高考能力要点与自测题

GAOKAONENGLIYAODIANYUZICETI

高考能力考查研究组 编

数学

北京出版社

高考能力要点与自测题

数学

高考能力考查研究组 编

北京出版社

（京）新登字200号

高考能力要点与自测题·数学
GAOKAO NENGLI YAODIAN YU ZICETI·SHUXUE
高考能力考查研究组 编
*
北 京 出 版 社 出 版
（北京北三环中路6号）
邮政编码：100011
北 京 出 版 社 总 发 行
新 华 书 店 经 销
北京朝阳展望印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 8.375印张 182千字
1994年2月第1版 1994年2月第1次印刷
印数 1—7500
ISBN 7-200-02239-X/G·674
定 价：5.20元

出版说明

国家教委办公厅在1992年印发了《1993年试行国家教委高考新科目组考试方案》的通知。通知中说："在改革科目设置的同时，考试内容和形式也将相应改革：在考查知识的基础上，注重考查能力。"这里所说的能力，是指以文化考试为主，考查考生运用已有的知识，去解决未知问题的能力。为了贯彻国家教委这个通知的精神，考试中心聘请专家进行了"能力考试"专题研究。几年来在总结我国传统考试的经验基础上，吸收了国外考试的优秀成果，进行了大胆的试验，并且编写了高考各科《考试说明》，分学科具体规定了所考查的知识和能力。近几年高考命题工作，也有意识地注重了能力的考查。然而，《考试说明》毕竟是一个纲要，不可能把各种能力讲得具体、深刻、透彻，特别是广大考生和教师对各科试题中要考查哪些能力，如何考查能力，如何培养和准备高考能力考查感到茫然。针对这种情况本书按下列四个方面进行编写：

第一，对各科高考试题进行能力因素分析，阐明各科高考中将要考查哪些能力，对每种能力有哪些具体要求。

第二，根据新修订的《考试说明》，说明在历届高考中如何通过试题体现上述能力考查的要求。

第三，向应考学生介绍如何提高应试能力，向教师介绍在教学工作中如何培养学生学科的能力。

第四，按照各科教材的内容和复习顺序，讲解具有代表

性的能力考查例题，和足够的高考能力自测题，供学生和教师使用，所有自测题均附有答案、提示。

由于抓住了当前高考的关键问题，再加上编写者均为高考有多年研究的特级教师和高级教师，因此，本丛书具有权威性、实用性和科学性，在同类高考读物中独具特色。

丛书共分九个分册，即语文、政治、数学、英语、物理、化学、地理、历史、生物。

本丛书主编为王大赫，副主编为李国辰。本分册编写者为李松文、高秀琴、李坤。

1993年10月

目 录

第一章 数学科高考能力要求概说

国家教委办公厅于1992年12月31日，以教试厅〔1992〕3号文件，发出了《1993年试行国家教委新高考科目组考试方案》的通知.其中谈到新高考的基本指导思想和原则，即“在改革科目设置的同时，考试内容和形式也将相应改革；在考查知识的基础上，注重考查能力；在择优的前提下，调整试题的难易度；实现考试的标准化。以期逐步做到既有利于高考选拔合格新生，又有利于中学教学”.

新高考的指导思想和原则，总结了多年来的老高考的经验，规定了由老高考向新高考过渡应遵循的基本原则，特别是“在考查知识的基础上，注重考查能力”的原则，是多年来高考的基本经验和做法.

《数学科考试说明》中规定：“数学科考试旨在测试中学数学基础知识、基本技能、基本方法，运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用所学数学知识和方法，分析问题和解决问题的能力.”

考试要求分做四个不同层次，这四个层次由低到高，依次为了解、理解、掌握、灵活运用和综合运用.

数学考试的能力要求是由数学科特点和高考的性质决定的.数学由于其逻辑的严密性，结论的确定性和应用的广泛性的特点，在培养学生能力的过程中发挥着重要作用，被称为锻炼思维的“体操”.因此数学科考试应力图发挥学科的特点，测试学生的能力水平.同时高考是选拔性考试，注重预

测效度，主要考查学生的潜能，因此数学科考试应在考查基础知识，基本方法的同时，运用数学材料考查考生的各种能力．

数学学习中，运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力是学生学习的基础，是对学生数学认知特点的概括，是在数学活动中表现和培养的．数学高考中，对数学能力注意分析它的内涵，从不同侧面不同层次来考查数学能力．下面将各种能力的考查要求概述如下．

一、运算能力

数学高考要求考生不仅会根据法则、公式正确地进行运算，而且理解它的算理．能够根据题目条件寻求合理、简捷的运算途径．运算熟练、迅速、准确．

所谓运算，是在运算律指导下对具体式子进行变形的演绎过程．数学中的运算能力有两个显著的特点是：一是运算能力的综合性，即运算能力不可能独立地存在和发展，而是与记忆能力、理解能力、推理能力、表达能力以及空间想象能力及其它能力互相渗透的、学生不熟记各种数据和公式，就无法正确、迅速地进行各种运算；如果对数学概念或基础知识理解不透彻，或根本不理解，运算时就必然带有盲目性，学生不善于推理，就无法选取合理的运算方法，甚至对显然不合理的运算结果也觉察不出来；二是运算能力结构的层次性，即运算能力的发展总是从简单到复杂，从低级到高级，从具体到抽象，有层次地发展起来的．因此运算时要随着知识领域的扩大和加深，运算要选择简捷的途径．

运算能力是一项基本能力，在高考数学试题中有半数以上的题目需要运算、运算不仅是求出结果，还可辅助证明．在高考中运算包括数值演算和字母推演．准确是运算的基本

要求，在填空题中，一步算错，而造成整体失分，会做而做不对，计算出错和根本不会做是等同的，都是零分；在解答题中考生的思路和做法都是正确的，只是在计算时某一步出错，来改变该题的内容和难度，后继部分最多给应得分的一半。运算中的简捷、合理是对考生思维深刻性、灵活性的考查，而熟练、迅速则是对思维敏捷性的考查.

在高考中，考查运算能力，一般不是过多增大运算量，而是适当控制每题的计算量，增加题目数量，其中一些题目需要运用一定技巧才能完成. 而且注意精确与迅速、简捷与熟练相结合，注重考查算理.

例1 不等式$|\sqrt{x-2}-3|<1$的解集是(　)

(A)$\{x|5<x<16\}$，　　(B)$\{x|6<x<18\}$，

(C)$\{x|7<x<20\}$，　　(D)$\{x|8<x<22\}$.

本题是1992年的新高考的第一(8)题，难度为0.96、答案选(B).

分析：本题涉及绝对值不等式和无理不等式，不等式的等价性.

$$|\sqrt{x-2}-3|<1\Longleftrightarrow -1<\sqrt{x-2}-3<1$$
$$\Longleftrightarrow 2<\sqrt{x-2}<4\Longleftrightarrow 4<x-2<16\Longleftrightarrow 6<x<18.$$

故得(B).

例2 $(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$的展开式中，$x^2$的系数等于____.

答案：-20.

本题是1990年全国高考题理科第二(17)题，难度为0.37.

分析：本题可应用二项式定理展开各式，求出各式中的x^2的系数，相加即可.

另外，已知代数式$(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$组成公比为$-(x-1)$的等比数列，求和后得到

$$\frac{1}{x}[(x-1)+(x-1)^6].$$

因为分母是x，为了得到含x^2的项，必须在分子中求出含x^3的项，这样的项只存在于$(x-1)^6$的展开式.则x^2项的系数为$C_6^3(1)^3=-20$.

本题运算并不繁琐，也不要很高的技巧，只是一些数值运算，但有半数以上的考生不能得出正确结果，说明考生虽然明了算理，但运算准确性不高.

例3 已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，那么$a_1+a_2+\cdots+a_7=$____.

答案$\underline{-2}$.

本题是1989年全国高考试题理科二(16)题.难度为0.51.

分析：本题不少考生得出的结果是令$x=1$，得出-1的结果.

这里没有注意到题目要求的是$a_1+a_2+\cdots+a_7$，

若令$x=1$，求出的是$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7$的值为-1. 这里需要求出a_0来才行.

事实上，令$x=0$，得$a_0=1$.

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_7=-1-1=-2.$

这里出错的一个很重要的原因是审题不细造成的.

例4 已知$f(x)=8+2x-x^2$，如果$g(x)=f(2-x^2)$，那么$g(x)$(　　)

(A)在区间$(-2,\ 0)$上是增函数.

(B)在区间$(0,\ 2)$上是增函数.

(C)在区间$(-1,\ 0)$上是减函数.

(D)在区间(0，1)上是减函数.

本题是1989年全国高考理工、文史考题. 理科难度为0.37，文科难度为0.29.

分析：本题首先通过计算求出$g(x)$的表达式，即$g(x)=+(2-x^2)=8+2(2-x^2)-(2-x^2)^2=-x^4+2x^2+8=-(x^2-1)^2+9$.

判断$g(x)$的单调性可根据选择项提供的信息，计算出$g(-2)=g(2)=0$，$g(-1)=g(1)=9$，$g(0)=8$，由此可看出$g(x)$在区间$(-1,0)$上是减函数. 选(C).

另一解法就是通过单调函数定义来解.

$$g(x_1)-g(x_2)=(-x_1^4+2x_1^2+8)-(-x_2^4+2x_2^2+8)$$
$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2)[2-(x_1^2+x_2^2)].$$

当$x_1<x_2<-1$时，$g(x_1)-g(x_2)<0$，$g(x)$为增函数；

当$-1<x_1<x_2<0$时，$g(x_1)-g(x_2)>0$，$g(x)$为减函数；

当$0\leqslant x_1<x_2<1$时，$g(x_1)-g(x_2)<0$，$g(x)$为增函数；

当$1\leqslant x_1<x_2$时，$g(x_1)-g(x_2)>0$，$g(x)$为减函数. 因此选(C).

本题是1989年高考试题中有相当难度的题目，错误率比较高，主要原因是计算之后，不能运用计算的结果进行推理，因此得不出正确的结论.

例5 A、B、C、D、E五人并排站成一排，如果B必须站在A的右边(A、B可以不相邻)，那么不同的排法共有(　　)

(A)24种　(B)60种　(C)90种　(D)120种

本题是1990年全国高考理工一(13)题，难度为0.77.

分析：本题将计算和逻辑推理相结合，考查排列的概

念，解答本题时，可以逐步排定A然后计算B在A右边的不同排法，相加即可，即$P_4^4+P_3^1P_3^3+P_3^2P_2^2+P_3^3=60$. ∴选B.

另外，也可这样思考：因为在排列过程中，或在A的右边，或在A的左边，两种情况的排法数是等同的，所以可用全排列数除以2，即得答案$\frac{1}{2}P_5^5=60$.

例6 91^{92}除以100的余数是____.

本题是1992年新高考试题二(22)题，难度为0.22.

分析：本题是运用二项式定理进行计算，需要有一定的运算过程.要有正确的算理.

$$91^{92}=(100-9)^{92}=C_{92}^0100^{92}-C_{92}^1100^{91}\cdot 9+C_{92}^2100^{90}\cdot 9^2-\cdots-C_{92}^{91}100\cdot 9^{91}+C_{92}^{92}9^{92}.$$

只有最后一项不能被100整除，

又 $9^{92}=(10-1)^{92}=C_{92}^010^{92}-C_{92}^110^{91}+\cdots+C_{92}^{90}10^2-C_{92}^{91}10+C_{92}^{92}$.

最后需由$-C_{92}^{91}10+C_{92}^{92}$来决定

∵ $-C_{92}^{91}10+C_{92}^{92}=-920+1=-1000+81$.

∴ 91^{92}除以100的余数是81.

不少考生答案为-19，计算过程是正确的，但最后答案错了、主要是对余数的概念不清楚，造成整体失分. 因此正确的运算首先来源于概念清楚.

但是，上面的解法是比较繁的，若能灵活运用二项式定理，解题就比较简捷.即由

$$91^{92}=(90+1)^{92}=C_{92}^090^{92}+C_{92}^190^{91}+\cdots+C_{92}^{90}90^2+C_{92}^{91}90+C_{92}^{92}$$

只有最后两项不能被100整除，故只要计算最后两项被100除的余数即可.

因$C_{92}^{91}90+C_{92}^{92}=92\times90+1=8281$.得余数81.

例7 体积相等的正方体、球、等边圆柱(即底面直径与母线相等的圆柱)的全面积分别为 S_1、S_2、S_3，那么它们的大小关系为(　　)

(A)$S_1<S_2<S_3$.　　(B)$S_1<S_3<S_2$.

(C)$S_2<S_3<S_1$.　　(D)$S_2<S_1<S_3$.

本题是1991年新高考试题一(18)题、难度为0.56.

分析：本题由体积的计算，来求全面积的计算，涉及的公式比较多，有六个公式，并进行比较，比较时需用一个量做标准.

设正方体的棱长为 a，球的半径为 r_1，等边圆柱的底面半径为r_2，故有

$$a^3=\frac{4}{3}\pi r_1^3=2\pi r_2^3.$$

将r_1、r_2都用a表示，来计算S_1、S_2、S_3，从而得 $S_2<S_3<S_1$，故选C.

例8 一动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切，则动圆圆心的轨迹为(　　)

(A)圆.　　(B)椭圆.

(C)双曲线的一支.　　(D)抛物线.

本题是1993年全国高考试题,新高考试题都采用的试题.

分析：该题有一定的灵活性，不少学生是用求轨迹的一般方法做的：

设动圆圆心的坐标为$P(x,y)$,将已知两圆 为$x^2+y^2=1$.$(x-4)^2+y^2=4$，则

$\sqrt{x^2+y^2}-1=\sqrt{(x-4)^2+y^2}-2$，然后化简来求，这样计算是比较繁琐的.

若是灵活运用概念，利用双曲线的定义，即动点$P(x,y)$到两个定点$(0,0)$和$(4,0)$的距离之差为一个常数1，于是可判定是双曲线的一支．故可很快得出结论为C．

这就要求考生要灵活运用概念，比较各种解法，去选择合理的简捷的方法来解．

例9 直角梯形的一个内角为45°，下底长为上底长的$\frac{3}{2}$，这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为$(5+\sqrt{2})\pi$，则旋转体的体积为

(A) 2π． (B) $\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$．

(C) $\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$． (D) $\frac{7}{3}\pi$．

本题是1993年新高考试题一(14)题．

分析：这是一道计算量比较大的选择题，需通过较为复杂的计算，最后得出答案，实际上是一道大题．

计算过程中，所涉及的旋转体的分割，全面积的计算，体积的计算．

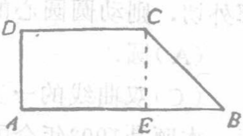
图 1-1

如图1-1，作$CE\perp AB$于E，设$BE=x$，

知$\angle CBE=45°$，$\therefore CE=x$，$AE=2x$，$BC=\sqrt{2}x$．

$$S_{全}=\pi x\cdot\sqrt{2}x+2\pi x\cdot 2x+\pi x^2$$
$$=\pi(\sqrt{2}+5)x^2=(\sqrt{2}+5)\pi,$$

$\therefore$ $x^2=1$，取正得$x=1$．

$\therefore$ $V_{旋转体}=V_{圆柱}+V_{圆锥}$

$$=\pi x^2\cdot 2x+\frac{1}{3}\pi x^2\cdot x$$

$$=2\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi.$$

∴ 答案应选D.

例10 已知a_1，a_2，…，a_8为各项都大于零的等比数列，公比$q\neq 1$，则

(A)$a_1+a_8>a_4+a_5$，　　(B)$a_1+a_8<a_4+a_5$；

(C)$a_1+a_8=a_4+a_5$

(D)a_1+a_8和a_4+a_5的大小关系不能由已知条件确定.

本题是1993年新高考试题一(15)题.

分析：本题实际上是利用等比数列的概念，将a_1+a_8和a_4+a_5进行文字演算，运用不等式证明中的比较法，进行比较，来确定

$$(a_1+a_8)-(a_4+a_5)$$

的符号.

在比较过程中，需要有一定的恒等变形的演绎过程.

$$\begin{aligned}&(a_1+a_8)-(a_4+a_5)\\&=a_1+a_1q^7-a_1q^3-a_1q^4\\&=a_1(1+q^7-q^3-q^4)\\&=a_1[(1-q^3)+q^4(q^3-1)]\\&=a_1(1-q^3)(1-q^4).\end{aligned}$$

∵ $q\neq 1$，　$a_1>0$.　$a_1q^{n-1}>0$.

∴ $q>0$，$1-q^3$与$1-q^4$同号.

∴ $a_1(1-q^3)(1-q^4)>0$，

∴ $a_1+a_8>a_4+a_5$，故选A.

例11 已知复数$z=1+i$，求复数$\frac{z^2-3z+6}{z+1}$的模和辐角的主值.

本题是1991年全国高考试题三(22)题，难度为0.72.

分析：本题是复数计算中的一般题目，比较容易. 但由于不少学生对复数的代数形式的加、减、乘、除、乘方的一般运算计算不准确，而出现错误，也有的考生把简单问题复杂化，将代数形式化成三角形式进行计算.

解：$\frac{z^2-3z+6}{z+1}=\frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1}$

$$=\frac{3-i}{2+i}=1-i.$$

$1-i$的模$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

因为$1-i$对应的点在第四象限内，且辐角的正切 $\mathrm{tg}\theta=-1$，所以辐角的主值$\theta=\frac{7}{4}\pi$.

例12 已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，求$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$的值.

本题是1990年全国高考试题第三(22)题，理科、文科均用，理科难度为0.63，文科难度为0.48.

分析：本题涉及比较多的三角公式，在运用已知条件和欲求的结果进行变形时，就需选择变形的思路，确定较为简便的方法.

有的考生将已知两式平方求和，平方求差，再将两式乘积求解，就比较复杂，涉及的三角公式比较多，还有一些数值运算，运算量大且容易出错. 如果利用和差化积，再利用倍