 y 轴,向右无限靠近 x 轴.

11. 指数函数

(1)定义:形如 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$的函数叫做指数函数.

(2)图象与性质:图象分 $0<a<1$,$a>1$ 两种情况,如图 1-1,图 1-2 所示.

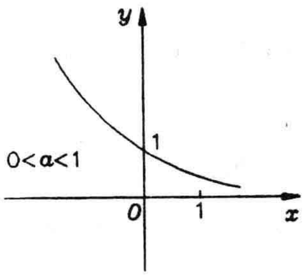


图 1-1

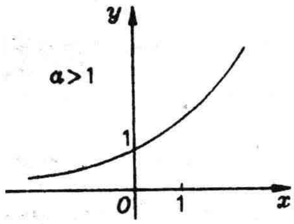


图 1-2

观察图象,可得以下性质:

①定义域为 R(实数集),值域为$\{y|y\in R,y>0\}$.

②单调性:当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 是定义域内的增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 是定义域内的减函数.

③图象过(0,1)点,由此得:

如果 $a>1$,$x>0$ 时 $y>1$,$x<0$ 时 $0<y<1$;

如果 $0<a<1$,$x>0$ 时 $0<y<1$,$x<0$ 时 $y>1$.

12. 对数函数

(1)定义:形如 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$的函数叫做对数函数.对数函数是指数函数的反函数.

(2)图象与性质:分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况,如图 1-3,图 1-4 所示.

观察图象,可得以下性质:

①定义域为$(0,+\infty)$,值域为 R.

②单调性:当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是定义域内的增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是定义域内的减函数.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

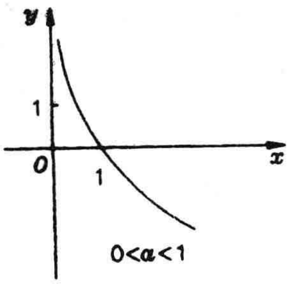


图 1-3

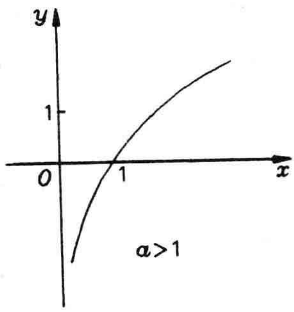


图 1-4

③图象过(1,0)点，由此得：

如果 $0<a<1$，$0<x<1$ 时 $y>0$，$x>1$ 时 $y<0$；

如果 $a>1$，$0<x<1$ 时 $y<0$，$x>1$ 时 $y>0$.

以上列举了中学阶段学过的代数函数的定义、图象与性质，这些函数构成中学代数的重心，应很好掌握，学会它们的应用.

二、例题精析

例 1 已知集合 $A=\{x|x^2-ax\leqslant x-a\}$，集合 $B=\{x|1\leqslant\log_2(x+1)\leqslant 2\}$，$A\subseteq B$，求 a 的值形成的集合.

解 由 $1\leqslant\log_2(x+1)\leqslant 2$，知 $2\leqslant x+1\leqslant 4$，故 $B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$.

又 $x^2-ax\leqslant x-a$，得 $x^2-(a+1)x+a\leqslant 0$. 故 $(x-1)(x-a)\leqslant 0$.

要写出这个不等式的解集，要区别 1 和 a 的大小，或由问题能分析出 1 与 a 的大小.

由 $A\subseteq B$，知 $1\leqslant a$，故 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant a\}$. 比较两集合得出 $1\leqslant a\leqslant 3$.

$\therefore a$ 形成的集合是 $\{a|1\leqslant a\leqslant 3\}$.

例 2 设全集 $I=\{x|x$ 为小于 20 的正奇数$\}$，A，B 是全集 I 的两个子集，若 $A\cap\overline{B}=\{3,7,15\}$，$\overline{A}\cap B=\{13,17,19\}$，且 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，求 $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

分析 这个问题比较复杂，可利用图形对问题进行分析.

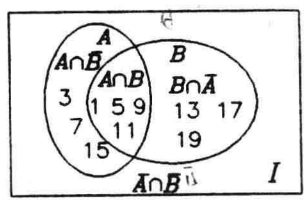


图 1-5

解 $I=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$.

$\because\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，则有 $A\cup B=I$，由图形(图 1-5)得

$$A\cap B=\{1,5,9,11\}.$$

由 $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$，知 $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\{1,5,9,11\}$.

例 3 已知集合 $X=\left\{x\left|x=\cos\dfrac{5k\pi}{4},k\in\mathrm{Z}\right.\right\}$，$Y=\left\{y\left|y=\cos\dfrac{n\pi}{4},n\in\mathrm{Z}\right.\right\}$，求证 $X=Y$.

分析 由两集合相等的定义知，须证明 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$.

证法 1 对于任意 $x\in\mathrm{Z}$，存在 $k\in\mathrm{Z}$，$x=\cos\dfrac{5k\pi}{4}$. 令 $n=5k$，则有 $x=\cos\dfrac{n\pi}{4}$. 又 $k\in\mathrm{Z}$，$n=5k\in\mathrm{Z}$. 故 $x\in Y$，即 $X\subseteq Y$.

又对于任意 $y\in Y$，有 $y=\cos\dfrac{n\pi}{4}=\cos\left(6n\pi+\dfrac{n\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{25n\pi}{4}$. 令 $k=5n$，则 $k\in\mathrm{Z}$，$y=$

$\cos\frac{5k\pi}{4}$. 故 $y\in X$, 即 $Y\subseteq X$.

$\therefore X=Y$.

证法 2　由函数的周期性,可得

$$X=\left\{-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right\},Y=\left\{-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right\}$$

是两个有限集合,显然有 $X=Y$.

说明　证明两集合相等是集合问题中的主要问题,是集合化简的基本依据. 在中学阶段证集合相等的方法可以灵活,大都用观察法. 如果观察有困难,可采用集合相等的定义证之.

例 4　集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,集合 $B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$ 同时成立,求 a 的值.

分析　在解答与集合有关的问题时,首先要把集合的元素搞清楚,然后再考查集合与集合之间的关系.

解　由 $\log_2(x^2-5x+8)=1$,知 $x^2-5x+8=2$,$x^2-5x+6=0$. 得 $x_1=2$ 或 $x_2=3$,故 $B=\{2,3\}$.

与上同样,有 $C=\{-4,2\}$.

$\because A\cap B\neq\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$,

$\therefore 3\in A$,即 $x=3$ 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根.

将 $x=3$ 代入方程,得 $a^2-3a-10=0$,$a=-2$ 或 $a=5$.

当 $a=5$ 时,$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$,这时 $A\cap C\neq\varnothing$,矛盾,不满足条件.

$\therefore a=-2$.

说明　有了集合的概念之后,很多数学问题能用集合符号表示出来(集合语言),通常弄清集合所表达的实际意义,就有利于解决问题.

例 5　集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{6,7,8\}$.

(1)以 A 为定义域从 A 到 B 的函数有多少个?

(2)以 A 为定义域,B 为值域的函数有多少个?

(3)以 A 为定义域,B 为值域且满足条件

$$f(1)\leqslant f(2)\leqslant f(3)\leqslant f(4)\leqslant f(5)$$

的函数有多少个?

分析　若映射 $f:A\to B$ 满足 A,B 是两个非空的数集,则映射 $f:A\to B$ 就是以 A 为定义域的函数. 映射有三要素,函数也有三要素(定义域、值域与函数关系),本题就是以 A 为定义域能确定多少个对应关系.

解　(1)由于 A 与 B 都是数集,从 A 到 B 的映射的个数就是函数的个数,故有 $3^5=243$(个).

(2)$\because B$ 为值域,B 中的每个元素都是 A 中某元素的象,

$\therefore$分两类,即把 A 中的元素分为三份,只能有 $3-1-1$ 或 $1-2-2$ 两种分法.

故有 $C_5^3C_2^1P_2^2+C_5^1C_4^2C_2^2=60+90=150$(个).

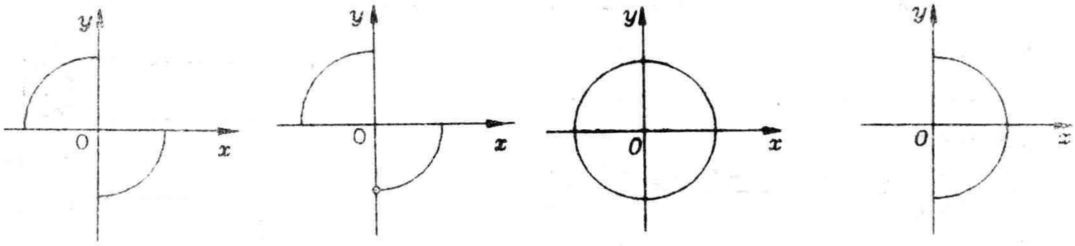
(3)此题的意义是不改变原有元素的顺序,把 1,2,3,4,5 分成三份. 用插空的方法,即

$$1\vee2\vee3\vee4\vee5,$$

有四个空插两个.

故有 $C_4^2=6$(个).

例 6　在图 1-6 中,可成为函数图象的是(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

图 1-6

分析　根据函数的定义可知,对于自变量的每个值,只有一个函数值与之对应,即与 x 轴垂直的直线和函数的图象只能有一个交点,满足这个要求的,只能是(B),其他都不满足这个要求.值得指出的是函数的图象与方程的曲线不一样,是两个不同概念,例如圆、椭圆等可以是方程的曲线,但它们不是某一函数的图象.

解　根据函数的定义,对于 x 的每一个值,只有一个 y 的值与它对应.故只有(B)是正确的.

例 7　已知 $f(2x+1)$的定义域是$(1,2]$,求函数 $f(x+1)$的定义域.

分析　函数的定义域是自变量的取值范围,而函数 $f(2x+1)$与 $f(x+1)$都是以 x 为自变量.

解　由$(1,2]$是 $f(2x+1)$的定义域,知 $1<x\leqslant 2$,$2<2x\leqslant 4$,$3<2x+1\leqslant 5$,故 $f(x)$的定义域是$(3,5]$.

又因 $3<x+1\leqslant 5$,$2<x\leqslant 4$,故 $f(x+1)$的定义域是$(2,4]$.

例 8　求以下函数的值域:

(1)$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$;　　(2)$y=x+\sqrt{1-2x}$;　　(3)$y=x+\sqrt{1-x^2}$.

分析　求函数的值域就是当自变量取遍整个定义域时,求函数值的取值范围.

解　(1)$y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

由 $-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 1$,知 $0\leqslant 1-\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 2$,故值域为$[0,2]$.

(2)$y=x+\sqrt{1-2x}=-\dfrac{1}{2}(1-2x)+\sqrt{1-2x}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1-2x}-1\right)^2+1\leqslant 1$.

$\therefore$ 值域为$(-\infty,1]$.

(3)设 $x=\cos\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,则

$$y=x+\sqrt{1-x^2}=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

由 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi+\dfrac{\pi}{4}$,知 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,故 $-1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$,即函数的值域是$[-1,\sqrt{2}]$.

说明　求函数的值域的方法很多,这里介绍了常用的三种,即利用不等式、函数的基本性质和三角代换等.

例题 9 一块矩形铁皮长为 a，宽为 b，从它的四个角剪去一个边长为 x 的小正方形(图1-7)，把剩下的铁皮做成一个无盖水箱.

若 $a=b$，则 x 是多少时，水箱容积最大？最大值是多少？

分析 求函数的最大值与最小值，是与求函数值相关的一类问题.

解 $V=x(a-2x)^2=\frac{1}{4}\cdot 4x(a-2x)\cdot(a-2x)$.

$\because 4x+(a-2x)+(a-2x)=2a$(常数)，且 $4x$ 与 $a-2x$ 均为正数，

$\therefore V\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}\right]^3=\frac{2a^3}{27}$.

上述式子中仅当 $4x=a-2x$，$x=\frac{a}{6}$ 时，等号成立.

$\therefore x=\frac{a}{6}$ 时，V 的最大值为 $\frac{2a^3}{27}$.

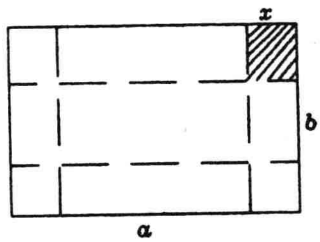


图 1-7

说明 不等式与函数的最大值、最小值是两个不同的概念.不等式是指数的范围，而函数的最大值与最小值是函数本身的一个值，因此只有验证等号成立，说明函数能取到这个值才能说是函数的最大值(或最小值)，所以找出等号成立的 x 值是必不可少的.

例题 10 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，$f(x)>0$ 且 $f(3)=1$，求函数 $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}(x>0)$ 的单调区间，并指出在每个单调区间上 $F(x)$ 的单调性.

分析 这是函数单调性的一般问题，首先应把 $f(x)$ 的单调性搞清楚，而后再考虑 $F(x)$ 的单调性问题.

解 由题设条件可得：$0<x<3$ 时，$0<f(x)<1$；$x>3$ 时，$f(x)>1$.

设 $0<x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}F(x_2)-F(x_1)&=f(x_2)+\frac{1}{f(x_2)}-f(x_1)-\frac{1}{f(x_1)}\\&=f(x_2)-f(x_1)+\frac{1}{f(x_2)}-\frac{1}{f(x_1)}\\&=[f(x_2)-f(x_1)]\cdot\left[1-\frac{1}{f(x_2)f(x_1)}\right]\end{aligned}$$

又 $f(x)$ 是增函数，故 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

又 $f(3)=1$ 及 $f(x)$ 为增函数，故当 $0<x<3$ 时，$0<f(x)<1$，$1-\frac{1}{f(x_1)f(x_2)}<0$，当 $x>3$ 时，$f(x)>1$，$1-\frac{1}{f(x_2)f(x_1)}>0$.

$\therefore(0,3)$ 是 $F(x)$ 的减区间，$(3,+\infty)$ 是 $F(x)$ 的增区间.

例 11 证明：定义在对称区间 $(-a,a)$ 上的任何函数，均可表示为奇函数 $G(x)$ 与偶函数 $H(x)$ 之和的形式，并且这种表示方法是唯一的.

分析 设定义在 $(-a,a)$ 上的函数为 $f(x)$，这就是本题的已知条件.本题的核心就是利用这个已知条件把 $G(x)$，$H(x)$ 表示出来，并且证明这种表示方法是唯一的.

证明：设 $f(x)$ 是定义在 $(-a,a)$ 上的一个函数，有 $f(x)=G(x)+H(x)$，则

$$f(-x)=G(-x)+H(-x)=-G(x)+H(x).$$

$\therefore H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

容易证明：$H(x)$确为偶函数，$G(x)$确为奇函数.

以下证明其唯一性. 假定还有偶函数$H'(x)$与奇函数$G'(x)$满足

$$f(x)=G'(x)+H'(x),$$

则
$$G(x)+H(x)=G'(x)+H'(x), \qquad ①$$

$\therefore G(-x)+H(-x)=G'(-x)+H'(-x).$

$\therefore$
$$-G(x)+H(x)=-G'(x)+H'(x). \qquad ②$$

①+② ，得 $H(x)=H'(x)$；①－② ，得 $G(x)=G'(x)$.

例 12 设函数$f(x)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上以 2 为周期的函数，对$k\in Z$，用I_k表示区间$(2k-1,2k+1]$，已知$x\in I_0$时，$f(x)=x^2$.

(1)求$f(x)$在I_k上的解析表达式；

(2)对于自然数k，求集合$M_k=\{a\mid$使方程$f(x)=ax$在I_k上有两上不相等的实根$\}$.

解 (1)由$f(x)$是以 2 为周期的周期函数，知$k\in Z$，$2k$也是$f(x)$的周期，又当$x\in I_k$时，$(x-2k)\in I_0$，

$\therefore f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$，即对任意$k\in Z$，有

$$f(x)=(x-2k)^2.$$

(2)当$k\in N$，$x\in I_k$时，作出$y=(x-2k)^2$与$y=ax$的图象(图 1-8)，要使方程$(x-2k)^2=ax$有两个不同实根，则两函数图象有两个不同交点，就是直线$y=ax$与抛物线$y=(x-2k)^2$的交点C在点A，B之间，当直线过$A(2k,0)$时$a=0$，过$B(2k+1,1)$时$a=\dfrac{1}{2k+1}$，故有$0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$.

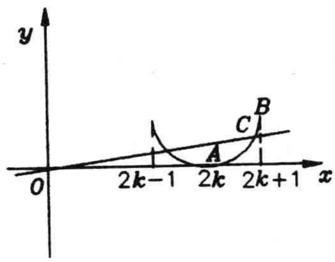


图 1-8

$\therefore M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1},k\in Z\right\}$.

说明 若函数具有周期性，则这个函数的性质可集中在一个周期之内，然后利用函数的周期性可把这些性质移到其他的区间.

例 13 设函数$f(x)=ax+\dfrac{9}{a}(1-x)(a>0)$在$0\leqslant x\leqslant 1$上的最小值记为$g(a)$，求$g(a)$的表达式.

$ax+\frac{9}{a}-\frac{9}{a}x$

解 $f(x)=ax+\dfrac{9}{a}(1-x)=\left(a-\dfrac{9}{a}\right)x+\dfrac{9}{a}$.

当$a-\dfrac{9}{a}=0$，$a=3$时，有$f(x)=3$，是常数函数，最小值为 3，即$g(3)=3$；

当$a-\dfrac{9}{a}>0$，$a>3$时，$f(x)$为增函数，$g(a)=f(0)=\dfrac{9}{a}$；

当$a-\dfrac{9}{a}<0$，$0<a<3$时，$f(x)$为减函数，$g(a)=f(1)=a$.

综上所述，得

$$g(a)=\begin{cases}a, & 0<a\leqslant 3,\\ \dfrac{9}{a}, & a>3.\end{cases}$$

说明 一个连续函数在一个闭区间上一定有最大值与最小值，本题是利用一次函数的单调性，在闭区间的端点取得最小值.

例 14 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的二实数根，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值和最小值.

解 由方程有实数根，知判别式 $\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)=-3k^2-16k-16\geqslant 0$，故 $-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$.

令 $f(k)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)$
$=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$.

由 $f(k)$ 在区间 $-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$ 上是减函数，知 $k=-4$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 的最大值为 $f(-4)=18$，$k=-\frac{4}{3}$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 的最小值为 $f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{50}{9}$.

例 15 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连结两点 $M(0,1)$，$N(2,3)$ 的线段（包括 M,N 两点）有两个不同的交点，求实数 a 的取值范围.

分析 一条抛物线与一线段相交是一个不易掌握的问题，利用方程可将问题化简.

解 过 M,N 的直线为 $y=x+1$，联立之，得

$$x^2+ax+2=x+1\text{，即 }x^2+(a-1)x+1=0.$$

这样把问题化为，上面方程在 $[0,2]$ 上有两不同实数根. 为此设

$$f(x)=x^2+(a-1)x+1.$$

问题化为，抛物线 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上与 x 轴有两不同交点，则有

$$\begin{cases}0<-\dfrac{a-1}{2}<2,\\ \Delta=(a-1)^2-4>0,\\ f(0)=1\geqslant 0,\\ f(2)=2a+3\geqslant 0.\end{cases}$$

解之，得 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$.

说明 本题列出的不等式组完全是由描述抛物线的位置得出的.

例 16 讨论方程 $|x^2-1|+x+k=0$ 的根的个数.

分析 这个方程含有绝对值符号，又须对字母 k 进行讨论，可以想象问题比较复杂，若化为曲线的交点，则问题直观，清楚.

解 由方程 $|x^2-1|+x+k=0$ 得

$$|x^2-1|=-x-k.$$

令 $y_1=|x^2-1|$，$y_2=-x-k$，则两方程根的个数化为函数 y_1,y_2 的图象交点个数（图 1-9）.

作 y_1 的图象 C，C 与 x 轴的交点为 $A(-1,0)$，$B(1,0)$. 作 y_2 的图象直线 l，l 与 x 轴的交点为 $M(-k,0)$，将直线 l 由左向右平移，研究 l 与 C 的交点个数.

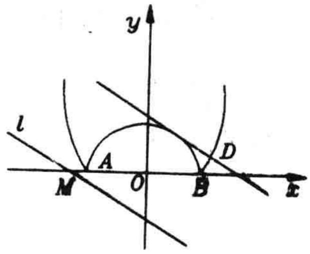


图 1-9

(1) M 点在 A 点左边，$-k<-1$，即 $k>1$，l 与 C 无交点，原方程无解.

(2) M 与 A 重合，$k=1$，l 与 C 只有一个公共点，原方程只有一个根.

(3) M 在 A,B 之间，即 $-1<-k<1$，$-1<k<1$，l 与 C

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com