大学数学系列教材

线性代数

主编　干晓蓉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

线性代数

Xianxing Daishu

主编　干晓蓉

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书内容包含行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型共六章。每章都配有一定数量的习题，书末附有部分习题答案与提示。全书叙述简明扼要，条理清楚，通俗易懂，方便教学。

本书可作为普通高等院校应用型本科各专业的线性代数教材，也可作为成人教育各专业的线性代数教材或教学参考书。

图书在版编目（C I P）数据

线性代数 / 干晓蓉主编. -- 北京 : 高等教育出版社，2013.3
ISBN 978-7-04-036848-2

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①干… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第008980号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　特约编辑 董达英　封面设计 姜 磊
版式设计 王艳红　插图绘制 尹 莉　责任校对 窦丽娜　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9.5	版　　次	2013年3月第1版
字　　数	170千字	印　　次	2013年3月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	14.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　36848－00

总　　序

在我国改革开放的大潮流中，大学数学教学改革不断深入，本科办学层次亦不断地细化和丰富。适应于各层次各类别的学生学习的大学数学教材相继出版，呈现出百花齐放的可喜态势。近年来，以高职本科和独立学院为代表的应用型本科教育异军突起，招生规模迅猛发展，为我国高等教育的应用型人才培养做出了重要贡献。

以微积分、线性代数、概率论与数理统计为主要内容的大学数学课程，作为理学、工程、农林、经济、管理类专业学生的重要基础课程，担负着向学生传授各自专业所必需的数学基础知识，培养逻辑思维能力，提高数学素养的重要作用。对应用型本科学生而言，更重要的是能够运用这些数学基础知识来理解专业学科的知识，并解决将来工作中的实际问题，为后续的专业学习和未来的工作需要打下坚实的基础。

干晓蓉教授主编的“大学数学系列教材”（含《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》），以教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会颁布的工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求为基础，立足于应用型本科学生的实际情况，结合编写团队多年来在不同层次、不同类别专业上的教学经验，以理工类专业为主，兼顾经济管理类专业。对理论知识的讲解深入浅出，注重基本概念、基本运算、基本应用，尽可能联系实际问题，引导学生学以致用。配置了丰富的典型例题和习题，便于学生巩固基本知识，并有一定数量的提高题，为学生考研做准备。

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点和难点。鼓励不同层次、不同类别、不同模式、不同侧重的各种教学改革，是当前高等教育发展的必然趋势。我相信这套有自身鲜明特色教材的出版，将为应用型本科数学的教材建设添砖加瓦，必将为大学数学课程教学质量和教学效果的提高、为学生的数学素养和应用能力的培养做出积极的贡献。

李继彬

2012 年 7 月 25 日

前　言

本书是为普通高等院校应用型本科专业学生编写的线性代数教材。内容包含行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型共六章。

由于线性代数这门课程的教学时数少，而且有些内容比较抽象，因此在满足应用型本科教学要求的前提下，如何使所编教材少而精，减少抽象性，使学生易学易懂，是本书编写的宗旨。例如在第一章中，没有先复习中学的二、三阶行列式，而是直接定义n阶行列式，再用定义讨论二、三阶行列式的计算，既是为了减少内容重复，节省教学时间，也是为了加强学生对行列式定义的理解；第三章n维向量是比较抽象的一章，为了减少抽象性，在讲每个重要概念时，都举出比较多的例题来帮助读者理解，并且把内容尽量缩减。从第二章开始，突出矩阵的初等变换在线性代数的计算及理论研究中的作用，讨论了矩阵初等变换与矩阵乘法的联系，用初等变换求逆矩阵、计算矩阵的秩。在第三章中，通过矩阵的秩与向量组的秩的联系，将初等变换又用于解决向量组的一些问题。特别在第四章中，对于线性方程组的计算及其理论，完全用初等变换的方法进行讨论。既用初等变换解线性方程组，也用初等变换推导线性方程组解的性质及通解结构的定理，使得线性方程组的相关定理的证明容易理解，同时也减少对向量知识的依赖，使第三章的内容可以大为缩减。

本书第三章第四节向量空间及第六章二次型的内容，不是所有专业都需要，所以打上星号，可以根据各专业的教学要求进行取舍。

本书由于晓蓉教授编写了全书内容，杨斌、李庶民任副主编，参与编写了部分习题解答，参加习题解答编写工作的教师还有：李艳红、孙曙敏、任献花、周旋。全书由于晓蓉统稿定稿。

限于作者水平，书中难免会有不妥之处，敬请读者给予批评、指正。

编　者

2012年10月

目　　录

第一章　行列式 …… 1

第一节　全排列的逆序数 …… 1

第二节　行列式的定义 …… 2

第三节　行列式的性质 …… 6

第四节　行列式按行(列)展开 …… 13

第五节　解线性方程组的克拉默法则 …… 20

习题 1 …… 23

第二章　矩阵 …… 28

第一节　矩阵概念及其运算 …… 28

第二节　分块矩阵 …… 40

第三节　矩阵的初等变换 …… 44

第四节　矩阵的秩 …… 52

习题 2 …… 57

第三章　n 维向量 …… 62

第一节　n 维向量及其运算 …… 62

第二节　向量组的线性相关和线性无关 …… 63

第三节　向量组的秩 …… 66

*第四节　向量空间 …… 75

习题 3 …… 78

第四章　线性方程组 …… 82

第一节　线性方程组概念 …… 82

第二节　用初等变换解线性方程组 …… 83

第三节　线性方程组有解的条件 …… 85

第四节　线性方程组通解的结构 …… 94

习题 4 …… 103

第五章　矩阵的特征值和特征向量 …… 106

第一节　向量的内积、长度及正交性 …… 106

第二节　矩阵的特征值和特征向量 …… 110

第三节　相似矩阵 …… 114

第四节　实对称矩阵的对角化 …… 119

习题 5 …… 123
*第六章　二次型 …… 126
第一节　二次型及其标准形 …… 126
第二节　用配方法将二次型化为标准形 …… 131
第三节　正定二次型 …… 133
习题 6 …… 135
部分习题答案与提示 …… 137

第一章　行　列　式

本章主要内容是行列式的定义、性质及计算方法，此外还介绍了用行列式解线性方程组的克拉默法则.

第一节　全排列的逆序数

考虑由 $1,2,3,\cdots,n$ 这 n 个数排成的不重复数字的全排列，不同的全排列共有 $n!$ 个. 以后对这种全排列简称排列.

例如，由 1，2，3 这三个数有以下 $3!=6$ 个排列：123，132，213，231，312，321.

定义　设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，考察其中任意两个数，如果大的数排在小的数之前，就说该排列有一个逆序. 所有逆序的总数称为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1　计算由 1，2，3 排成的六个排列的逆序数.

解　排列 123 没有逆序，$\tau(123)=0$.

排列 132 中，仅有 3 在 2 之前一个逆序，$\tau(132)=1$.

排列 213 中，仅有 2 在 1 之前一个逆序，$\tau(213)=1$.

排列 231 中，2 在 1 之前，3 在 1 前，$\tau(231)=1+1=2$.

排列 312 中，3 在 1，2 之前，$\tau(312)=2$.

排列 321 中，3 在 2，1 之前，又 2 在 1 前，$\tau(321)=2+1=3$.

上述六个排列中 132，213，321 为奇排列，123，231，312 为偶排列.

例 2　试判别由 1，2，3，4，5 排成的两个排列 42315 及 54321 的奇偶性.

解　$\tau(42315)=3+1+1=5$，排列 42315 为奇排列.

$\tau(54321)=4+3+2+1=10$，排列 54321 为偶排列.

性质 1　交换排列中的两个数，排列的奇偶性改变.

证　先讨论交换相邻两数的情形. 设排列为

$$p_1\cdots p_s\ a\ b\ p_{s+1}\cdots p_m. \tag{1}$$

交换 a 与 b，得排列

$$p_1\cdots p_s\ b\ a\ p_{s+1}\cdots p_m. \tag{2}$$

任意一个 p_i 与 a 或 b 的大小关系在（1）与（2）两个排列中是一样的. 所以当 $a>b$ 时，排列（2）的逆序数比排列（1）的逆序数减少 1；当 $a<b$ 时，排列（2）的逆序数比排列（1）的逆序数增加 1. 因此，当（1）为奇排列时，（2）为偶排列；当

(1)为偶排列时,(2)为奇排列,即排列(1)与(2)有不同的奇偶性.

再讨论交换不相邻两个数的情形.设排列为

$$p_1\cdots p_s\ a\ c_1\cdots c_k\ b\ p_{s+1}\cdots p_m. \tag{3}$$

交换 a 与 b,得排列

$$p_1\cdots p_s\ b\ c_1\cdots c_k\ a\ p_{s+1}\cdots p_m. \tag{4}$$

我们也可以对排列(3)中的 a 依次与 $c_1,\cdots,c_k$ 进行 k 次相邻的交换,得到排列

$$p_1\cdots p_s\ c_1\cdots c_k\ a\ b\ p_{s+1}\cdots p_m,$$

再对这个排列中的 b 依次与 $a,c_k,\cdots,c_1$ 进行 $k+1$ 次相邻的交换,就得到排列(4).因此,经过 $2k+1$(奇数)次相邻的交换可以由(3)得到(4).由前面已证明的结论可知,进行奇数次相邻的交换,排列的奇偶性要改变,所以排列(3)与排列(4)有不同的奇偶性.(证毕)

性质 2 由 $1,2,\cdots,n(n>1)$ 所作的 $n!$ 个排列中,奇排列与偶排列各占一半.

证 设奇排列有 s 个,偶排列有 t 个.对每一个奇排列都交换 1 与 2,就得到 s 个互不相同的偶排列,因此 $t\geqslant s$.同理可证 $s\geqslant t$,故 $s=t$.(证毕)

第二节 行列式的定义

将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 个横行及 n 个竖列的方形数表,两边再用竖线围起来,就是 n 阶行列式的记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\text{简记为}\ |a_{ij}|,$$

其中每个数 a_{ij}称为行列式的元素.它有两个下标,第一个下标表示该元素所在的行数,第二个下标表示所在的列数,a_{ij}就是第 i 行 j 列的元素.行列式的行数是从上到下依次为第 1 行,第 2 行,$\cdots$,第 n 行.列数是从左到右依次为第 1 列,第 2 列,$\cdots$,第 n 列.行列式有两条对角线,由左上到右下那条对角线称为主对角线,在主对角线上的元素为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$.由右上到左下的对角线称为副对角线.

n 阶行列式是由 $n!$ 个数的代数和组成的一个数,其定义如下:

定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是由行列式 $|a_{ij}|$ 中 n 个不同行不同列元素按行标的自然顺序排列的乘积，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 $n!$ 个排列求和，共有 $n!$ 项．

上述定义说明 n 阶行列式是含有 $n!$ 项的代数和，其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积，当把这 n 个元素按行标从小到大的顺序排列时，其列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 若为偶数，这项冠以"＋"号，若为奇数，这项冠以"－"号（不包括元素本身的符号）．因为当 $n>1$ 时，全部 $n!$ 个排列中，奇、偶排列各占一半．所以，当 $n>1$ 时，冠以"＋"号与冠以"－"号的项数也是各占一半．

根据行列式的定义，一、二、三阶行列式可以计算如下：

一阶行列式：

$$|a_{11}| = (-1)^{\tau(1)}a_{11} = (-1)^0 a_{11} = a_{11},$$

即一阶行列式的值等于该元素．

二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}$$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

即二阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积．

三阶行列式：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\quad (-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\quad (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

如果在三阶行列式中，将冠以"＋"号项的三个数用实线加以连接，将冠以"－"号项的三个数用虚线加以连接，就可以得到如图 1.1 所示的图形．

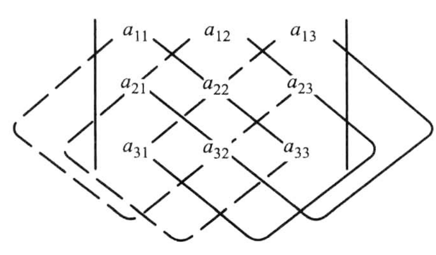

图 1.1

利用图 1.1，很容易写出三阶行列式的六项代数和．

例 1 计算以下二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = 4-6 = -2$;

(2) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b) - b(-b) = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$.

例 2 计算以下三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

解 (1) 根据图 1.1,得

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3\times 0\times 4 + 2\times 5\times 2 + (-1)\times 1\times(-3) - (-1)\times 0\times 2 - 2\times 1\times 4 - 3\times 5\times(-3)$$
$$= 0 + 20 + 3 - 0 - 8 + 45 = 60.$$

(2) 根据图 1.1,得

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x^2 + 0 + 0 - x^2 - 0 - 4x = 2x^2 - 4x.$$

四阶行列式有 4! = 24 项,要写出并计算这 24 个乘积的代数和是很麻烦的.对于三阶以上的高阶行列式,一般要利用下节要介绍的行列式的性质进行计算.不过,像下面例 3 的几个特殊的高阶行列式,却可以用定义直接得到它的值.

例 3 利用行列式的定义计算下列行列式:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 行列式 D_1 在主对角线上方的元素全为 0,这种行列式称为下三角形行列式.根据定义,行列式是由不同行不同列元素的乘积的代数和,因为含 0 元素的项必为 0,只要考察不含 0 元素的项.设这种项为:

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

因为 D_1 的第一行除了 a_{11} 之外为 0,所以必有 $a_{1p_1}=a_{11}$, D_1 的第二行除了 a_{21}, a_{22} 之外都为 0,但 a_{21} 与 a_{11} 位于同一列,与 a_{11} 不同列的只有 a_{22},所以 $a_{2p_2}=a_{22}$. 依此类推,可知 D_1 中不含 0 元素的项只有如下一项:

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

因此, $D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

行列式 D_2 的主对角线下方的元素都是 0,这种行列式称为上三角形行列式. 依次讨论第 1 列,第 2 列,…,第 n 列,可知 D_2 中不含 0 元素的项与 D_1 相同,所以

$$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角形与下三角形行列式统称为三角形行列式.

行列式 D_3 中,除对角线上的元素之外,其他元素都是 0,这种行列式称为对角行列式,它是三角形行列式的特例,因此

$$D_3=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

以上说明:**三角形行列式及对角行列式的值都等于主对角线上元素的乘积**.

行列式 D_4 在副对角线上方的元素为 0,它不是三角形行列式. 类似于前面的讨论可知 D_4 中不含 0 元素的项只有 $(-1)^{\tau(n,n-1\cdots 2\ 1)}\alpha_{1n}\alpha_{2,n-1}\cdots\alpha_{n-1,2}\alpha_{n1}$,因为

$$\tau(n,n-1\ \cdots\ 2\ 1)=(n-1)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以

$$D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

即行列式 D_4 等于副对角线上元素的乘积再乘以 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

例 4 求 x 的值,使

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3-x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix}=0.$$

解 等式左边是上三角形行列式,它的值等于 $(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)$,由

$$(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)=0,$$

得 $x=1,2,3,4$.

下面的定理是对行列式定义的另一种表述法.

定理 对于上述行列式定义中的任意一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

如果交换 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的因子顺序若干次,变为乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,则

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

换句话说,如果行列式各项的乘积 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的因子不是按行标从小到大的自然顺序排列,而是任意排列成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,则这项的正负符号应为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

证　因为 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,所以只需证明

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

设 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的因子经过 k 次交换,成为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,则行标排列 $1\ 2\cdots n$ 可以经过 k 次交换,成为排列 $i_1i_2\cdots i_n$. 列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 k 次交换,成为排列 $j_1j_2\cdots j_n$. 若 k 为奇数,则行标排列与列标排列都同时改变奇偶性,因而

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=-(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)},\quad (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)};$$

若 k 为偶数,则行标排列与列标排列的奇偶性都不变,因而有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)},\quad (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)};$$

不论 k 是哪一种情况,都有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

因为 $\tau(12\cdots n)=0$,所以要证的等式成立.(证毕)

第三节　行列式的性质

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

将行列式 D 的第 1 行,第 2 行,…,第 n 行,依次改写成第 1 列,第 2 列,…,第 n 列,得到行列式

$$D^{\mathrm T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

$D^{\mathrm T}$ 称为 D 的转置行列式. D 中第 i 行 j 列的元素 a_{ij},在 $D^{\mathrm T}$ 中位于第 j 行 i 列的位置上.

性质 1　行列式 D 与其转置行列式 $D^{\mathrm T}$ 相等.

以三阶行列式为例,有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证　D 中任意一项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $a_{1p_2}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 也是 D^{T} 中不同行不同列元素的乘积，但在 D^{T} 中，其行标排列为 $p_1p_2\cdots p_n$，列标排列则为 $12\cdots n$，根据上节定理，在 D^{T} 中，这个乘积应冠以符号

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)},$$

这就证明 D 中每一项也是 D^{T} 中的一项，D 中不同的项在 D^{T} 中也是不同的，并且 D 与 D^{T} 的项数一样，都是 $n!$，因此有 $D=D^{\mathrm{T}}$.（证毕）

由性质 1 可知，行列式中的行与列具有同等地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也必定成立，反之也一样. 因此，以下的行列式性质，我们只对行的情形加以证明，将行列式转置就可得到列的相应性质，不再说明.

性质 2　交换行列式的两行(列)，行列式变号.

以三阶行列式为例，交换第 1,2 两行，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证　设

$$D=\begin{array}{|cccc|l} \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}.$$

交换第 i 行与第 j 行，得

$$D_1=\begin{array}{|cccc|l} \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array},$$

其中 D 与 D_1 中未写出的行的元素都对应相同.

根据行列式定义，D 中任一项为

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$ 也是 D_1 中不同行不同列元素的乘积，其列标排列没有

变化,但行标排列为

$$1\cdots j\cdots i\cdots n,$$

它是由自然顺序 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 交换 i,j 得到的,奇偶性改变,故有

$$(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)}=-(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots j\cdots n)}=-(-1)^0=-1.$$

根据上节定理,乘积 $a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$ 在 D_1 中应冠以符号

$$(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)},$$

与在 D 中的符号相反,这说明将 D 中每一项变号,就得到 D_1 的所有项,故有 $D=-D_1$.(证毕)

推论　若行列式中有两行(列)相同,则此行列式等于零.

证　若行列式 D 中有两行相同,则交换相同的这两行后,得到的行列式仍是 D,但由性质 2,应有 $D=-D$,所以 $D=0$.(证毕)

例如

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\3&-1&5\\1&0&2\end{vmatrix}=0\quad(\text{第 1,3 两行相同}),$$

$$\begin{vmatrix}2&2&5\\1&1&7\\-3&-3&8\end{vmatrix}=0\quad(\text{第 1,2 两列相同}).$$

性质 3　行列式某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式,即有

$$\begin{vmatrix}\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix}.$$

两个行列式中除第 i 行之外,未写出的元素都对应相同.(这性质也可以叙述成:行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外面.)

证　根据行列式定义,有

$$\begin{aligned}\text{等式左边}&=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}\\&=k\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=\text{等式右边}.\ (\text{证毕})\end{aligned}$$

性质 4　行列式中如有两行(列)成比例,则此行列式等于零,即

$$D=\begin{vmatrix}\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{j1}&ka_{j2}&\cdots&ka_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix}=0\quad(\text{设第 } i \text{ 行与第 } j \text{ 行成比例}).$$

证　根据性质3,将 D 的第 i 行提出公因子 k 以后,行列式的第 i 行与第 j 行相同,由性质2的推论得 $D=0$.(证毕)

例如,$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0$.　(第1,2两列成比例)

性质5　若行列式的某行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}+b_{i1}) & (a_{i2}+b_{i2}) & \cdots & (a_{in}+b_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　记等式右边两个行列式为 D_1,D_2,则根据行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= D_1+D_2.\text{(证毕)} \end{aligned}$$

性质6　将行列式的某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=D_1.$$

D 与 D_1 中未写出的元素对应相同.

证　由性质5及性质4,有