21世纪

大学课程辅导丛书

# 概率论与数理统计典型题

（第2版）

解法 · 技巧 · 注释

龚冬保　王宁

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪
大学课程辅导丛书

# 概率论与数理统计典型题

（第2版）

解法·技巧·注释

龚冬保　王宁

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
·西安·

## 内 容 提 要

作者根据多年的教学经验，收集了300多道概率统计的典型题，所选的题目旨在启发读者学习概率统计的兴趣，提高解题能力。为了突出一些典型方法和揭示一些习题的背景，本书对大多数题目都作了注释。

本书可作为大学生，专科生等学习概率统计的参考书，也可供报考硕士研究生的考生使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计典型题　解法·技巧·注释(第2版) /龚冬保，王宁编著 .—西安：西安交通大学出版社，2005.9
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1246-1

Ⅰ.概...　Ⅱ.①龚...②王...　Ⅲ.①概率论-高等学校-解题②数理统计-高等学校-解题　Ⅳ.021-44
中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21805号

| | |
|---|---|
| 书　名 | 概率论与数理统计典型题　解法·技巧·注释(第2版) |
| 编　著 | 龚冬保　王　宁 |
| 出版发行 | 西安交通大学出版社 |
| 地　址 | 西安市兴庆南路25号(邮编：710049) |
| 电　话 | (029)82668357　82667874(发行部) |
| | (029)82668315　82669096(总编办) |
| 印　刷 | 西安正华印刷科技有限公司 |
| 字　数 | 353千字 |
| 开　本 | 787mm×1 092mm　1/16 |
| 印　张 | 14.5 |
| 版　次 | 2005年9月第2版　2005年9月第1次印刷 |
| 印　数 | 000 1~5 000 |
| 书　号 | ISBN 7-5605-1246-1/O·155 |
| 定　价 | 16.00元 |

# 第 2 版前言

本书第 1 版出版以来，受到了广大读者的欢迎，编者收到了不少建议和意见。我们表示衷心感谢。根据近几年来教学和教学改革的要求，参考全国硕士研究生入学统一考试的“数学考试大纲”的调整变化。我们对本书内容作了较大修改，推动这个新的版本：

1. 改变第 1 版将客观题单独为一节的体系，本版将客观题分散到各节之中，使各章题目的编排更能适应知识点之间的逻辑顺序，便于读者阅读。

2. 结合教学实际，参考近年考研情况，删去了第 1 版中约 10%的例题，增加了约 20%新的例题，使本书的例题更具有典型性。

3. 对第 1 版中的错误与疏漏，做了认真的检查与修改。

广大读者的欢迎与关怀，是对我们的激励与鞭策，我们尽最大的努力，将本书改好。再一次诚恳地欢迎多提意见和建议。

编者

2005 年 8 月于西安交大

# 第 1 版前言

我们这本书与《高等数学典型题·解法·技巧·注释》在编写风格上是一致的，力求讲清解题的思路，旁注要领，画龙点睛。希望本书能帮助读者加深对“概率统计”课程基本内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以培养分析问题和解决问题的能力，由于我们选的是“典型题”，读者在阅读本书时，一定要边看书、边自行推导，以掌握我们介绍的方法与技巧，并用以去解答更多的题。为了检验解题能力，我们在每一章后附有“独立作业”。

本书可作为“概率统计学”的教学参考书，对报考硕士研究生的考生也有参考价值。

本书由王宁、龚冬保编写，龚冬保统稿。我们希望本书对读者有所启发，受到广大读者的喜爱。但限于作者水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者衷心感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编者

2000 年 2 月

# 目　　录

# 第 1 章　随机事件与概率

## 1.1　随机事件的运算及其概率的性质

**1-1**　设 $A$、$B$、$C$ 是三个随机事件，则和事件 $A\bar{B}$ 互不相容的事件是(　　).

(A) $BC-A$　　　　(B) $\bar{B}C\cup A$

(C) $\overline{\bar{A}\cup B\cup C}$　　　　(D) $\overline{A\cap\bar{B}\cap C}$

**解**　因为 $BC-A=\bar{A}BC$，$A$ 与 $\bar{A}$ 互不相容，故 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}BC$ 互不相容.从而选(A).

由于随机事件的运算与集合相同，因此对集合的运算要熟悉。

**1-2**　以 $A$ 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 为(　　).

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

**解**　设 $B$ 表示“甲种产品畅销”，$C$ 表示“乙种产品畅销”，则 $A=B\bar{C}$.于是 $\bar{A}=\overline{B\bar{C}}=\bar{B}\cup C$，即就是 $\bar{A}$ 表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”，故选(D).

将 $A$ 用其它事件表示之后，再运用事件之间的关系，计算出 $\bar{A}$，从而可很容易地选出答案.

**1-3**　设 $A$、$B$ 为两个随机事件，若 $P(AB)=0$，则下列命题中正确的是(　　).

(A) $A$ 和 $B$ 互不相容(互斥)

(B) $AB$ 是不可能事件

(C) $AB$ 未必是不可能事件

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

**解**　若 $P(AB)=0$，则 $AB$ 未必是不可能事件.例如，随机地向 $[0,1]$ 区间投点，以 $\xi$ 表示点的坐标，取 $A=B=\{\xi=\frac{1}{2}\}$，则事件 $A$、$B$ 均为可能发生的，且 $AB=\{\xi=\frac{1}{2}\}$.由几何概率知：$P(AB)=0$，故选(C).此例同时说明 $A$ 与 $B$ 是相容的，且 $AB\neq\varnothing$，所以(A)、(B)是不对

正确理解互不相容、不可能事件及零概率事件之间的联系与区别，是解答本题的关键.

请参考本题对上 2 题中不正确的选项作排除的练习.

的.为了说明(D)是错误的,我们给出如下的例子:掷一枚骰子,设 $A$ 表示“出现 2 点”,$B$ 表示“出现 6 点”,则 $AB=\varnothing$,从而 $P(AB)=0$.但是,$P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$.

**1-4** 设 $A$ 和 $B$ 是任意两个概率不为零的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容　　(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　(D) $P(A-B)=P(A)$

**解**　因 $A$ 与 $B$ 互不相容,故 $AB=\varnothing$,而 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-0=P(A)$,所以(D)正确.(A)显然不正确.由 $P(AB)=P(\varnothing)=0$,而 $P(A)P(B)\neq 0$,故(C)不对.为了说明(B)是不正确的,举例如下:

随机地向[0,1]区间投点,以 $\xi$ 表示落点的坐标,设事件 $A=\{\xi\leqslant\frac{1}{2}\}$,$B=\{\xi>\frac{1}{2}\}$,由几何概型,$P(A)=P(B)=0.5\neq 0$,显然 $AB=\varnothing$,但是 $\bar{A}=B$,$\bar{B}=A$,于是 $\bar{A}\bar{B}=BA=\varnothing$,即 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 是互不相容的.

本题利用公式:$A-B=A-AB$,而 $AB\subset A$,于是 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.此公式以后会常用到,望熟记.

**1-5** 设当事件 $A$ 与 $B$ 同时发生时,事件 $C$ 必发生,则下列式子正确的是(　　)

(A)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C)$P(C)=P(AB)$　　(D)$P(C)=P(A\cup B)$

**解**　由已知,$AB\subset C$,则 $P(C)\geqslant P(AB)$,又 $P(A\cup B)=P(A)+(B)-P(AB)\leqslant 1$,故有 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$,所以(B)正确.因此(A)是错的.(C)、(D)显然不对.

解答本题利用了公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 及 $P(A\cup B)\leqslant 1$.

**1-6** 对于任意两个随机事件 $A$ 和 $B$,有 $P(A-B)$等于(　　).

(A) $P(A)-P(B)$　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　　(D) $P(A)+P(\bar{B})+P(A\bar{B})$

**解**　由于 $A-B=A-AB$,而 $AB\subset A$,于是 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$,故(C)正确.而(A)仅在 $B\subset A$ 时成立,不具有一般性,因此不正确.(B)、(D)显然不正确.

将 $A-B$ 改写为 $A-B=A-AB$ 是解本题的关键.

**1-7** 设随机事件 $A$、$B$、$C$ 两两互不相容,且 $P(A)=0.2$,$P(B)=0.3$,$P(C)=0.4$,则 $P[(A\cup B)-C]$等于(　　).

(A) 0.5　(B) 0.1　(C) 0.44　(D)0.3

**解**　$P[(A\cup B)-C]=P(A\bar{C}\cup B\bar{C})$
$=P(A\bar{C})+P(B\bar{C})-P(AB\bar{C})$
$=P(A-AC)+P(B-BC)-0$

由于 $A$、$B$、$C$ 两两互不相容,则 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=0$,又 $AB\bar{C}\subset AB$,则 $P(AB\bar{C})\leqslant P(AB)$,

$$= P(A) - P(AC) + P(B) - P(BC)$$
$$= 0.5$$

故答案(A)正确.

故 $P(AB\bar{C}) = 0$. 将 $A\bar{C}$、$B\bar{C}$ 进行改写,也是解本题的关键.

**1-8** 某商场出售电器设备,以事件 $A$ 表示"出售 74 cm 长虹电视机",以事件 $B$ 表示"出售 74 cm 康佳电视机",用 $A$、$B$ 及它们的对立事件表示以下事件:

(1) 这两种品牌的电视机都出售;

(2) 这两种品牌的电视机都不出售;

(3) 至少有一种品牌的电视机出售;

(4) 只出售一种品牌的电视机.

**解** (1) $AB$ (2) $\bar{A}\bar{B}$ (3) $A \cup B$ (4) $A\bar{B} \cup \bar{A}B$

要学会用随机事件的运算来表示各类不同的较复杂事件.

**1-9** 设 $A$、$B$、$C$ 是三个随机事件,试用 $A$、$B$、$C$ 分别表示下列事件:

(1) $A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生;

(2) $A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生;

(3) $A$、$B$、$C$ 中不多于一个发生.

**解** (1) 因为 $A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生,就是 $A$、$B$、$C$ 的和,因此可以用 $A \cup B \cup C$ 表示.

(2) 因为 $A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生,就是 $A$ 发生,$B$、$C$ 不发生;或 $B$ 发生,$A$、$C$ 不发生;或 $C$ 发生,$A$、$B$ 不发生,因此可以用 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 表示.

(3) 因为 $A$、$B$、$C$ 中不多于一个发生,就是 $A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生,或 $A$、$B$、$C$ 中都不发生,因此可以用 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 表示,或表示为 $\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}$.

**1-10** 设 $A$、$B$ 是两个事件,那么事件"$A$、$B$ 都发生","$A$、$B$ 不都发生"、"$A$、$B$ 都不发生"中,哪两个是对立事件?

**解** 上述三个事件可分别表示为 $AB$、$\overline{AB}$、$\bar{A}\bar{B}$. 若 $AB$ 与 $\bar{A}\bar{B}$ 是对立事件,由定义应有 $AB = \overline{\bar{A}\bar{B}}$,但 $\overline{\bar{A}\bar{B}} = A \cup B \neq AB$,所以"$A$、$B$ 都发生"与"$A$、$B$ 都不发生"不是对立事件. 而 $\overline{\overline{AB}} = AB$,所以"$A$、$B$ 都发生"与"$A$、$B$"不都发生"是对立事件.

$A$、$B$ 不都发生就是 $A$ 与 $B$ 不能同时发生。

**1-11** 设 $A$、$B$ 为随机事件,$P(A) = 0.5$,$P(A - B) = 0.2$,求 $P(\overline{AB})$.

**解** 由于 $A - B = A - AB$,且 $AB \subset A$,所以

解答本题的关键是将 $A - B$ 改写为 $A - B = A -$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

于是

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3$$

因此 $\quad P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$

$AB$，而 $AB\subset A$，则有 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$.

**1-12** 设 $A$、$B$ 是两个随机事件，$P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，当 $A$、$B$ 满足什么条件时，$P(AB)$ 取得最小值；当 $A$、$B$ 满足什么条件时，$P(AB)$ 取得最大值.

**解** 由于 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$，故当 $A\cup B=\Omega$ 时，$P(AB)$ 取得最小值 0.3；当 $A\subset B$ 时，$P(AB)$ 取得最大值 0.6.

由于 $P(A)\neq P(B)$，所以 $AB\neq\varnothing$，从而 $P(AB)$ 的最小值不可能为 0. 利用加法公式是解本题的关键.

**1-13** 已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，$P(C)=0.5$，$P(AB)=0.3$，$P(BC)=0.3$，$P(AC)=0.2$，$P(ABC)=0.1$，求 $P(C\mid\overline{A}\overline{B})$.

**解** 由条件概率公式

$$P(C\mid\overline{A}\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\overline{B}C)}{P(\overline{A}\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})}{P(\overline{A}\overline{B})}$$

$$=1-\frac{P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})}{P(\overline{A}\overline{B})}$$

而 $\quad P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})$

$$=1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC))$$

$$=1-0.9=0.1$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$

$$=1-0.8=0.2$$

故 $\quad P(C\mid\overline{A}\overline{B})=1-\dfrac{0.1}{0.2}=0.5$

将 $P(\overline{A}\overline{B}C)$ 改写为 $P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ 是解本题的关键. 这样便于使用和事件的概率公式解决问题.

**1-14** 已知事件 $A$、$B$ 满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

**解** 由于

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

而 $\quad P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

故有 $\quad 1-P(A)-P(B)=0$

从而有 $\quad P(B)=1-P(A)=1-p$

$\overline{\overline{A}\overline{B}}=A\cup B$ 是解答本题的关键.

**1-15** 设 $A$、$B$ 为两个随机事件，证明：

$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

**证** 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，而 $P(AB)\geqslant 0$，

证明本题的关键是将 $P(A\cup B)-1$ 写成 $P(A\cup B)-1$

所以

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

又　　$AB\subset A\cup B$

故　　$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$

又由于

$$\begin{aligned}1-P(\bar{A})-P(\bar{B})&=P(A)+P(B)-1\\&=P(AB)+P(A\cup B)-1=P(AB)-(1-P(A\cup B))\\&\leqslant P(AB)\end{aligned}$$

总之,有

$$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

$=-(1-P(A\cup B))$. 而 $1-P(A\cup B)\geqslant 0$, 从而得到要证明的不等式.

**1-16**　设 $P(A)=p,0<p<1,P(B)=1-\sqrt{p}$,证明:$P(\bar{A}\cap\bar{B})>0$.

**证**　
$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cap\bar{B})&=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cup\bar{B})\\&=1-p+\sqrt{p}-P(\bar{A}\cup\bar{B})\\&\geqslant 1-p+\sqrt{p}-1\\&=\sqrt{p}(1-\sqrt{p})>0\end{aligned}$$

即有

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})>0$$

请总结一下公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-A(AB)$ 的应用.

**1-17**　某门课只有通过口试及笔试两种考试,方可结业.某学生通过口试的概率为80%,通过笔试的概率为65%.至少通过两者之一的概率为75%,问该学生这门课结业的可能性有多大?

**解**　用事件 $A$ 表示"他通过口试",事件 $B$ 表示"他通过笔试",则由已知,$P(A)=0.80,P(B)=0.65,P(A\cup B)=0.75$,于是

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=0.80+0.65-0.75\\&=0.70\end{aligned}$$

即该学生这门课结业的可能性为70%.

用 $A$、$B$ 表示具体的随机事件,是解本题的关键.

## 1.2　古典概型与几何概率

**1-18**　在分别写有2,3,4,5,7,8的六张卡片中任取两张,把卡片上的数字组成一个分数,求所得分数是既约分数的概率?

**解1**　以 $A$ 表示事件"所得分数为既约分数",则样本点总数为 $A_6^2=6\times 5=30$.所得分数为既约分数必须分子、分母为3,5,7中的两个,或2,4,8中的一个和3,5,7中的一个组成,所以事件 $A$ 所包含的样本点数为 $P_3^2+2P_3^1\times P_3^1=3\times 2+2\times 3\times 3=24$.于是

试比较解1与解2的不同.应学会用解2的方法解古典概率问题.

$$P(A)=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$$

**解 2** 仍以 $A$ 表示事件“所得分数为既约分数”,它相当于“所取两个数中至少有一个是奇数”,$A$ 的对立事件 $\bar{A}$ 是“所取两个数都不是奇数”,易见求 $P(\bar{A})$较为容易,而

$$P(\bar{A})=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$$

因此

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

了解事件的对立事件,利用对立事件求概率可以简化计算.

**1-19** 把 10 本书任意放在书架上,求其中指定的 3 本书放在一起的概率.

**解** 基本事件的总数是对 10 本书进行的全排列数 $n=10!$.以 $A$ 表示事件“指定的 3 本书放在一起”,事件 $A$ 可以看成分两步得到:第一步将 3 本书看成一个整体与剩余的 7 本书进行全排列,所有可能排列数为 8! 种;第二步再将 3 本书进行全排列,所有可能的排列数为 3! 种.因此,$A$ 所包含的基本事件数为 $m=8!\times 3!$,从而所求的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8!\times 3!}{10!}=0.067$$

**1-20** 袋中有 5 只球,其中一只是红球,每次取一只球(不放回),求前三次取到红球的概率.

**解** 设 $A$ 表示前三次取到红球,$B_i$ 表示第 $i$ 次取到红球,$i=1,2,3$,则 $A=B_1\bar{B}_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1\bar{B}_2B_3$,于是

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1\bar{B}_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1B_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3)\\&=\frac{1}{5}\times 1\times 1+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times 1+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$A$ 事件实际上表示 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 中恰有一个发生的事件,将复杂事件用简单事件表示是解本题的关键.

**1-21** 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去,求杯子中球数的最大值分别为 1,2,3 的概率.

**解** 设 $B_i$ 表示杯子中球数最大值为 $i$,$i=1,2,3$.将 3 只球放入 4 个杯子中,共有 $4^3$ 种放法.当事件 $B_1$ 出现时,意味着三个杯子中各有一个球,另一个杯子中没有球,所以 $B_1$ 包含的基本事件数为 $C_4^3\times 3!$,于是

$$P(B_1)=\frac{C_4^3\times 3!}{4^3}=\frac{3}{8}$$

对于 $B_2$,相当于先从 3 只球中任取 2 只,再从 4 个杯子中任取一个,把取到的 2 只球放入所选出的这个杯子中,而余下的一个球就放入剩下的 3 个杯子中的任一个里,从而 $B_2$ 所包含的基本事件个数是

$C_3^2C_4^1C_3^1=36$,故

$$P(B_2)=\frac{36}{4^3}=\frac{9}{16}$$

对于 $B_3$,相当于从 4 个杯子中任选一个,将 3 只球全部放入所选的杯子中去,故 $B_3$ 所包含的基本事件个数是 $C_4^1=4$,从而

$$P(B_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

**1-22** 已知 10 个晶体管中有 7 个正品及 3 个次品,每次任意抽取一个来测试,测试后不再放回去,直至把 3 个次品都找到为止,求需要测试 7 次的概率.

分析出事件 $A$ 所包含的基本事件总数是解答本题的关键.

**解** 测试 7 次,即就是从 10 个晶体管中不放回地抽 7 个晶体管,基本事件的总数为 $P_{10}^7$.设事件 $A$ 表示"经过 7 次测试,3 个次品都已找到",这就是说在前 6 次测试中有 2 次找到次品,而在第 7 次测试时找到了最后一个次品或者前 7 次测试均为正品,最后剩下的 3 个就是次品.由于 3 个次品均可在最后一次被测试到,所以事件 $A$ 所包含的基本事件数为 $C_6^2C_4^4P_7^4 3!+C_7^7\cdot 7!$.因此,所求概率为

$$P(A)=\frac{C_6^2C_4^4P_7^4 3!+C_7^7\cdot 7!}{P_{10}^7}=\frac{2}{15}=0.133$$

**1-23** 从 5 双不同的手套中任取 4 只,求

(1) 恰有一双配对的概率?

(2) 至少有 2 只配成一双的概率?

**解** (1) 设事件 $A$ 表示"5 双手套中任取 4 只,恰有一双配对".从 5 双(10 只)手套中任取 4 只,共有 $C_{10}^4$ 种取法;而从 5 双手套中任选一双,有 $C_5^1$ 种选法,把选出的一双的 2 只都取出,有 $C_2^2$ 种取法,在剩下的 4 双中任选 2 双,有 $C_4^2$ 种选法,每双任取一只有 $C_2^1C_2^1$ 种取法.于是任取 4 只恰有一双配对的取法数共有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$ 种.因此,所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}$$

利用组合数求出 $A$ 所包含的样本点,是解(1)的关键.

注意先选了一双配对后,另两只就不能再成双了,因此要从 2 双中各取 1 只.

**另解** 事件 $A$ 所包含的基本事件数也可以这样得到:先从 5 双手套中任选一双,有 $C_5^1$ 种选法,把选中的一双的 2 只都取出有 $C_2^2$ 种取法,在剩下的 8 只中任取 2 只,有 $C_8^2$ 种取法,其中有 $C_4^1C_2^2$ 种取法是配对的,应减去,故 $A$ 所包含的基本事件数为

$C_5^1C_2^2(C_8^2-C_4^1C_2^2)$种,于是 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2(C_8^2-C_4^1C_2^2)}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}$$

(2) 可依照(1)的解法,利用组合数的方法来计算概率.在此,我们介绍其它两种解法.

在(2)中 $P(\overline{B})$ 比 $P(B)$ 好求,故

设事件 $B$ 为“4 只手套中至少有 2 只配成一对”，则其逆事件 $\bar{B}$ 为“4 只手套中没有 2 只配成一双”，显然样本点总数仍为 $C_{10}^4$. 事件 $\bar{B}$ 包含的样本点可以这样来计算：从 5 双中任取 4 双，然后再从每双中任取一只，这样取出的 4 只手套肯定没有 2 只配成一双，这样的取法有 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$ 种，于是

$$P(\bar{B})=\frac{80}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$$

从而

$$P(B)=1-P(\bar{B})=\frac{13}{21}$$

先求 $P(\bar{B})$.

如果设事件 $C$ 是取出手套中恰有 2 双，则

$$P(C)=\frac{C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}$$

故 $P(B)=P(A)+P(C)=\frac{13}{21}$. 也是一种解法.

**另解** $B$ 和 $\bar{B}$ 的概率也可以这样来计算.

如果设想手套是一只一只取出的，即注意到手套被取出的先后顺序，那么样本点总数就是 10 只手套中任取 4 只的排列数，即有 $P_{10}^4$ 种.

按照同样的理解，事件 $\bar{B}$ 中的样本点可以这样来确定：4 只手套是一只一只取出的，第一只手套有 10 种取法（5 双中任取一只），第二只手套有 8 种取法（除去已取出的第一只以及与第一只配成一双的另一只），第三、第四只手套各有 6 种、4 种取法. 所以，依乘法原理 $\bar{B}$ 中样本点数为 $10\times8\times6\times4$，故

$$P(\bar{B})=\frac{10\times8\times6\times4}{P_{10}^4}=\frac{8}{21}$$

因此，得

$$P(B)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

**1-24** 袋中有 $a$ 个黑球，$b$ 个白球，现在把球随机地一个一个摸出来，求第 $k$ 次摸出的一个球是黑球的概率（$1\leqslant k\leqslant a+b$）.

**解 1** 给 $a+b$ 个球分别编号，把摸出的球依次排列在 $a+b$ 个位置上，则所有可能的排列相当于对 $a+b$ 个相异元素进行全排列，所以样本点总数为 $(a+b)!$. 有利场合数可以这样考虑：第 $k$ 个位置安放一个黑球有 $a$ 种放法，而另外 $a+b-1$ 个位置上相当于对 $a+b-1$ 个球进行全排列，有 $(a+b-1)!$ 种放法，故所求概率为

$$p_k=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

**解 2** 把黑球与白球看作是没有区别的，将摸出的球仍依次放在 $a+b$ 个位置上. 样本点总数为 $C_{a+b}^aC_b^b=\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$. 有利场合数可这样考虑：第 $k$ 个位置上必须放置黑球，剩下的 $a-1$ 个黑球和 $b$ 个白球放在 $a+b-1$ 个位置上，共有 $C_a^1C_{a+b-1}^{a-1}C_b^b$ 种放法，于是所求概率为

$$p_k=\frac{C_a^1C_{a+b-1}^{a-1}C_b^b}{C_{a+b}^aC_b^b}=\frac{a}{a+b}$$

本题的四种解法，来自对样本空间的不同构造. 在计算样本点总数和有利场合数时，必须在已经确定的样本空间中进行，否则就会导致错误的结果.

**解 3** 把 $a$ 个黑球和 $b$ 个白球看作是各不相同，且样本空间只考虑前 $k$ 次摸球．那么，样本点总数就是从 $a+b$ 个球中任取 $k$ 个的排列数，即 $A_{a+b}^{k}$，而其中第 $k$ 个位置上排黑球的排法数就是从 $a$ 个黑球中任取一个，排在第 $k$ 个位置上，再从余下的 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 个，排在其余 $k-1$ 个位置上，这种排法一共有 $C_a^1 P_{a+b-1}^{k-1}$ 种，于是

$$p_k = \frac{C_a^1 \cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}$$

**解 4** 样本空间只考虑第 $k$ 次摸球．那么，样本点总数相当于从 $a+b$ 个球中任取一个排在第 $k$ 个位置上，有 $a+b$ 种排法，而第 $k$ 个位置上黑球的排法数为 $C_a^1$，即有 $a$ 种排法，所以

$$p_k = \frac{a}{a+b}$$

本题表明，摸得黑球的概率与摸球的顺序无关．这与我们经验一致．如体育比赛之抽签，对各队机会均等，与抽签次序无关．这也叫“抓阄原理”．

**1-25** 袋中有 $\alpha$ 个白球，$\beta$ 个黑球，逐一把球取出（不返回），直至留在袋中的球都是同一种颜色为止，求最后是白球留在袋中的概率．

**解** 设 $A$ 表示事件“袋中只剩白球”，$B_i$ 表示事件“取出 $\beta$ 个黑球，$i$ 个白球，袋中留下的全是白球”（$i=0,1,\cdots,\alpha-1$），则事件 $B_0$，$B_1$，$\cdots$，$B_{\alpha-1}$必两两互不相容，且

$$A = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{\alpha-1}$$

根据概率的有限可加性，有

$$P(A) = P(B_0) + P(B_1) + \cdots + P(B_{\alpha-1})$$

由事件 $B_i$ 的定义，对确定的 $i$，它的样本空间，就是从 $\alpha+\beta$ 个球中任取 $i+\beta$ 个球的排列．所以，样本点总数为 $P_{\alpha+\beta}^{i+\beta}$．注意到 $i+\beta$ 个球取出后，留在袋中的全是白球，因而在这 $i+\beta$ 个球中，最后取出的一个应是黑球．这样，事件 $B_i$ 的有利场合数，就是 $i+\beta-1$ 个球的全排列（$\beta$ 个黑球中扣除 1 个，以保证最后取出的一个必为黑球）．显然，$i$ 个白球可以从 $\alpha$ 个白球中取得，有 $C_\alpha^i$ 种取法．$\beta-1$ 黑球可从 $\beta$ 个黑球中取得，有 $C_\beta^{\beta-1}$ 种取法，从而事件 $B_i$ 所含的样本点数为 $C_\alpha^i \cdot C_B^{\beta-1} \cdot P_{i+\beta-1}^{i+\beta-1}$．因此

$$P(B_i) = \frac{C_\alpha^i C_\beta^{\beta-1} \cdot (i+\beta-1)!}{P_{\alpha+\beta}^{i+\beta}}$$

$$= \frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha+\beta)!} C_{i+\beta-1}^{i}$$

把诸 $P(B_i)$代入 $P(A)$中，并注意到

$$C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+n-1}^{n-1} = C_{n+m}^{n-1}$$

即得

$$P(A) = \frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha+\beta)!}\left[C_{\beta-1}^0 + C_\beta^1 + C_{\beta+1}^2 + \cdots + C_{\beta+\alpha-2}^{\alpha-1}\right]$$

将 $A$ 表示为各个 $B_i$ 的和，是解本题的一个重要环节．学会设事件，对解复杂的概率题非常有用．

$$=\frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha+\beta)!}C_{\beta+\alpha-1}^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

**1-26** $n$ 个人每人携带一件礼品参加联欢会.联欢会开始后,先把所有的礼品编号,然后每人各抽一个号码,按号码领取礼品.求所有参加联欢会的人都得到别人赠送的礼品的概率.

为求事件 $A$ 的概率,先求其对立事件 $\overline{A}$ 的概率,这是常用的方法.

**解** 设 $A$ 表示事件"所有参加联欢会的人都得到别人赠送的礼品",$A_i$ 表示事件"第 $i$ 个人得到自己带来的礼品",$i=1,2,\cdots,n$,则事件 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 表示至少有一个人得到自己带来的礼品,于是

$$A=\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}$$

为此先计算如下概率

$$P(A_i)=\frac{1}{n}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)}\qquad(1\leqslant i<j\leqslant n)$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\qquad(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

由此得

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)=C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)=C_n^3\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

根据 $n$ 个事件和的计算公式得

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\\=&1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\=&\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\end{aligned}$$

故,所求概率为

$$P(A)=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

当 $n$ 充分大时，$P(A)\approx e^{-1}=0.368$

**1-27** 某饭店一楼有三部电梯，今有5位旅客要乘电梯.假定选择哪部电梯是随机的，求每部电梯内至少有一位旅客的概率.

**解** 令 $A_i$ 表示事件"没有一位旅客进入第 $i$ 部电梯"，也就是表示"第 $i$ 部电梯空着"，$i=1,2,3$.则

$$P(A_i)=\frac{(3-1)^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^5,\qquad i=1,2,3$$

同理，"没有一位旅客进入第 $i$ 部和第 $j$ 部电梯"的概率为

$$P(A_iA_j)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^5,\quad i,j=1,2,3$$

显然，三部电梯全空着的概率为0.于是

$$\begin{aligned}P\{\text{至少有一部电梯空着}\}&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_2)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\&\quad-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+0=0.38\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}P\{\text{每部电梯至少有一位旅客}\}&=P\{\text{每部电梯不空}\}\\&=1-P\{\text{至少有一部电梯空着}\}\\&=1-0.38=0.62\end{aligned}$$

认清事件"每部电梯内至少有一位旅客"等价于事件"每部电梯都不空"是非常必要的，而此事件的对立事件为"至少有一部电梯空着"，而将这个对立事件表示为 $A_1,A_2,A_3$ 的和，是解本题的重要步骤.

**1-28** 任取两个正的真分数，求它们的乘积不大于$\frac{1}{4}$的概率.

**解** 设 $x$ 和 $y$ 为所取的真分数，则

$$0<x<1,\qquad 0<y<1$$

把 $(x,y)$ 表示为平面上一点的坐标，则点 $(x,y)$ 位于边长为1的正方形区域内(如图1.1).

为了 $x$、$y$ 的乘积不大于$\frac{1}{4}$，即

$$xy\leqslant\frac{1}{4}$$

则点 $(x,y)$ 应位于图1.1中阴影部分的区域内.因此，所求概率为

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln4\\&=0.597\end{aligned}$$

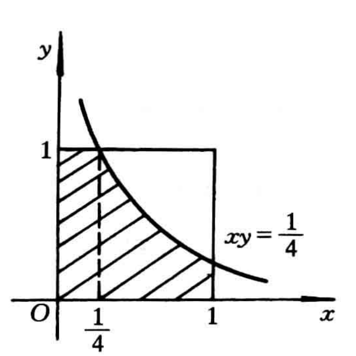


图1.1

这是一道几何概率的题目.在做这类题目时，正确画出图形是解题的关键，这类题常用到定积分的知识.