

□ 应用统计学丛书

Monte Carlo Methods in
Financial Engineering

金融工程中的 蒙特卡罗方法

Paul Glasserman 著

范韶华 孙武军 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

□ 应.....

Monte Carlo Methods in
Financial Engineering

金融工程中的 蒙特卡罗方法

Paul Glasserman 著

范韶华 孙武军 译

金融工程中的蒙特卡罗方法



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

Translation from the English language edition:
Monte Carlo Methods in Financial Engineering by Paul Glasserman
Copyright © 2004 Springer-Verlag New York, Inc.
Springer-Verlag New York is part of Springer Science+Business Media LLC
All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

金融工程中的蒙特卡罗方法 / (美) 格拉瑟曼
(Glasserman, P.) 著; 范韶华, 孙武军译. -- 北京:
高等教育出版社, 2013. 6

书名原文: Monte Carlo Methods in Financial
Engineering

ISBN 978-7-04-032292-7

I. ①金… II. ①格… ②范… ③孙… III. ①蒙特卡
罗法-应用-金融学 IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 091258 号

策划编辑	赵天夫	责任编辑	李华英 李 鹏	封面设计	赵 阳
版式设计	童 丹	责任校对	刘娟娟	责任印制	张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京市白帆印务有限公司
开 本 787 mm × 1092 mm 1/16
印 张 36.25
字 数 660 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2013 年 6 月第 1 版
印 次 2013 年 6 月第 1 次印刷
定 价 79.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32292-00

译者序

中国面临新一轮金融改革和金融产品创新进程,金融工程学将在这个过程中起到推动作用。蒙特卡罗方法作为金融衍生工具的一种有效的数值分析方法,已经成为衍生品定价和风险管理必不可少的工具。《金融工程中的蒙特卡罗方法》是第一本系统阐述蒙特卡罗方法在金融领域中应用的书籍,被学术界和业界专业人士广泛使用。该书为蒙特卡罗方法在金融市场中的应用提供了理论基础,也为金融衍生品定价提供了模型方法和实例。它的特点是原理上的介绍深入浅出,将金融、数学、计算机和概率统计中相关的知识条分缕析融为一体,使读者对蒙特卡罗方法有更深刻的跨学科认识;在应用上提供很多实战例证和程序上的指导,让读者很容易上手编写程序解决具体的问题。

译者之一范韶华博士在纽约大学科朗数学研究所学习金融数学期间,采用该书作为主要参考书,其后在华尔街业界的日常工作中也经常使用,觉得该书对蒙特卡罗方法解决金融工程中实际问题阐述得很透彻,是一本理论与实践相结合的好书,使译者受益匪浅。译者于2009年12月在参加“2009海外华人金融高管浦东行”活动及访问苏州大学金融工程研究中心时,与多位老师、同学及金融行业的研究和工作人员谈到此书,他们都对该书表现出强烈的兴趣,认为将该书译成中文会是很有意义的一件事情。目前在中国金融研究和工业界,蒙特卡罗方法的应用还处在一个起步和发展的阶段,这本书将帮助我国读者了解这个领域的前沿进展。随着中国金融衍生品市场的发展及金融工程学科在中国的兴起,这本书将会有越来越广泛的读者群。

翻译过程中,范韶华负责第2,4,6,8章,附录及序言;孙武军负责第1,3,

5, 7, 9 章。范韶华统一审阅和修改了所有的章节。本书的翻译历时三年定稿, 期间得到了很多人的支持和帮助, 在此深表感谢。原著作者 Glasserman 教授在早期就有关译本的版权提供了信息和帮助, 并回答了我们翻译中遇到的一些问题。同济大学数学研究所的姜礼尚教授对本书的翻译给予了很大的鼓励。以下的学生和朋友直接参与了翻译的工作: 郭盈宏 (康奈尔大学统计系研究生), 章睿 (即将就职于广发证券投行部), 张宁致 (即将就职于美国柏诚集团), 周佳丽 (即将就职于中信银行南京分行), 葛坤 (即将就职于国信证券固定收益部), 陈浩 (即将就职于常熟农商银行), 张亮亮 (密歇根州立大学统计系博士生)。在完成初稿之后, 很多华尔街的同仁在他们繁忙的工作之余, 挤出宝贵的时间阅读部分章节并提出建设性的反馈。他们是: 方焯博士 (Morgan Stanley), 王礼静博士 (Bank of America Merrill Lynch), 邵晖博士 (Ernst & Young), 汤睿博士 (Ernst & Young), 吴益跃博士 (UBS), 孙东宁博士 (Deutsche Bank), 胡海潮博士 (Prudential), 以及阎宏博士 (Barclays)。书中任何缺点和疏漏都是两位译者的完全责任。由于译者水平有限, 缺点和疏漏在所难免, 恳请大家不吝指正, 万分感激。读者有什么问题, 欢迎与译者联系:

MCMMethodsInFE.Chinese@gmail.com

<https://sites.google.com/site/MCMMethodsInFE/home>

高等教育出版社的赵天夫编辑、李华英编辑和李鹏编辑在审阅书稿、制作图表、编辑排版等方面做了很多工作, 并力求精益求精。赵编辑从开始的版权到最后的成稿, 都提供了很多的支持和帮助。在此一并表示衷心的感谢。

最后, 范韶华非常感谢太太陈新华及家人对他的理解和支持。

范韶华, 孙武军

2013 年 4 月 28 日

序言

这是一本从金融工程视角研究蒙特卡罗方法的书。蒙特卡罗模拟已经成为金融衍生品定价和风险控制中的重要工具。这些应用反过来也导致了新的蒙特卡罗方法的提出以及对一些传统蒙特卡罗方法的新的兴趣。这也是一本从蒙特卡罗方法的视角来研究金融工程的书。理解模型的一种最好的方法，比如利率的期限结构，是通过模型的模拟实现；寻找更有效的模拟办法也会导致对模型的特性更深入的分析。

本书适合的读者是金融工程专业研究生、应用蒙特卡罗方法进行金融研究的研究人员以及在业界实现模型的金融人士。这本书是根据我在美国哥伦比亚大学、普林斯顿大学和丹麦奥胡斯大学授课时的讲稿提炼而成。来选课的是工程、数学、物理和金融专业的硕士及博士研究生。本书的内容选择也受到我与 Mark Broadie 共同编写的对专业人员进行培训的教程的影响。这些培训通常与 Leif Andersen 和 Phelim Boyle 等人合作。与这些将蒙特卡罗方法应用于衍生品领域的实践者和同仁进行讨论，也帮助我形成了写这本书的思路。

金融工程专业的学生和人士多来自不同学术领域，在数学、统计、金融、计算机方面所受的训练也是程度不一，这使得我很难设定一个统一的授课标准。读懂这本书最重要的前提条件是熟悉用来阐述和分析金融中的连续时间模型的数学工具。先前对期权定价的基本原理有所了解将有助于理解本书，但这些知识并不是必需的。所需的金融数学工具包括 Itô 微积分、随机微分方程和鞅。书中多次提到的最前沿的概念是测度变换，这个概念对期权定价和蒙特卡罗方法都至关重要，在这本书里不可避免地要多次提到，所以需要提前掌握它。如果你能

理解 Girsanov 理论, 就应该可以读懂本书。

尽管就本书内容而言使用金融数学语言非常重要, 但就计算而言, 其技术方面的微妙之处并不需要很多数学语言。我在本书中对数学工具的使用经常不是很严格, 比如我会假设局部鞅是一个鞅, 或者随机微分方程有解, 而不太关注这些假设是否成立。有时候为了图方便, 我会在没有考虑其可导性之前就进行求导, 或还没确认可积性就对其积分。我这样做是为了能重点讨论对蒙特卡罗方法最重要的东西, 而避免频繁被打断去讨论那些条件。不过每当这些条件不是显而易见或者对我们理解一种方法的适用范围很重要时, 我会专门提出来。此外, 附录中给出了有关随机微积分大部分数学工具的精确定义。

这本书分成三个部分。第一部分, 也就是第 1 章到第 3 章, 是蒙特卡罗方法的基础。第 1 章总结了衍生品定价和蒙特卡罗方法的理论基础。这一章解释了为何衍生品定价问题可以表达为积分形式, 从而可以使用蒙特卡罗方法。第 2 章讨论了随机数的生成、非均匀分布的抽样以及蒙特卡罗方法的基本工具。第 3 章介绍了金融工程中使用的几个最重要的模型以及它们的模拟实现。第 3 章和第 1 章分别包括了更多的对模型和金融基础知识的讨论。因为来修蒙特卡罗课程的学生通常没有这方面的知识, 并且如果对模型及其应用的背景知识有所理解, 实现一个模拟会更有意义。而且也正是在模型的细节里, 模拟的各种问题才随之而来。

如果说前三章是讨论运行模拟的话, 那么接下来的三章则是如何将模拟运行得更好。第 4 章介绍通过降低蒙特卡罗估计中的方差来提高精确性。第 5 章讨论通过决定性的准蒙特卡罗方法来实现数值积分。第 6 章讨论离散化逼近连续时间模型所产生的离散化误差问题。

最后三章专门讨论了蒙特卡罗方法在金融中的应用。第 7 章介绍估计价格敏感值或“避险参数”。第 8 章讲美式期权定价问题, 解决模拟中最佳停时问题。第 9 章讨论蒙特卡罗在风险控制中的应用。它讨论了市场风险的测量和投资组合中的信贷风险。最后一章所涉及的方法和模型与其他章都不一样, 那些章主要讨论的是金融衍生品的定价问题。

我要向对本书作出贡献的人致以谢意。尤其要感谢经常与我合作的同事以及合作者 Mark Broadie, Phil Heidelberger 和 Perwez Shahabuddin。他们给了我很多对本书的思考和内容有益的影响。我有幸和 Mark Broadie 有过几次教学和科研上的合作, 我们对本书的大部分内容都进行过讨论, 这使我受益匪浅。Mark, Phil Heidelberger, Steve Kou, Pierre L'Ecuyer, Barry Nelson, Art Owen, Philip Protter 和 Jeremy Staum 都对本书中的章节进行过评价, 我非常感谢他们提出了中肯的意见和建议, 也对不能将他们很多好的建议都包含在本书中表示歉意。我也得益于很多在校的和已毕业的哥伦比亚大学的学生: Jingyi Li, Nicolas

Merener, Jeremy Staum, Hui Wang, Bin Yu 和 Xiaoliang Zhao。此外, 上过我讲授的课程的学生也给我指正过讲稿中的疏漏, 在此一并致谢。

Paul Glasserman

2003 年于纽约

目录

第 1 章 基础	1
1.1 蒙特卡罗原理	1
1.1.1 介绍	1
1.1.2 第一个例子	3
1.1.3 模拟估计的有效性	8
1.2 衍生品定价准则	18
1.2.1 定价和复制	19
1.2.2 套利和风险中性定价	23
1.2.3 基准变换	30
1.2.4 风险的市场价格	34
第 2 章 随机数与随机变量的产生	37
2.1 随机数的产生	37
2.1.1 一般考虑	37
2.1.2 线性同余发生器	40
2.1.3 线性同余发生器的实现	42
2.1.4 格子结构	45
2.1.5 组合发生器和其他方法	47

2.2	一般抽样方法	50
2.2.1	逆变换方法	51
2.2.2	接受 - 拒绝方法	55
2.3	正态随机变量和向量	59
2.3.1	基本性质	59
2.3.2	一元正态变量的产生	61
2.3.3	多维正态 (样本) 的产生	67
第 3 章	构造样本路径	74
3.1	布朗运动	74
3.1.1	一维情况	74
3.1.2	多维情况	85
3.2	几何布朗运动	88
3.2.1	基本属性	88
3.2.2	路径依赖型期权	91
3.2.3	多维情况	99
3.3	Gauss 短期利率模型	103
3.3.1	基本模型和模拟	103
3.3.2	债券价格	106
3.3.3	多因子模型	112
3.4	平方根扩散过程	114
3.4.1	转移密度函数	116
3.4.2	Gamma 分布和 Poisson 分布的抽样	119
3.4.3	债券价格	123
3.4.4	扩展	125
3.5	带跳跃的过程	128
3.5.1	一个跳跃扩散模型	128
3.5.2	纯跳跃过程	136
3.6	远期利率模型: 连续利率	142
3.6.1	HJM 框架	143
3.6.2	离散漂移项	148
3.6.3	实现	153
3.7	远期利率模型: 简单利率	158
3.7.1	LIBOR 市场模型动态过程	158
3.7.2	衍生品定价	164

3.7.3 模拟	166
3.7.4 波动率结构和校准	173
第 4 章 方差缩减技术	177
4.1 控制变量法	177
4.1.1 方法和例子	177
4.1.2 多元控制变量	188
4.1.3 小样本事件	191
4.1.4 非线性控制	194
4.2 反向变异法	196
4.3 分层抽样法	200
4.3.1 方法和例子	200
4.3.2 应用	210
4.3.3 后分层	221
4.4 拉丁超立方体抽样法	224
4.5 匹配标的资产法	232
4.5.1 路径调整的矩匹配法	233
4.5.2 加权的蒙特卡罗法	240
4.6 重要性抽样法	243
4.6.1 原理和例子	243
4.6.2 依赖路径的期权	255
4.7 结束语	264
第 5 章 准蒙特卡罗	267
5.1 一般原则	267
5.1.1 偏差	269
5.1.2 Van der Corput 序列	271
5.1.3 Koksma-Hlawka 边界	273
5.1.4 网格和序列	276
5.2 低偏差序列	278
5.2.1 Halton 序列和 Hammersley 点集	278
5.2.2 Faure 序列	283
5.2.3 Sobol' 序列	288
5.2.4 进一步构造	300

5.3	格规则	301
5.4	随机准蒙特卡罗	304
5.5	金融中的应用	307
5.5.1	数值算例	307
5.5.2	策略的实施	314
5.6	结束语	318
第 6 章	离散法	320
6.1	介绍	320
6.1.1	Euler 方法与第一次修正	320
6.1.2	收敛阶	325
6.2	二阶方法	328
6.2.1	标量情况	328
6.2.2	向量情况	332
6.2.3	加入路径依赖性	338
6.2.4	外推法	340
6.3	延伸	342
6.3.1	一般扩展	342
6.3.2	跳跃 – 扩散过程	343
6.3.3	均方误差的收敛	344
6.4	极值和障碍跨越: 布朗内插法	346
6.5	变量变换	350
6.6	结束语	354
第 7 章	敏感性估计	355
7.1	有限差分近似	356
7.1.1	偏差和方差	356
7.1.2	最优均方误差	359
7.2	顺向微分估计	364
7.2.1	方法和例子	364
7.2.2	无偏性成立的条件	370
7.2.3	数值逼近及相关方法	373
7.3	似然比方法	378
7.3.1	方法和例子	379
7.3.2	偏差和方差的性质	384

7.3.3	Gamma	388
7.3.4	逼近及相关方法	390
7.4	结束语	395
第 8 章	美式期权定价	397
8.1	问题的公式表达	397
8.2	参数逼近	402
8.3	随机树方法	406
8.3.1	高估计量	407
8.3.2	低估计量	409
8.3.3	实现	412
8.4	状态空间分割	415
8.5	随机网格方法	418
8.5.1	一般框架	418
8.5.2	似然比权重	424
8.6	基于回归的方法和权重	432
8.6.1	逼近连续值	432
8.6.2	回归和网格权重	437
8.7	对偶性	443
8.8	结束语	449
第 9 章	在风险管理中的运用	451
9.1	损失概率和风险值	451
9.1.1	背景	451
9.1.2	VAR 的计算	454
9.2	运用 delta-gamma 近似的方差缩减	461
9.2.1	控制变量	461
9.2.2	重点抽样	464
9.2.3	分层抽样	469
9.3	厚尾情况	475
9.3.1	厚尾分布的建模	475
9.3.2	Delta-gamma 近似	479
9.3.3	方差缩减	482

9.4 信用风险	487
9.4.1 违约时间及估值	487
9.4.2 违约的相关性	491
9.4.3 投资组合信用风险	495
9.5 结束语	502
附录 A 收敛和置信区间	504
A.1 收敛概念	504
A.2 中心极限定理和置信区间	506
附录 B 随机微积分的结果	509
B.1 Itô 公式	509
B.2 随机微分方程	512
B.3 鞅	514
B.4 测度变换	517
附录 C 利率期限结构	522
C.1 期限结构术语	522
C.2 利率衍生品	527
参考文献	531
索引	553

第 1 章 基础

本章介绍两个领域的核心观点, 而其交集部分就是整本书的主题. 1.1 节论述了蒙特卡罗方法应用分析的原理. 我们首先给出了蒙特卡罗方法的基本描述和简单示例, 接着给出了用来衡量蒙特卡罗估计有效性的框架. 1.2 节回顾了有关衍生品定价理论的概念, 包括复制定价、无套利条件、风险中性概率以及市场完全性. 对我们而言, 最重要的思想是用期望来表达衍生品的定价, 因为蒙特卡罗方法的应用正是基于这种期望形式的表达.

1.1 蒙特卡罗原理

1.1.1 介绍

蒙特卡罗方法是基于概率和容量之间类比的一种统计模拟方法. 利用数学测度论, 可以把直观的概率概念形式化, 将事件和一个集合的结果联系在一起, 并将事件的概率定义为其容量 (或度量) 与事件所有可能结果的比率. 蒙特卡罗模型反过来用这种对等关系, 即通过将容量解释为概率来计算一个集合的容量. 举一个最简单的例子, 在总体中所有可能发生的结果中随机抽样, 然后用那些落入给定集合的样本所占总体的比例, 来估计样本集的容量. 大数法则保证了这个估计会随着抽样次数的增加而收敛于真实值. 中心极限理论也给出了在有限次抽样下估计误差可能的幅度.

我们可以进一步把容量和积分联系起来. 例如, 我们要估计一个在单位区

间内的函数 f , 我们可以将积分:

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx$$

作为期望值 $E[f(U)]$, 其中 U 在 0 和 1 之间均匀分布. 假设我们有一个方法可以独立均匀地在 0 和 1 之间抽样得到点 $U_1, U_2, \dots$, 那么计算 f 在这些随机分布点上的值并取这些结果的平均值, 则得到蒙特卡罗估计:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i).$$

如果函数 f 在 0 和 1 之间是可积的, 那么根据强大数法则, 有

$$\text{当 } n \rightarrow \infty, \text{ 以概率 } 1 \text{ 使得 } \hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha.$$

如果函数 f 平方可积, 我们令

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx,$$

那么蒙特卡罗估计中的误差项 $\hat{\alpha}_n - \alpha$ 近似地服从均值为 0、标准差为 $\sigma_f/\sqrt{n}$ 的正态分布, 它与正态分布的近似程度随着 n 的增加而增加. 在 α 未知的情况下, 参数 σ_f 通常也是未知的, 但是可以通过样本标准差来估计

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2}.$$

因此, 从函数值 $f(U_1), \dots, f(U_n)$ 中我们不仅可以得到 α 的积分还可以估计误差值.

标准差 $\sigma_f/\sqrt{n}$ 的形式是蒙特卡罗方法的核心特征. 它意味着要减少一半的方差需要四倍的估计点; 每增加一个级数的精度需要增加 100 倍的估计点数目. 这是由标准差的分母 $\sqrt{n}$ 而得到平方根收敛速度的实际表达式. 相比之下, 至少对于二阶连续可导函数 f , 简单的梯形法则中的误差

$$\alpha \approx \frac{f(0) + f(1)}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(i/n)$$

有 $O(n^{-2})$ 阶. 蒙特卡罗方法通常不是一个有竞争力的用来计算一维积分的方法.

蒙特卡罗方法作为计算工具的价值在于它的收敛速度 $O(n^{-1/2})$ 不局限于单位区间的积分. 事实上, 上面所述的步骤可以推广到估计任何维数 d 下 $[0, 1]^d$

(甚至是 $\mathfrak{R}^d$) 上的积分. 当然, 如果我们改变了维数, 那么函数 f 和相应的 σ_f 也将随之改变, 但是对用 $[0, 1]^d$ 上的 n 个样本来估计的蒙特卡罗方法而言, 标准差将依然保有 $\sigma_f/\sqrt{n}$ 的形式. 特别地, $O(n^{-1/2})$ 的收敛速度是对所有的 d 都成立的. 相比之下, 对于二阶连续可导的被积函数, d 维中乘积梯形法则的误差是 $O(n^{-2/d})$; 这种随着维数增加而带来的收敛速度的降低是所有确定性积分方法的通病. 因此, 蒙特卡罗方法的优势在计算高维积分.

而这与金融工程有什么关系呢? 资产定价理论的一个基本内涵是, 在某些情况下 (在 1.2.1 节回顾), 衍生品的价格可以有效地表示为期望值. 因此, 对于衍生品的定价就简化为计算期望值. 在许多情况下, 如果要把一个相关期望值写成积分形式, 我们会发现, 其维数非常大, 甚至是无限的. 而这正是蒙特卡罗方法大有用武之地的情况.

用蒙特卡罗来定价衍生品通常需要模拟随机过程的路径——这些随机过程是用来描述标的资产的价格、利率、模型参数以及其他与问题相关的因子的演变. 我们从可能路径的总体空间中进行抽样, 而不是简单从 $[0, 1]$ 或 $[0, 1]^d$ 中随机取点. 根据具体问题和模型, 相关的总体空间可能非常大, 甚至是无限的. 一般维数至少应该和模拟中的时间步骤一样多, 而这个维数很容易就足够大, 以使得蒙特卡罗的平方根收敛速度与其他方法相比有竞争力.

在大多数情况下, 并没有什么方法能够克服蒙特卡罗方法中低速的收敛特性. (第 5 章中讨论的准蒙特卡罗方法是一个例外——在适当的条件下, 它们提供了一个更快的收敛速度.) 但是我们可以寻找很好的抽样方法, 以减少在收敛速度中的隐式常量. 这本书的大部分都是有关这方面的范例和一般原理.

本节的其余部分进一步发展一些基本蒙特卡罗方法及其在金融工程中的应用的基本思路. 1.1.2 节阐述了蒙特卡罗方法在两类简单期权合约上的应用. 1.1.3 节提出了一个对模拟效率进行评估的框架.

1.1.2 第一个例子

在讨论蒙特卡罗的一般原理时, 利用一些简单的例子来阐述是非常有用的. 作为第一个解释蒙特卡罗模型的例子, 我们考虑一个以股票为标的的看涨期权, 并计算这个期权收益的期望现值. 在此, 我们还没有涉及期权价格; 关于期权价格和期望折现收益之间的联系将于 1.2.1 节中讨论.

我们令 $S(t)$ 为股票在时刻 t 的价格. 假设即刻为 $t = 0$, 看涨期权赋予了持有者在固定时刻 T 以固定价格 K 购买股票的权利. 如果在时刻 T , 股票价格 $S(T)$ 高于执行价格 K , 那么持有者会执行期权以获得 $S(T) - K$ 的利润; 如果在时刻 T , 股票价格 $S(T)$ 低于执行价格 K , 那么期权将不被执行. (此处的看涨期权是一个欧式期权, 即只能在固定时刻 T 执行; 对应的美式期权允许期权持