



教育部师范教育司组织专家审定
高等院校小学教育专业教材



问题解决与数学实践

□ 邵舒竹 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

1544546

教育部师范教育司组织专家审定
高等院校小学教育专业教材



问题解决与数学实践

- Wenti Jiejue yu Shuxue Shijian

郜舒竹 编著

G623.503
06



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书专为小学教育专业编写,主旨在于通过问题解决和数学实践,加强职前小学教师对于数学问题解决和数学实践的理解,提高数学解题和数学实践能力。全书共分12章,基于理论与实践相结合的编写原则,前6章主要介绍与数学问题解决相关的内容,主要包括数学教育的发展历史、问题解决的产生背景以及关于“问题”和“问题解决”的相关内容;后6章偏重于数学实践的内容,分别从理论和实践的角度阐释了数学实践的研究思路,本书的主要特点在于注重“问题提出→问题解决→问题探究”的全过程,尽可能向读者展示问题的产生背景以及通过问题解决所能够进一步探究的内容。为便于学习,每一章的开始部分均有“本章导读”。

本书适于作职前小学教师培养的教材,也可供职后小学教师培训参考。对于数学教育研究亦有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

问题解决与数学实践/郜舒竹编著. —北京:高等教育出版社,2012.6

ISBN 978-7-04-035228-3

I. ①问… II. ①郜… III. ①数学教学-小学-教师培养-教材 IV. ①G623.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 088877 号

策划编辑 靳剑辉
责任校对 王 雨

责任编辑 肖冬民
责任印制 毛斯璐

封面设计 张 志

版式设计 余 杨

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京印刷一厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 18
字 数 300千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2012年6月第1版
印 次 2012年6月第1次印刷
定 价 28.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物 料 号 35228-00

高等院校小学教育专业教材总序

教育部师范教育司

我国已进入全面建设小康社会、加速推进现代化建设的新的历史阶段。在这样一个历史阶段，教育越来越成为促进社会全面发展、推动科技迅猛进步，进而不断增强综合国力的重要力量，成为我国从人口大国逐步走向人力资源强国的关键因素。我国的教师教育正面临着前所未有的机遇和挑战。教师教育的改革发展直接关系到千百万教师的成长，关系到素质教育的全面推进，关系到一代新人思想道德、创新精神和实践能力的培养和提高，最终关系到推动科学发展、促进社会和谐、全面建设小康社会奋斗目标的实现。

培养具有较高学历的小学教师是全面建设小康社会和适应基础教育改革与发展的迫切需要，也是我国教师教育改革的必然趋势。为了适应基础教育改革与发展的需要，我国对培养较高学历小学教师工作进行了长时间的积极探索，取得了较大成绩，并积累了许多宝贵经验。《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》指出：“建设高质量的教师队伍是全面推进素质教育的基本保障。”教育部在《关于“十五”期间教师教育改革的意见》中明确指出：“开创教师培养的新格局，提高新师资的学历层次。”教育部印发的《关于加强专科以上学历小学教师培养工作的几点意见》（以下简称《意见》）中指出：“教育部将组织制订专科学历小学教师的培养目标、规格，完善和改革课程体系和教学内容，制定《师范高等专科学校三年制小学教育专业教学方案（试行）》，组织编写小学教育专业教材，加强小学教育专业建设。”

开展小学教师培养工作，课程教材建设是关键。当务之急是组织教育科研机构、高等师范大学的专家学者和广大师专院校的教师联合编写出一套高水平、规范化的、专为培养较高学历小学教师使用的教材。

编写小学教育专业课程教材，应该遵循以下原则：

一、时代性与前瞻性。教材要面向现代化、面向世界、面向未来，反映当代社会经济、文化和科技发展的趋势，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念。

二、基础性与专业性。教材要体现高等专科或本科教育的基础性，同时要紧密结合当今小学教育课程改革的趋势和实施素质教育的要求，针对小学教育专业的特征和小学教师的职业特点，力求构建科学的教材体系，提高小学教师的专业化水平。

三、综合性与学有专长。教材要根据现代科技发展和基础教育课程改革综合化的趋势，强化综合素质教育，加强文理渗透，注重科学素养，体现人文精神，加强学科间的相互融合以及信息技术与各学科的整合；同时，根据小学教育的需要，综合性教育与单科性教育相结合，使学生文理兼通，学有专长，一专多能。

四、理论与实践相结合。教材要根据小学教师职前教育的要求，既要科学地安排文化知识课和教育理论课，又要加强实践环节，注重教育实践和科学实验，重视教师职业技能和职业能力的培养。

五、充分体现教材的权威性、专业性、通用性和创新性。以教育部制定的小学教育专业课程方案为编写依据，以本、专科通用为目的，培养、培训沟通，在教材体系框架、内容、呈现方式等方面开拓创新，加大改革力度，充分体现以学生为本的教育理念，使教材从能用、好用上升到教师、学生喜欢用。

高等教育出版社根据以上原则组织编写了有关教材，经过专家审定，我们向各地推荐这套教材，请有关单位和学校酌情选用。

前言

本书是作为本科层次小学教育专业的必修课教材而编写的，其主旨在于通过问题解决和数学实践，加强职前小学教师对于数学问题解决和数学实践的理解，提高数学解题和数学实践能力。

关于“数学实践”这一概念，按目前检索到的文献，是 R. E. Gaskell 于 1957 年 10 月在《美国数学月刊》上一篇题为“The Practice of Mathematics”的文章中提出的。^①该文的主旨在于讨论数学在技术领域的应用问题，指出数学实践的三种类型：第一种类型是基于数学理论的研究，而后在实践中寻找应用；第二种类型是基于实践领域的问题，去寻找数学中现成的理论来解决问题；该文作者认为真正的数学实践者应当开展的是第三种类型的数学实践，即基于问题去探索什么样的数学与这样的问题是最适应的。这种“适应”不仅意味着问题的解决，还应当蕴涵新的数学形式的产生和“美”的因素。

按照这样的理解，数学实践不仅仅是数学的应用和实际问题的解决，还包括数学的创造和发现。据此我们对数学实践可以形成这样的认识，数学实践是基于问题和问题解决的，而不是基于数学理论和方法的。因此具有发现问题和解决问题的能力是开展数学实践的基础；同时数学实践的目的不能局限于问题的解决，而应当挖掘、提炼、整理实践过程中所使用的知识、思想和方法。本书内容基本上是按照这种思路取材和编排的。

全书共分 12 章，基于理论与实践相结合的编写原则，前 6 章主要介绍与数学问题解决相关的内容，主要包括数学教育的发展历史、问题解决的产生背景以及关于“问题”和“问题解决”的相关内容；后 6 章偏重于数学实践的内容，分别从理论和实践的角度阐释了数学

^① R. E. Gaskell. The Practice of Mathematics. The American Mathematical Monthly, 1957, 64 (8): 557-566.

实践的研究思路。

每一章的开始部分安排了“本章导读”，指出本章的重点内容以及要回答的问题，其目的在于使得学习者可以在学习之前，对本章内容有一个宏观的认识，从而可以带着问题开始学习。另外，每一节的最后安排了“思考题”，其目的在于帮助读者回顾、思考本节学习的主要内容。

本书编写的主要特点在于特别重视“问题提出→问题解决→问题探究”的全过程，尽可能向读者展示问题的产生背景以及通过问题解决所能够进一步探究的内容。希望读者通过本书不仅能学习“怎样解决问题”，还能够体验“提出问题”和“数学探究”的过程与方法。另外，传统的数学解题研究比较重视解题方法的研究，而忽视对方法来源的研究，也即对“方法的方法”的研究。

全书绝大部分内容都是作者自身前期的研究，凡重要的引用均在当页以脚注形式注明。所需要的基础知识大部分均不超出小学数学课程的范围，只有少数内容牵涉到中学和微积分。因此本书适于作职前小学教师培养的教材，也可供职后小学教师培训提供參考，对于数学教育研究亦有一定的参考价值。

全书编写过程中得到了首都师范大学初等教育学院领导以及高等教育出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

郜舒竹

2012年4月于北京

目 录

第 1 章 数学教育与问题解决

§ 1.1 数学教育发展概况	2
§ 1.2 问题解决教学观的兴起	7
§ 1.3 什么是问题	9
§ 1.4 数学观念与数学实践	15

第 2 章 问题的经纬联系

§ 2.1 问题从何而来	22
§ 2.2 问题的相同	27
§ 2.3 问题链	35
§ 2.4 问题解决与新问题产生	42

第 3 章 问题解决的过程与方法

§ 3.1 什么是问题解决	49
§ 3.2 问题解决的要素	58
§ 3.3 解题方法的来源	66
§ 3.4 问题解决与数学探究	72

第 4 章 整数问题

§ 4.1 形数	82
§ 4.2 记数	89

§ 4.3 先分后合	96
§ 4.4 余数问题	100

第 5 章 分数问题

§ 5.1 基本问题	106
§ 5.2 倍与率	108
§ 5.3 行程问题	112
§ 5.4 上山、下山的行程问题	119

第 6 章 图形问题

§ 6.1 三角形的中位线	125
§ 6.2 三角形的部分与整体	129
§ 6.3 正方形中的整体与局部	134
§ 6.4 与圆有关的问题	137

第 7 章 数学实践的思想基础

§ 7.1 正、误辨别	141
§ 7.2 从“商不变”看规律性知识的特征	146
§ 7.3 从函数看规则性知识的特征	156
§ 7.4 从数学术语看规定性知识	165

第 8 章 数学思考的逻辑基础

§ 8.1 概念、判断、推理	174
§ 8.2 猜想与证明	178
§ 8.3 类比推理	180
§ 8.4 历史故事中的逻辑	185

第 9 章 “错误”的产生

§ 9.1 数学语言的特点	190
---------------------	-----

§ 9.2	错误判断的产生	193
§ 9.3	质疑与反驳	196
§ 9.4	眼见未必为实	199

第 10 章 追求理解的数学实践

§ 10.1	计算其实是演绎	205
§ 10.2	归纳的风险	209
§ 10.3	“角”的作用究竟是什么	215
§ 10.4	运动的眼光	230

第 11 章 源于困惑的数学实践

§ 11.1	$\frac{1}{7} = \frac{1}{8}$ 的困惑	241
§ 11.2	半径不同, 周长相等	244
§ 11.3	为何不是二分之一	249
§ 11.4	“喇叭悖论”新解	253

第 12 章 基于实际的数学实践

§ 12.1	年历与钟表上的问题	259
§ 12.2	买卖与钱币	263
§ 12.3	探求策略	267
§ 12.4	欧拉究竟是怎样解决“七桥问题”的	271

第1章

数学教育与问题解决

本章导读

- 数学教育的基本矛盾
- 问题解决的产生背景
- 什么是问题
- 问题的构成要素
- 问题意识与问题提出

§ 1.1 数学教育发展概况

一、20 世纪以前

追溯对于西方数学教育影响最大的，莫过于古希腊。比如，众所周知的古希腊哲学家柏拉图（Plato），同时也是一位杰出的数学教育家。在他所创办的学园门口刻着柏拉图的格言：“不懂几何者不得入内！”这并非是对所谓不懂几何者的歧视，体现的是对数学的崇尚。古希腊的数学、科学和哲学都是以“学派”的形式发展起来的，“学派”也是一种教育团体，其主要学者都给人讲学。柏拉图学派培育了诸如欧多克索斯（Eudoxus）、欧几里得（Euclid）、梅内克缪斯（Menaechmus）等一批数学家。

毕达哥拉斯（Pythagoras）学派把数学分为四大科：算术、几何、天文、音乐，这是人类第一次把数学按其研究的内容进行的分科。公元4世纪后，罗马帝国开始被宗教神学垄断。直至文艺复兴来临之时，数学教育才有了新的发展。英国的数学教育家雷科德（Robert Recorde）写成算术、几何、代数等一系列的数学教科书，奠定了以后几百年间数学教育的基本内容。他将数学教育从教会中解救出来。

19世纪末，随着科学技术的迅猛发展，资本主义逐步发展到帝国主义阶段，这也是知识快速发展的一个阶段。科技的发展迫切需要培养新型的技术人才和劳动者，从而促使了教育体制的改革。当时的英国，经济飞速发展，被称作“世界银行”、“世界工厂”。世界范围内首次数学教育的改革由此开始，其代表人物首推英国的培利（J. Perry）和德国的克莱因（F. Klein）。

1901年，培利在题为《数学教学的讨论》的著名报告中，针对传统数学教育的诸多弊端，提出了数学教育改革的鲜明主张：

- 要从欧几里得《几何原本》的束缚中解脱出来；
- 给予实验几何充分的重视；
- 重视实际的测量问题和近似计算的问题；
- 充分利用坐标纸；
- 增加立体几何（包括画法几何）的内容；
- 更多地利用几何直观；
- 尽早引入“微积分”的知识。

这些主张给当时保守的英国数学教育以强烈冲击. 为了说明这些主张, 培利还论述了数学教育的作用以及数学教育的目标和意义:

- 通过数学教育培养高尚情操和愉悦的心情;
- 通过启发学生主动思考, 培养逻辑思维能力;
- 使学生认识到数学是学习、研究自然科学的有力武器;
- 通过学生亲身动手实验, 训练数学技能;
- 让每个学生都能像运用自己的手脚那样运用数学逻辑进行思考, 这样将会终身受益, 不断进步;
- 教育学生主动地探求事物本身的规律, 不固执己见, 也不盲从权威;
- 让从事应用科学的人懂得, 数学是应用科学的基础, 数学能够促进应用科学得到发展;
- 为了防止哲学空洞、抽象地发展, 数学应该成为哲学思考的基础, 能够给哲学研究者提供迅速、准确的逻辑思维方法.

在数学教学方法方面, 培利反对“学究式”的教学, 也就是把数学的过程描述为空洞的逻辑推理的过程. 提倡结合实际问题进行激发学生学习的教学方式.

在数学学习过程方面, 培利提倡积极主动、独立思考的学习方式. 他说: “按我的经验, 一般的人都可以成为知识的发现者和创造者. 而且这种锻炼越早越好. 对于简单的事物, 与其教师指出, 不如让学生自己去发现. 这样, 学生就会体会到数学的价值以及自身的价值, 这样的训练将使学生终生受益.”

培利关于数学教育的观点, 对许多国家的数学教育改革起到了积极的推动作用.

1902年, 美国数学会主席摩尔(E. H. Moore)提出“统一数学”的观点, 即把中小学数学的诸多学科融合在一起. 在数学教学方法上提倡“实验室式”的教学方法.

1904年, 德国著名数学家克莱因开始发表数学教育的观点并著书立说. 于1907年出版《中等学校的数学教育讲义》, 1908年出版《高观点下的初等数学》, 这两本书被公认为是数学教育的经典著作. 克莱因倡导用函数概念统一作为教育的数学. 他在上述著作中指出: “我确信, 几何形式的函数概念, 应该成为数学教育的灵魂. 以函数概念为中心, 将全部数学内容集中在它的周围, 进行充分的综合.” 这种数学教育的思想和方法对于各国数学教育改革的影响极为深远.

这一次世界范围的数学教育改革运动成为了20世纪历次数学教育改革的前导。后来人们称之为“培利运动”或“培利-克莱因运动”。

二、杜威的进步主义教育

美国的进步主义教育(Progressive Education)兴起于19世纪末,美国实用主义哲学家约翰·杜威(John Dewey)是其主要代表人物。进步主义的教育观点是针对20世纪以前的“传统教育”提出的,认为“传统教育”远离生活,不适应美国现实的需要。归纳其弊端主要有三个方面:

第一,“传统教育”传授过时、过死的知识,这种知识以固定教材的形式提供给学生,教师照本宣科,学生死记硬背;

第二,“传统教育”按照传统的道德规范去训练学生;

第三,实施“传统教育”的教师是传授知识和技能以及实施行为准则的代理人。

根据杜威的观点,古希腊人之所以推崇永恒不变的知识作为课程内容,是由当时人们“崇尚永恒”的文化背景决定。古代科技不发达,面对众多的未解之谜,人们感受到自然的威胁,通常寻求解脱的方式有两种:一是和解的方式,即祈祷、献祭等取悦对方的方式,或奉献虔诚与忠实的内心;另一种是用行动改变外界,即发明许多技艺。他们之所以排斥实际活动的一个显著理由,就是实际活动具有不确定性。所以人们推断理智思维所能达到的境界才是他们所要追求的安全避难所。因此当时数学的知识也是脱离现实生活的。

进步主义认为教育的主要内容应该是表现个性,培养个性,反对灌输;以自由活动取代外部约束;主张从经验中学习,反对从教科书和教师那里学习;主张各种技能、技巧能够满足直接的需要,反对以训练的方法获得那种孤立的技能和技巧;教育同现实需要相适应,反对为遥远的未来做准备;让学生熟悉变化中的世界,反对固定不变的目标和教材。他们提出“经验的学习”、“教育即生活”、“教育过程即是生长过程”等口号。

另外,进步主义还试图突破“工具主义”的数学观^①,认为如果数学只是一种工具,那么儿童在受教育阶段,就不是真实地生活着,而是为了将来成人的生活而生活着,眼前的生活就是虚幻的。这显然不符合儿童的实际生活需要,要突破这种工具意义上的数学观念,就必须向儿童的实际

^① 参见本章第4节。

生活靠拢。杜威认为,人要生存就不能不活动,活动是人能维持生活的起码条件。数学不仅是一种工具,更应该是贴近儿童生活的活动,通过活动获得经验,获得有用的数学知识^①。

三、“新数运动”的兴衰

1957年10月4日,苏联成功发射第一颗人造卫星,引起美国朝野的极大震惊。美国政府经过反省普遍认为,美国的数学与科学教育水平已经落后于苏联,必须立即开始数学教育的改革。自此,一场有史以来规模最大的数学教育现代化运动——“新数运动”,在世界范围内揭开了帷幕。

从1958年到1962年期间,先后召开了一系列国际数学教育会议,旨在完成数学教育现代化运动的准备、发动工作。会议集中指出传统数学教育的诸多弊端,概括为如下六条:

- 数学教育中缺乏近、现代的数学思想和方法;
- 数学教育的内容陈旧,基本上沿袭16世纪前后的内容,特别是几何,基本上是两千年前《几何原本》的翻版;
- 数学内容的编排体系零散,各个学科各自为政、互不联系,缺乏共同的理论基础;
- 过分强调繁琐的计算和技巧,使得学生学到的数学脱离实际,收效甚微;
- 教学方法单调,长期以来数学教学方法形成了划一的模式,即粉笔、黑板作为工具,教师以讲授为主,所有内容几乎都遵循“定义、定理、例题、作业”的模式进行教学,偏重演绎,忽视归纳;
- 大学、中学、小学相互脱节。

自1962年至1970年期间,以美国为首,包括欧洲、东南亚的许多国家纷纷开始实施数学教育现代化运动。各个国家制定的大纲、教材以及所采用的教学方法种类繁多、各具特色,其共同特点可以概括为如下几点:

- 课程内容结构化。以近代数学中集合、关系、映射、运算、群、环、域、向量空间的代数结构为主线,把初等数学统一起来。
- 强调公理方法。认为代数也应该像几何一样公理化和系统化。
- 增加现代数学内容。诸如集合、逻辑、群环域、矩阵、向量、微积分、概率统计、计算机科学在许多教材中都有反映。

^① 这里的“有用的数学知识”指生活中的直接应用,显然忽略了数学的理性价值。

- 淡化几何、强化代数. 认为原来的欧几里得几何的公理体系是不严谨的, 与其用不严谨的欧几里得的公理体系训练学生的思维, 还不如用数理逻辑、集合论等来训练学生的思维. 几何知识可以通过实验几何、解析几何获得.

- 精简传统数学课程内容. 因为需要引进近现代数学内容, 必然需要对传统内容删减. 欧几里得几何内容删减的最多, 其次是三角恒等式等内容.

- 教学方法多样化. 追求教学手段的现代化, 强调趣味性和直观性, 提倡发现法.

从各国改革的程度上看, 大致可以分为三种类型:

类型1: 美国以及欧洲一些国家, 改革力度最大, 所编教材力求达到上述的所有要求.

类型2: 基本保留传统教材的体系, 适当增加一些现代数学的内容. 苏联是这一类型的代表.

类型3: 介于前两种类型之间的“中间型”. 打破了单科独进的传统教学方式, 将传统课程内容重新组合并适当增加编排新内容.

“新数运动”使得世界上大部分国家的数学教育面貌发生了巨大变化, 联合国教科文组织认为这种变化的意义可以概括为以下方面:

- 数学成为一个开放体系呈现于学生面前;
- 使得学生对使用的方法有明晰的概念, 对归纳法和演绎法的互补作用有所认识;

- 学生学习数学的动机源自于内部需要, 即兴趣;
- 学生学习的过程从被动的听解释, 变为主动地参与问答;
- 课堂教学的组织形式更为多样、灵活;
- 数学知识以螺旋上升的方式呈现;
- 大量运用图像和直观传播物, 引出了“数学心理学”的研究.

“新数运动”是社会发展的要求, 是历史的必然. 但在实践的过程中, 不可避免地出现了种种问题, 比如:

- “新数运动”过分强调公理化和严谨性, 导致学生计算能力的削弱, 同时由于许多“新数运动”内容学生难以接受, 因此“新数运动”表现为数学教育质量下降;

- 贯穿“新数运动”课程内容的集合论过于抽象, 学生很难理解;
- 数学教师的水平没有及时跟上, 导致实际教学中出现许多形式主义的现象.

由于此类问题不断涌现,20世纪70年代以后,对“新数运动”的批评愈演愈烈,“回到基础”的呼声最终使得“新数运动”销声匿迹。

虽然“新数运动”的实际效果并不理想,但是“回到基础”并不意味着对“新数运动”的全盘否定,更意味着回到“旧数学”。暂时的曲折并不能说明改革的不必要。事实证明,“新数运动”对今后数学教育的发展仍具有不可估量的积极意义。

思考题 1.1

1. 简述20世纪数学教育改革的基本历程。
2. 简述杜威的教育思想。
3. 简述“新数运动”产生的背景。
4. 简述“新数运动”失败的原因。

§ 1.2 问题解决教学观的兴起

一、数学教育的困境

培利-克莱因运动以及美国的进步主义教育无疑对20世纪以前的“传统教育”作了彻底的批判。数学教育虽然符合了儿童的生活需要,却没有满足社会对数学教育的需求。本来杜威并不是没有考虑社会需求,他竭力批判传统教育的二元论,即在个人与社会之间取舍的做法,希望消除二元论,在个人与社会之间寻求一种平衡。但当进步主义的推行者们将之推行于数学教育的实践时,他们却将支撑点放在了与传统教育相反的另一侧,即儿童一侧,于是他所向往的平衡很快被打破了。

“新数运动”试图克服进步主义的弊端,却忽略了学生认知水平及身心发展的特点。某种意义上又回到了进步主义教育所批判的“传统教育”,这一历程恰好体现了“肯定—否定—否定之否定”的基本规律。至此,数学教育陷入了困境。

既不能把数学看做玄之又玄的理性知识,也不能认为一切数学知识都与儿童的生活经验相联系。如果所有数学的学习都必须通过生活经验来获得,那么必然大大影响人类获取知识的进程,违背人类社会的效率需求。数学作为一门古老的学科,必然有区别于人类简单活动和世俗的一方面。

由此看出,数学教育的基本矛盾集中体现在“数学”与“教育”的