现代数学基础

# 31 多复变函数论

萧荫堂　陈志华　钟家庆

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

31

# 多复变函数论

Duofubian Hanshulun

■ 萧荫堂　陈志华　钟家庆

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

**图书在版编目（CIP）数据**

多复变函数论/萧荫堂，陈志华，钟家庆著. --北京:高等教育出版社,2013.1

ISBN 978-7-04-036268-8

Ⅰ.①多… Ⅱ.①萧… ②陈… ③钟… Ⅲ.①多复变函数 Ⅳ.①O174.56

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第233818号

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 策划编辑 | 王丽萍 | 责任编辑 | 李华英 | 封面设计 | 张 楠 | 版式设计 | 范晓红 |
| 责任校对 | 殷 然 | 责任印制 | 张福涛 | | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http://www.hep.com.cn |
| 印 刷 | 北京天来印务有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 开 本 | 787mm×1092mm 1/16 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印 张 | 19.25 | 版 次 | 2013年1月第1版 |
| 字 数 | 340千字 | 印 次 | 2013年1月第1次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定 价 | 59.00元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换



物 料 号 36268-00

# 前 言

本书源于 1979 年夏天萧荫堂教授在中国科学院数学研究所的关于多复变函数的系统讲学, 主要内容是 $\bar{\partial}$ 方程、层论方法与复几何. 当时, 钟家庆君与我将我们的听讲笔记整理后, 由厦门大学数学系油印成 10 万字左右的 "多复变函数论讲义" 的油印本, 并分送有关学者. 此油印讲义当时广为流传, 深受欢迎.

这些年有不少学者建议将此讲义充实整理成书并在国内出版. 高等教育出版社近年来十分重视与支持优秀科技书籍的出版. 他们积极筹划并推动了本书的出版.

由于钟家庆教授英年早逝, 因而这个任务就只能由我个人来负责完成. 我个人亦认为用中文出版本书是很有益的. 因为本书对从事多复变函数及其他相关学科研究的人是本不可多得的参考书, 而对从事基础数学学习的研究生更是一本值得读的好书. 相对于国内外其他专门介绍多复变函数论的书, 本书的内容更为广泛.

本书中可以读到多复变函数与很多其他数学分支诸如方程、泛函分析、几何、拓扑的关联以及这些分支的方法在研究多复变函数中的应用. 本书体现了多复变这一学科在数学统一性上的特征.

囿于作者的水平, 本书不可避免会有错误和失当之处, 这些当然是本人的责任.

本书的顺利出版得到了同济大学数学系周朝晖副教授与博士生王煦和董欣的大力相助. 作者还要感谢国家自然科学基金会对我的教学与科研工作的长期支持.

陈志华

2012 年 3 月于上海

# 目　录

# 第一章　全纯域与全纯凸域

在这一章, 我们将从解析延拓的观点引出全纯域和全纯凸域.

## §1.1　全　纯　域

首先回忆单复变量的全纯函数的性质. 设 $f(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的全纯函数, 它的定义有下面两种方法:

(1) $f(z)$ 在局部可写成收敛的幂级数, 即

$$f(z)=\sum_{v=0}^{+\infty}a_v(z-z_0)^v.$$

(2) $f(z)=u(x,y)+\sqrt{-1}v(x,y)$, 这里 $z=x+iy, u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数. $f$ 称为是全纯的, 若它满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}.\end{cases}\tag{1.1}$$

(1.1) 就是 Cauchy–Riemann 方程.

Cauchy–Riemann 方程亦可用下述方式表述:

我们引入常系数的偏微分算子

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right),\tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\sqrt{-1}v)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\end{aligned} \tag{1.3}$$

故 $f(z)$ 满足 Cauchy–Riemann 方程当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. (1.2) 中 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 的系数 $\frac{1}{2}$ 是有用的, 这在后面将会看到.

对于多复变量的情形, 一样可以按照这两种方法来定义全纯函数.

(1) $f(z)$ 在局部可写成收敛的幂级数, 即

$$f(z)=\sum a_{v_1\cdots v_n}(z_1-a_1)^{v_1}\cdots(z_n-a_n)^{v_n}.$$

(2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^v}=0, \quad \forall 1\leqslant v\leqslant n.$

这里 (2) 就等价于 $n$ 对 Cauchy–Riemann 方程.

当 $n=1$ 时, 古典的复变函数论中有一个重要的概念就是解析延拓. 设 $f(z)$ 是定义在开集 $G\subset \mathbf{C}$ 上的全纯函数, 则 $f$ 可以延拓到最大的一个定义域 $D_f$, 这个 $D_f$ 就称为 $f$ 的**自然定义域**. 一般来讲, $D_f \nsubseteq \mathbf{C}$, 因为由单值性的问题, $D_f$ 常常是铺开在 $\mathbf{C}$ 上的区域.

例如, 设 $f(z)=\sqrt{1-z}=1+\frac{1}{2}(-z)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-z)^2+\cdots$, 它的自然定义域就是 $\mathbf{C}\backslash\{1\}$ 上的两叶铺开的区域.

在多复变函数理论中, 亦有解析延拓的问题. 若 $f(z)$ 为定义在 $G\subset\mathbf{C}^n$ 上的一个全纯函数, 且总可以解析延拓至更大的定义域上, 则这个最大的定义域 $D_f$ 就称为 $f$ 的自然定义域. 这个 $D_f$ 通常亦不包含在 $\mathbf{C}^n$ 中, 但它一定是铺开在 $\mathbf{C}^n$ 上的区域.

设 $F=\{f\}$ 是一族 $G\subset\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数, 定义 $D_F=\bigcap\limits_{f\in F} D_f$. 若我们取 $F$ 为 $G$ 上所有全纯函数的全体, 对 $n=1$ 与 $n>1$ 两种情形 $D_F$ 的定义都是一样的, 但当 $n=1$ 时 $D_F=G$. 这是很显然的: 因为对 $\forall a\notin G$, 函数 $(z-a)^{-1}$ 是 $G$ 内的全纯函数, 而 $a\notin D_{(z-a)^{-1}}$, 即 $a\notin D_F$, 故 $D_F=G$. 但对于 $n>1$ 的情形, 这就未必: 例如 $n=2$ 时, 通常不能像 $n=1$ 的情形那样构造出类似于 $(z-a)^{-1}$ 的函数 $f$ 使得对 $a\notin G$ 时, 推出 $a\notin D_f$. 例如对 $G=\mathbf{C}^2\backslash\{0\}$, 这里 $\{0\}$ 表示 $\mathbf{C}^2$ 中原点所成的集, 一般无法找到一个在 $\mathbf{C}^2\backslash\{0\}$ 全纯, 而在 $\{0\}$ 这一个单点所成的集上具有奇性的全纯函数, 因为在 $\mathbf{C}^2$ 上一个区域定义的全纯函数的零点不是孤立点. 类似于 $n=1$ 时的函数 $(z-a)^{-1}$, 我们自然会想到函数 $f(z_1,z_2)=(z_1z_2)^{-1}$. 但 $z_1z_2$ 的零点集是 $(\mathbf{C}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{C})$, 因此

$f(z_1, z_2) = (z_1 z_2)^{-1}$ 只在 $\mathbf{C}^2 \backslash \{(\mathbf{C} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{C})\}$ 上全纯, 而不在 $\mathbf{C}^2 \backslash \{0\}$ 上全纯. 另外函数 $f(z_1, z_2) = \dfrac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ 作为可微函数, 只在 $\mathbf{C}^2$ 中的原点具有奇性, 但它不是全纯函数. 在 1906 年, Hartogs 发现 $\mathbf{C}^n$ 中存在区域 $G$, 对任何全纯函数均可以解析延拓到更大的区域上去, 亦即如果我们用 $F$ 表示 $G$ 上全纯函数全体, 则对 $\mathbf{C}^n$ 中的某些区域 $G$, 必有 $G \subset D_F$, 但 $G \neq D_F$, 这种现象后来就被人们称为 Hartogs 现象.

现在我们举一个具体的例子来说明 Hartogs 现象的存在. 设

$$G = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \big| |z| < 1, \beta < 1, \beta < |w| < 1\} \cup \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \big| |z| < \alpha < 1, |w| < 1\},$$

则 $G$ 上的每个全纯函数都可以解析延拓至双圆柱 $\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \big| |z| < 1, |w| < 1\}$.

下面我们看一个示意图. 图 1.1 中 $\mathbf{R}^2$ 中的阴影部分记为 $S$. 作映射

$$\varphi : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2,$$
$$(z,w) \longmapsto (|z|, |w|),$$

则 $G = \varphi^{-1}(S)$. 现在我们来证明上述论断.

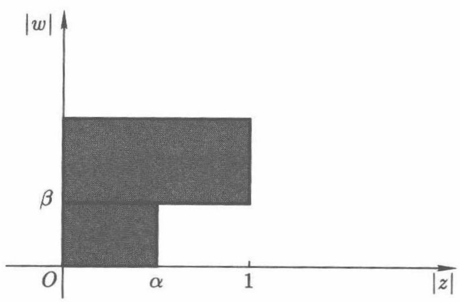


图 1.1

第一步是利用 Laurent 级数展开. 对每一个给定的 $|z| < 1, f(z,w)$ 都可表示成 Laurent 级数

$$f(z,w) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v(z) w^v, \tag{1.4}$$

这里 $a_v(z)$ 是 $\{z \in \mathbf{C} \big| |z| < 1\}$ 的全纯函数. 当 $|z| < \alpha$ 时, (1.4) 中的 Laurent 展开式中不出现负的幂次项, 即 $a_v(z) = 0, \forall v < 0$. 因为 $a_v(z)$ 为 $\{z \in \mathbf{C} \big| |z| < 1\}$ 中之全纯函数, 在其中之一开集上为 0, 所以 $a_v(z)$ 在 $\{z \in \mathbf{C} \big| |z| < 1\}$ 上恒等于 0. 因此 $f(z,w)$ 是双圆柱 $\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \big| |z| < 1, |w| < 1\}$ 上的全纯函数.

第二步是利用 Cauchy 积分. 今取 $\beta'$, 满足 $\beta < \beta' < 1$, 定义全纯函数

$$\tilde{f}(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\beta'} \frac{f(z,\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - w}. \tag{1.5}$$

这样定义的 $\tilde{f}(z,w)$ 是双圆柱 $\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 \big| |z|<1, |w|<\beta'\}$ 中的全纯函数; 而在 $\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 \big| |z|<\alpha, |w|<1\}$ 中, $\tilde{f}(z,w) = f(z,w)$. 因为此时它们可以用同一个 Cauchy 积分式表示, 所以这样定义的 $\tilde{f}(z,w)$ 就是原来的 $f(z,w)$ 的解析延拓. 也证明了 $f(z,w)$ 是双圆柱 $\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 \big| |z|<1, |w|<1\}$ 上的全纯函数.

下面给出 Hartogs 所给出的全纯域 (正则域) 的定义.

**定义 1.1** 设 $G$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集 (或是铺在 $\mathbf{C}^n$ 上的一个开集), $G$ 称为**全纯域**, 如果不存在更大的 $\tilde{G}, \tilde{G}\supset G$ 且 $\tilde{G}\neq G$ 能使 $\forall f\in \mathcal{O}(G)$ 都可以延拓到 $\tilde{G}$ 上.

这里 $\mathcal{O}(G)$ 表示 $G$ 上全纯函数全体.

前面已经说明 $\mathbf{C}$ 中任一开集都是全纯域, 这主要是由于 $(z-a)^{-1}$ 这类全纯函数的存在, 而对 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, 有的可能不是全纯域. 但是有的具有特殊条件的域可以证明它是全纯域.

**定理 1.2** 设 $G\subset \mathbf{C}^n$ 是一个开集, 如果 $G$ 是欧氏凸的, 则 $G$ 是全纯域.

**证明**: 用 $\partial G$ 表示 $G$ 的边界集. 对 $\forall x\in\partial G$, 由于 $G$ 是欧氏凸的, 因此存在一个过 $x$ 点的实超平面 $H$, $H$ 与 $G\cup\partial G$ 只相交于点 $x$. 不失一般性, 我们可以认为 $x$ 就是 $\mathbf{C}^n$ 中的坐标原点. 现在 $H: \sum\limits_{v}(a_v z_v + \bar{a}_v\bar{z}_v) = 0$ 是实超平面, $\sqrt{-1}H: \sum\limits_{v}(\sqrt{-1}a_v z_v + \sqrt{-1}\bar{a}_v\bar{z}_v) = 0$ 亦是实超平面. $H\cap\sqrt{-1}H$ 是一个经过原点的复超平面, $H\cap\sqrt{-1}H: l(z) = \sum\limits_{v} a_v z_v = 0$. 由于 $H$ 与 $G\cup\partial G$ 只相交于原点, 因此 $f(z) = \dfrac{1}{l(z)}$ 在 $G$ 内是全纯的, 但是它不能通过原点延拓出去. 此结论对 $\partial G$ 内任一个点都成立. 故 $G$ 是全纯域. □

## §1.2 全 纯 凸 域

定理 1.2 之逆是不成立的, 这在 $n=1$ 时就有大量的反例. 这表明全纯域的概念比欧氏凸要广得多. 另外, 从全纯域的定义知道对于全纯坐标变换, 全纯域是不变的; 但是对于欧氏凸则不然, 除非是复线性变换. 下面我们要引入全纯凸的定义, 这种凸性正好刻画了全纯域.

如果 $G$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, $K$ 为 $G$ 中的一个紧集,

$$\tilde{K} := \{x \in G|\ \text{对所有实值线性函数 } l, l(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_K l\},$$

这个 $\tilde{K}$ 就称为 $K$ 的**凸包**. 如果 $G$ 是欧氏凸的, 则不难看出在 $G$ 中每个紧集 $K$ 的凸包 $\tilde{K}$ 都一定是紧的, 而且 $\tilde{K}$ 本身都是欧氏凸的. 此时则有 $G = \cup K_v$, 每个 $K_v$ 都是紧凸的且 $K_v \subset K_{v+1}$. 在上面这个凸包的定义中, 如果我们用比所有线性函数集更大的集合来代替线性函数的集合, 而且要求这个更大的集合是在全纯坐标变换下不变的, 那么这样所类似定义的 "凸包" 的性质亦是在全纯坐标变换下不变, 这自然就想到了下面全纯凸的概念.

**定义 1.3** 令 $G$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, $K$ 是 $G$ 中的一个紧集, $K$ 的**全纯凸包** $\hat{K}$ 为

$$\hat{K} := \{x \in G\big||f(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_K |f|, \quad \forall f \in \mathcal{O}(G)\}.$$

如果对 $G$ 的任意紧集 $K$, 它的全纯凸包 $\hat{K}$ 都是紧的, 就称 $G$ 是**全纯凸**的.

这个定义完全是前面用线性函数定义的凸性的极其简单的推广, 这里用绝对值取代以前的 $l(x)$ 是自然的, 因为

$$l(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_K l \Longleftrightarrow e^{l(x)} \leqslant \operatorname*{Sup}_K e^l.$$

这里 $l = \operatorname{Re} L, L$ 是一个复值线性函数, 所以有

$$e^{l(x)} = e^{\operatorname{Re}\ L(x)} = |e^{L(x)}| \leqslant \operatorname*{Sup}_K |e^L|.$$

下面给出 1932 年证明的 **Cartan-Thullen 定理**.

**定理 1.4 (Cartan-Thullen)** 设 $G$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, 则如下条件等价:
(1) $G$ 是全纯域;
(2) $G$ 是全纯凸的;
(3) 存在 $G$ 上的一个全纯函数 $f$, 它的自然定义域就是 $G$.

**证明**: 我们仅证明 $G$ 是有界的简单情形, 其他情形无本质困难.
(3) $\Longrightarrow$ (1) 是显然的.
(1) $\Longrightarrow$ (2) 我们引入 $n$ 个记号. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $n$ 个非负整数, 今后我们记

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial^{\alpha_1} z_1 \cdots \partial^{\alpha_n} z_n},$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

设 $F$ 是 $G$ 中的任一集合, 定义 $d(F)=\inf\limits_{x\in F,y\in\mathbf{C}^n\setminus G}\mathrm{dist}(x,y)$, 这里 $\mathrm{dist}(x,y)$ 是 $x$ 与 $y$ 之间的欧氏距离. 如果 $K$ 是 $G$ 中的紧集, 自然 $d(K)>0$. 按照 $\hat{K}$ 的定义, $\hat{K}$ 是 $G$ 中的闭集. 如果能证明 $d(\hat{K})>0$, 则 $\hat{K}$ 是紧的. 事实上有 $d(\hat{K})=d(K)$.

对任意的满足 $d(K)>\varepsilon>0$ 的 $\varepsilon$, 作

$$K_\varepsilon=\{x\in G|\mathrm{dist}(x,K)\leqslant\varepsilon\}\subset G.$$

由多圆柱的 Cauchy 积分公式, 我们有

$$|D^\alpha f(x)|\leqslant\frac{\sqrt{n}^{|\alpha|}\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\mathop{\mathrm{Sup}}_{K_\varepsilon}|f|,\quad\forall x\in K.\tag{1.6}$$

而由 $\hat{K}$ 的定义与 (1.6),

$$|D^\alpha f(x)|\leqslant\mathop{\mathrm{Sup}}_{K}|D^\alpha f|\leqslant\frac{\sqrt{n}^{|\alpha|}\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\mathop{\mathrm{Sup}}_{K_\varepsilon}|f|,\quad\forall x\in\hat{K}.\tag{1.7}$$

因此对 $\forall x_0\in\hat{K}$, $f(z)=\sum\limits_\alpha\frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(z-x_0)^\alpha$ (这里 $(z-x_0)^\alpha=(z_1-x_{01})^{\alpha_1}\cdots(z_n-x_{0n})^{\alpha_n}$) 是在以 $x_0=(x_{01},\cdots,x_{0n})$ 为中心, $\varepsilon$ 为半径的多圆柱中收敛的. 因为对 $f\in\mathcal{O}(G)$ 这个事实均成立而 $G$ 又是全纯域, 所以必有 $d(x_0,\mathbf{C}^n\setminus G)\geqslant\varepsilon$, 故 $d(\hat{K})\geqslant\varepsilon$. 这就证明了 $d(K)=d(\hat{K})$, 故 $\hat{K}$ 必为紧. 这里 $\mathcal{O}(G)$ 是 $G$ 上所有全纯函数所成的集合.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $G$ 是全纯凸的, 我们可以在 $G$ 中选取一个点列 $\{x_v\}$ 和一族紧集 $K_v=\hat{K}_v$, 使之满足:

1) $G=\bigcup\limits_v K_v$, $K_v\subset\mathring{K}_{v+1}$;

2) $\{x_v\}$ 使 $\partial G$ 的每点都是它的聚点;

3) $x_v\notin K_v$.

再由 $G$ 是全纯凸与 $K_v=\hat{K}_v$, 得到对每个 $v$ 存在一个 $f_v\in\mathcal{O}(G)$, 使 $|f_v(x_v)|>\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{K_v}|f_v|$. 将这个 $f_v$ 乘上适当的幂次与常数, 可以使所取 $f_v$ 满足

$$f_v(x_v)=1\ \text{和}\ \mathop{\mathrm{Sup}}_{K_v}|f_v|<\varepsilon_v,$$

这里 $\{\varepsilon_v\}$ 是一个任意小的正数列, 且 $\sum\limits_v v\varepsilon_v<+\infty$.

今构造 $\prod\limits_v(1-f_v)^v$, 它是在 $G$ 内收敛的, 记为 $f$, 则

$$D^\alpha f(x_v)=0;\quad\forall|\alpha|<v.$$

对 $\forall x^* \in \partial G$, 取 $x_v$ 的子序列 $\{x_{v_i}\}$, $x_{v_i} \to x^*$, 由 $D^\alpha f(x_{v_i}) = 0, |\alpha| < v_i$. 如果 $f$ 可以沿 $x^*$ 延拓出去, 则由连续性, $D^\alpha f(x^*) = 0, \forall |\alpha| < v_i$, 这里 $v_i$ 可趋于 $+\infty$. 故 $(D^\alpha f)(x^*) = 0$ 对 $\forall \alpha$ 都成立. 因此在 $x^*$ 的小邻域中 $f = 0$. 再由唯一性定理, 则 $f$ 在 $G$ 上恒为零. 这与 $f = \prod (1 - f_v)^v \neq 0$ 是矛盾的. 因此 $f$ 不可能沿 $\partial G$ 的任何点延拓出去. □

上面 (2) $\Longrightarrow$ (3) 的证明主要想法是: 一个在 $G$ 上有太多零点的非零全纯函数是不可以延拓的. 上面构造的 $f$ 就是这样的函数. 下面我们再证明对判断某一个域是否为全纯域较为有用的一个定理.

**定理 1.5** 域 $G$ 是全纯凸当且仅当对任意 $x_v \to \partial G$, 存在 $f \in \mathcal{O}(G)$ 使得 $\{|f(x_v)|\}$ 是无界的.

**证明**: "$\Longleftarrow$" 如果 $G$ 不是全纯凸, 则存在 $G$ 中的紧集 $K$, 使 $\hat{K}$ 不是紧的, 那么存在 $\{x_v\} \in \hat{K}, x_v \to \partial G, |f(x_v)| < \operatorname*{Sup}_K |f|$, 故 $\{|f(x_v)|\}$ 有界.

"$\Longrightarrow$" 设 $\{x_v\} \in G, x_v \to \partial G$, $K_v = \hat{K}_v \subset G, G = \bigcup\limits_v K_v$. 可以假定 $x_v \notin K_v, x_u \in K_v$, 当 $u < v$ 时, 根据全纯凸的定义, 对每个 $v$, 可选取 $f_v \in \mathcal{O}(G)$ 使得

$$|f_v(x_v)| \geqslant v + \sum_{u<v} |f_u(x_v)| \tag{1.8}$$

与

$$\operatorname*{Sup}_{K_v} |f_v| < \frac{1}{2^v}, \tag{1.9}$$

则 $\sum\limits_v f_v$ 在域 $G$ 内收敛. 令 $f = \sum f_v \in \mathcal{O}(G)$, 则由 $f_v$ 的性质 (1.8) 与 (1.9), 有

$$\begin{aligned} |f(x_v)| &\geqslant |f_v(x_v)| - \sum_{u<v} |f_u(x_v)| - \sum_{u>v} |f_u(x_v)| \\ &\geqslant v - \sum_{u>v} \frac{1}{2^v} \geqslant v - 1. \end{aligned}$$

故 $\{|f(x_v)|\}$ 无界. □

# 第二章　拟凸域

## §2.1　拟　凸　域

$G$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域, 如果它的边界 $\partial G$ 是可微分的, 则可以用边界的是否凸来判定区域的是否凸. 设 $x \in \partial G$, 我们可对坐标作一线性变换, 使 $x$ 正好是坐标原点, 同时在这点 $\partial G$ 的切平面正好是 $x_n = 0$, 这时在 0 点附近, $G$ 可用

$$G = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n | f(x_1, \cdots, x_{n-1}) - x_n < 0\}$$

来定义. 则 $G$ 在 0 点附近是凸的等价于

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n-1} \geqslant 0. \tag{2.1}$$

$G$ 在 0 点附近是强凸的等价于

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n-1} > 0. \tag{2.2}$$

令 $r = f(x_1, \cdots, x_{n-1}) - x_n$, 则在 0 点的条件 (2.1) 与 (2.2) 可分别等价于

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_u \partial x_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n}$$

在 0 点的切平面上半正定与正定. 即在 0 点 $\sum \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_u \partial x_v} \eta_u \eta_v \geqslant 0$ (或 $> 0$), 对任意 $(\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$ 满足 $\sum\limits_u \dfrac{\partial r}{\partial x_u} \eta_u = 0$.

1910 年, E. E. Levi 就提出全纯凸是否亦可以类似于欧氏凸那样用其边界的局部性质来描绘. 这就要引入**复 Hessian** 来描绘边界.

设 $G \subset \mathbf{C}^n$ 是有界的, 而且其边界 $\partial G$ 是可微的,

$$G = \{z \in \mathbf{C}^n | r(z) < 0\},$$

这里 $r(z)$ 是定义在 $\partial G$ 的邻域中的实值可微函数, 而且在这个邻域中 $\mathrm{d}r$ 在 $\partial G$ 上处处不为 0, $r$ 的复 Hessian 在 $\partial G$ 的复切平面上,

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n} \geqslant 0, \tag{2.3}$$

此即在 $x \in \partial G$,

$$\sum \frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\bigg|_x \xi_u \overline{\xi}_v \geqslant 0.$$

对任意 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$, 有 $\displaystyle\sum_{u=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z^u}\bigg|_x \xi_u = 0$, 这就是上面 $\mathbf{R}^n$ 中凸域用 $\partial G$ 的局部定义的一种自然推广.

**定义 2.1** 设 $G$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个域, $y \in \partial G$, 如果存在 $y$ 的一个邻域 $U$ 和一个在 $U$ 上定义的实值 $C^2$ 函数 $\varphi$, 使得

(1) $G \cap U = \{x \in U | \varphi(x) < 0\}$;

(2) $d\varphi|_y \neq 0$;

(3) 对于任意 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$, 若 $\displaystyle\sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_v}\bigg|_y \xi_v = 0$, 则

$$\sum_{u,v=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\bigg|_y \xi_u \xi_v \geqslant 0,$$

就称 $G$ 在 $y$ 点是**拟凸**的; 如果对任意 $\xi \in \mathbf{C}^n$ 且 $\xi \neq 0$, 若 $\displaystyle\sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_v}\bigg|_y \xi_v = 0$, 都有

$$\sum_{u,v=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\bigg|_y \xi_u \xi_v > 0,$$

那么称 $G$ 在 $y$ 点是**强拟凸**的. 如果 $G$ 在边界 $\partial G$ 上的每一个点都是拟凸的, 我们称 $G$ 是**拟凸域**; 如果 $G$ 在边界 $\partial G$ 上的每一个点都是强拟凸的, 我们就称 $G$ 是**强拟凸域**.

上述定义中函数 $\varphi$ 的选取是有一定任意性的, 但是这对拟凸与强拟凸的定义并无影响. 设 $G$ 在 $U$ 上由另外一个 $C^2$ 实值函数 $\rho$ 来定义, 即 $G \cap U = \{x \in$

$U|\rho(x)<0\}$, 那么 $\varphi=h\rho$, 这里 $h$ 是正的 $C^2$ 实值函数. 由

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_v}=h\frac{\partial\rho}{\partial z_v}+\frac{\partial h}{\partial z_v}\rho,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}=h\frac{\partial^2\rho}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}+\frac{\partial h}{\partial z_v}\frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}_u}+\frac{\partial h}{\partial\overline{z}_u}\frac{\partial\rho}{\partial z_v}+\rho\frac{\partial^2 h}{\partial z_v\partial\overline{z}_u},$$

对任意 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$, $\sum\limits_{v=1}^{n}\left.\frac{\partial\rho}{\partial z_v}\right|_y\xi_v=0$, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{n}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z_v}\right|_y\xi_v=h\sum_{v=1}^{n}\left.\frac{\partial\rho}{\partial z_v}\right|_y\xi_v=0,\\&\sum_{v,u=1}^{n}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\right|_y\xi_v\overline{\xi}_u=h(y)\frac{\partial^2\rho}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\xi_v\overline{\xi}_u.\end{aligned}\tag{2.4}$$

(2.4) 表示拟凸与强拟凸的定义是与函数 $\varphi$ 的选取无关的. 这类函数 $\varphi$ 就称为 $G$ 在 $y$ 点的**定义函数**. 从上面说明可以看到, $G$ 在 $y$ 点拟凸与强拟凸的定义与定义函数的选取无关这一事实是依赖于原来定义中定义函数 $\varphi$ 在 $y$ 点的复 Hessian $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\right)_{1\leqslant u,v\leqslant n}$ 的半正定与正定是限制在 $\partial G$ 在这点的复切平面上; 如果没有这个限制, 定义函数的半正定与正定的性质是不一定保持的. 但是在强拟凸的情形, 我们一定可以选取一个适当的定义函数, 它的复 Hessian 对任意的 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$ 都是正定的.

设 $r$ 是域 $G$ 在 $y\in\partial G$ 点的一个定义函数, 它在 $y$ 的复切平面上是正定的. 显然 $e^{Ar}-1$ 也是 $G$ 在 $y$ 点的定义函数, 这里 $A$ 是一个任意的正实数.

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}_u}(e^{Ar}-1)=Ae^{Ar}\frac{\partial r}{\partial\overline{z}_u},$$

$$\frac{\partial^2(e^{Ar}-1)}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}=A^2e^{Ar}\frac{\partial r}{\partial z_v}\frac{\partial r}{\partial\overline{z}_u}+Ae^{Ar}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u},\tag{2.5}$$

$$\sum_{v,u}\frac{\partial^2(e^{Ar}-1)}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\xi_v\overline{\xi}_u=A^2e^{Ar}\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}\xi_v\right|^2+Ae^{Ar}\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\xi_u\overline{\xi}_v.$$

现在考虑 $\mathbf{C}^n$ 上的单位球 $S^n=\left\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n\left|\sum\limits_{v=1}^{n}|\xi_v|^2=1\right.\right\}$, 对于任意 $\xi\in S^n$, 可按照下述方式找到 $\xi$ 的开邻域 $U$:

(a) 当 $\xi$ 满足 $\sum\limits_{v}\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v=0$, 则 $\sum\limits_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\overline{\xi}_v>0$. 因此可在 $S^n$ 中

选取 $\xi$ 的开邻域 $U$ 使得

$$\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\tilde{\xi}_u\bar{\tilde{\xi}}_v>0,\quad \tilde{\xi}\in U.$$

(b) 当 $\xi$ 满足 $\displaystyle\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\neq 0$, 取 $A_\xi=\max\left\{1,\dfrac{-\displaystyle\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\bar{\xi}_v}{\left|\displaystyle\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2}+1\right\}$,

则

$$\begin{aligned}&A_\xi^2e^{A_\xi r}\Big|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\Big|^2+A_\xi e^{A_\xi r}\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\bar{\xi}_v\\&=A_\xi e^{A_\xi r}\left(A_\xi\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2+\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\bar{\xi}_v\right)>0.\end{aligned}$$

同样可在 $S^n$ 中选取 $\xi$ 的开邻域 $U$, 使得对所有 $\tilde{\xi}\in U$,

$$A_\xi e^{A_\xi r}\left(A_\xi\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\tilde{\xi}_v\right|^2+\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\tilde{\xi}_u\bar{\tilde{\xi}}_v\right)>0.$$

由于 $S^n$ 是紧的, 则存在有限个 $\{U_1,\cdots,U_k\}$ 将 $S^n$ 覆盖. 若 $U_i\,(1\leqslant i\leqslant k)$ 是由 (a) 中取出的, 就取对应的 $A_i=1$; 若是由 (b) 中取出的, 就取 $A_i=A_\xi$. 令 $A_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}A_i$, 那么对任意 $\xi\in S^n$,

$$\sum_{v,u}\frac{\partial^2(e^{A_0r}-1)}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\bar{\xi}_u=A_0^2e^{A_0r}\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2+A_0e^{A_0r}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\bar{\xi}_u>0. \tag{2.6}$$

在 (a) 情况的选取中, 我们看到 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\bar{\xi}_u>0$ 是必需的; 否则就无法找到 $S^n$ 上的一个小邻域使 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\bar{\xi}_u>0$. 因此这点亦表明对拟凸的情况, 即在 (a) 的情况下要保持 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\bar{\xi}_u\geqslant 0$ 是不一定可能的. 事实上, 这个结果亦只有在强拟凸时才成立. K. Diederich 与 J. E. Fornaess 有反例说明对拟凸时无此类性质 (见 Pseudoconvex domains: an example with nontravial Nebenhiille, Math. Ann. 225(1977), 275-292).

下面的定理说明强拟凸域是欧氏凸的最广的推广.