丛书主编：陈兰荪

10

生物数学丛书

〔日〕内藤敏机　原惟行　日野义之　宫崎伦子　著
马万彪　陆征一　译

# 时滞微分方程

## ——泛函微分方程引论

科学出版社

生物数学丛书　10

# 时滞微分方程

## ——泛函微分方程引论

〔日〕内藤敏机　原惟行　日野义之　宫崎伦子　著

马万彪　陆征一　译

科学出版社

北　京

图字：01-2013-4359 号

## 内 容 简 介

本书是一本介绍时滞微分方程稳定性理论的入门书，由 6 章和附录组成. 第 1 章是绪论，以简单的一维 Logistic 方程为出发点，结合丰富的计算机数值模拟，简要直观地概括了时滞对方程动力学性质的影响. 第 2 章简要介绍传统的特征值方法在一些特殊的一维和二维线性自治方程零解稳定和振动性研究中的应用. 第 3 章以简单独特的方式介绍 Liapunov-Razumikhin 方法的基本思想和在一些具体方程中的应用. 第 4 章和第 5 章主要介绍时滞微分方程解的基础理论，主要包括解的存在唯一性，解的延拓和解对初始值的连续依赖性以及线性自治方程生成的解半群的分解等. 第 6 章详细介绍基于 Liapunov 泛函方法与 Liapunov-Razumikhin 方法建立的稳定性定理以及 LaSalle 不变性原理. 为方便读者，本书在附录一和附录二中还介绍一些超越方程零点分布问题以及 Dini 导数的概念与性质.

本书适合高等学校从事时滞微分方程稳定性理论及其应用研究的高等院校高年级大学生、研究生和青年教师阅读参考.

*Differential Equations with Time Lag—Introduction to Functional Differential Equations* by Toshiki Naito, Tadayuki Hara, Yoshiyuki Hino, and Rinko Miyazaki

Original Japanese edition published by Makino Shoten

**图书在版编目(CIP)数据**

时滞微分方程：泛函微分方程引论/(日)内藤敏机等著；马万彪，陆征一译. —北京：科学出版社，2013
(生物数学丛书；10)
ISBN 978-7-03-038120-0
Ⅰ. ①时… Ⅱ. ①内… ②马… ③陆… Ⅲ. ①时滞系统-微分方程②泛函方程-微分方程 Ⅳ. ①O175
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 149995 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

**科学出版社** 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

**新科印刷厂** 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 7 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2013 年 7 月第一次印刷 印张：10 1/4
字数：190 000

**定价：48.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 《生物数学丛书》编委会

**著者简历**(以日语发音为序)


内藤敏机　(Toshiki Naito)
1969 年　东京大学大学院理学研究科数学专攻硕士课程毕业
现　在　电器通讯大学电器通讯学部教授(理学博士)

原惟行　(Tadayuki Hara)
1973 年　大阪大学大学院基础工学研究科数理专攻博士课程中退
现　在　大阪府立大学大学院名誉教授(工学博士)

日野义之　(Yoshiyuki Hino)
1968 年　东北大学大学院理学研究科数学专攻博士课程毕业
现　在　千叶大学理学部教授(理学博士)

宫崎伦子　(Rinko Miyazaki)
1992 年　大阪府立大学大学院工学研究科数理工学专攻博士课程中退
现　在　静冈大学工学部副教授(理学博士)


**译者简历**


马万彪　(Ma Wanbiao)
1997 年　静冈大学大学院应用数学讲座博士课程毕业
现　在　北京科技大学数理学院教授(工学博士)

陆征一　(Lu Zhengyi)
1993 年　静冈大学大学院应用数学讲座博士课程毕业
现　在　四川师范大学数学与计算机学院教授(工学博士,博士后)



本书由日本牧野书店(东京)授权出版
原著出版时间：2002 年 11 月 10 日(第一版)

# 《生物数学丛书》序

传统的概念：数学、物理、化学、生物学，人们都认定是独立的学科，然而在 20 世纪后半叶开始，这些学科间的相互渗透、许多边缘性学科的产生，各学科之间的分界已渐渐变得模糊了，学科的交叉更有利于各学科的发展，正是在这个时候数学与计算机科学逐渐地形成生物现象建模，模式识别，特别是在分析人类基因组项目等这类拥有大量数据的研究中，数学与计算机科学成为必不可少的工具. 到今天，生命科学领域中的每一项重要进展，几乎都离不开严密的数学方法和计算机的利用，数学对生命科学的渗透使生物系统的刻画越来越精细，生物系统的数学建模正在演变成生物实验中必不可少的组成部分.

生物数学是生命科学与数学之间的边缘学科，早在 1974 年就被联合国科教文组织的学科分类目录中作为与“生物化学”、“生物物理”等并列的一级学科.“生物数学”是应用数学理论与计算机技术研究生命科学中数量性质、空间结构形式，分析复杂的生物系统的内在特性，揭示在大量生物实验数据中所隐含的生物信息. 在众多的生命科学领域，从“系统生态学”、“种群生物学”、“分子生物学”到“人类基因组与蛋白质组即系统生物学”的研究中，生物数学正在发挥巨大的作用，2004 年*Science*杂志在线出了一期特辑，刊登了题为“科学下一个浪潮 —— 生物数学”的特辑，其中英国皇家学会院士 Lan Stewart 教授预测，21 世纪最令人兴奋、最有进展的科学领域之一必将是“生物数学”.

回顾“生物数学”我们知道已有近百年的历史：从 1798 年 Malthus 人口增长模型，1908 年遗传学的 Hardy-Weinberg“平衡原理”；1925 年 Voltera 捕食模型，1927 年 Kermack-Mckendrick 传染病模型到今天令人注目的“生物信息论”，“生物数学”经历了百年迅速地发展，特别是 20 世纪后半叶，从那时期连续出版的杂志和书籍就足以反映出这个兴旺景象；1973 年左右，国际上许多著名的生物数学杂志相继创刊，其中包括 Math Biosci, J. Math Biol 和 Bull Math Biol；1974 年左右，由 Springer-Verlag 出版社开始出版两套生物数学丛书：*Lecture Notes in Biomathermatics* (二十多年共出书 100 册) 和*Biomathematics* (共出书 20 册)；新加坡世界科学出版社正在出版*Book Series in Mathematical Biology and Medicine*丛书.

“丛书”的出版，既反映了当时“生物数学”发展的兴旺，又促进了“生物数学”的发展，加强了同行间的交流，加强了数学家与生物学家的交流，加强了生物数学学科内部不同分支间的交流，方便了对年轻工作者的培养.

从 20 世纪 80 年代初开始，国内对“生物数学”发生兴趣的人越来越多，他 (她)

们有来自数学、生物学、医学、农学等多方面的科研工作者和高校教师，并且从这时开始，关于“生物数学”的硕士生、博士生不断培养出来，从事这方面研究、学习的人数之多已居世界之首．为了加强交流，为了提高我国生物数学的研究水平，我们十分需要有计划、有目的地出版一套“生物数学丛书”，其内容应该包括专著、教材、科普以及译丛，例如：① 生物数学、生物统计教材；② 数学在生物学中的应用方法；③ 生物建模；④ 生物数学的研究生教材；⑤ 生态学中数学模型的研究与使用等．

中国数学会生物数学学会与科学出版社经过很长时间的商讨，促成了“生物数学丛书”的问世，同时也希望得到各界的支持，出好这套丛书，为发展“生物数学”研究，为培养人才作出贡献．

陈兰荪

2008 年 2 月

# 著者的话

作者们非常荣幸我们共同的朋友马万彪教授和陆征一教授将《时滞微分方程 —— 泛函微分方程引论》一书译为中文在中国出版. 译者之一马万彪教授于1998—2000 年与在大阪府立大学工学部数理工学科同著者之一, 即我本人原惟行, 在同一个研究室从事时滞微分方程的共同研究. 在此期间, 马万彪教授对《时滞微分方程 —— 泛函微分方程引论》一书的初稿提出了有益的建议.

时滞微分方程中即便是线性方程的情形, 由于解空间为无限维空间, 较传统的常微分方程理解起来要困难得多. 同时, 目前为止出版的有关时滞微分方程方面的书对于初学者来说难以理解的居多数.

本书的写作过程中, 为了使初学者对时滞微分方程理论的理解更加容易, 我们力求在前半部分内容的叙述上简洁、具体. 同时, 插入了大量的方程轨线的数值模拟图. 这些图全部是利用 Runge-Kutta 法编译而成. 本书的后半部分内容稍微比较抽象些, 我们相信通过本书的学习, 可为读者进一步学习泛函微分方程理论的有关专著奠定基础. 本书中文版的出版若能够对中国学者们有所帮助, 这将是我们最大的欣慰.

最后, 作为本书著者的代表, 对《时滞微分方程 —— 泛函微分方程引论》一书中文版的出版表示衷心的祝贺.

原惟行

大阪府立大学大学院名誉教授

2012 年 8 月 20 日

# 译 者 的 话

时滞微分方程在工程技术、生命科学等诸多应用科学领域实际问题的理论研究中发挥着重要作用. 早在 1963 年, 科学出版社就出版了秦元勋、刘永清、王联研究员的专著《带有时滞的动力系统的运动稳定性》, 并于 1983 年, 原著者与安徽大学郑祖庥教授又重新修订出版. 之后, 我国学者陆续出版了多本泛函微分方程经典专著, 内容几乎包含所有的研究分支.

日本学者内藤敏机 (Toshiki Naito)、原 惟行 (Tadayuki Hara)、日野义之 (Yoshiyuki Hino) 和宫崎伦子 (Rinko Miyazaki) 共著的《时滞微分方程 —— 泛函微分方程引论》是一本学习泛函微分方程理论很好的入门教材, 本书虽然覆盖的内容非常有限, 但具有独特的写作风格和特点.

首先, 以简单低维时滞微分方程为出发点, 充分结合计算机数值模拟等手段, 非常直观地展示时滞的大小对微分方程解的渐近性态的影响. 其次, 通过对一些具体的时滞微分方程稳定性的理论分析, 凝炼出一般时滞微分方程 Liapunov 函数或泛函的构造技巧以及特征方程根的分布理论分析的基本方法. 这对于初学者特别是高等院校高年级大学生理解和掌握时滞微分方程稳定性理论研究的基本方法非常有帮助. 对时滞微分方程解的存在唯一性、解的延拓、解对初始值的连续依赖性以及自治线性微分方程解的谱分解等的论述, 完全采用与常微分方程一致的手法, 如 Picard 逐次逼近法、Cauchy 折线法等. 只要读者具有常微分方程基本理论知识, 便可以顺利地阅读这部分内容. 最后, 为了初学者阅读方便起见, 附录一和附录二主要介绍一些超越方程零点分布判定方法以及 Dini 导数的概念与性质. 此外, 参考文献中给出与时滞微分方程理论及其应用研究相关的一些重要英日文参考文献.

译者非常感谢本书著者, 特别是原惟行教授和宫崎伦子副教授以及青山学院大学竹内康博教授与大阪府立大学松永秀章副教授在编译、版权转让等方面所提供的许多帮助. 非常感谢中国科学院陈兰荪研究员推荐将本书列入《生物数学丛书》出版. 本书初稿的主要内容曾经在北京科技大学数学专业研究生课程中讲授过, 译者非常感谢译者所属单位相关领导, 以及崔景安教授、王稳地教授、刘贤宁教授、廖福成教授、郑连存教授、胡志兴教授和相处的每一位同事给予的鼓励与支持. 还要感谢黄刚和吕贵成两位博士以及研究生李丹、赖秀兰、董岳平、江志超等对译稿

给予精心的阅读与指正. 最后, 对科学出版社陈玉琢编辑在整个出版过程中给予的大力支持以及国家自然科学基金 (No.10671011, No.11071013)、北京科技大学冶金工程研究院基础研究基金、教育部博士点基金和四川师范大学创新研究基金给予的资助表示衷心的感谢.

马万彪　陆征一

2012 年 7 月 1 日

# 前　言

近年来, 依赖于过去时间状态的常微分方程 (泛函微分方程) 的重要性得到了广泛重视, 如理学、工学等研究领域, 越来越多的研究者认识到, 时滞微分方程相对于不含有时滞的传统的常微分方程能够更为准确地描述客观事物的变化规律. 数理生态学等研究领域, 也出现越来越多的含有时滞的微分系统. 然而, 与传统的常微分方程不同, 含有时滞的常微分方程, 即便是线性的情形, 对应的特征方程已经成为超越方程, 其特征根无法直接求出, 这也是一般理工科大学为二、三年级学生所开设常微分方程课程中无法讲授含有时滞的微分方程内容的一个重要原因.

目前用日语写的有关这一领域的入门书几乎没有, 而所能参阅的英文专著又比较难理解. 因此, 对含有时滞的微分方程的重要性以及这一领域的了解还很不够.

本书作为时滞微分方程理论的入门书, 作者在写作过程中力求简明扼要, 并插入了许多几何图形, 以方便读者的理解.

从事数理生态学的读者, 只要阅读本书的第 1 章、第 2 章、第 3 章以及第 6 章的一部分即可对时滞微分方程理论有初步的理解. 第 1 章是刊登在日本数理生态学会*News Letters* (No.24, 1997 年 12 月) 上综述性论文的基础上修改而成的.

工学研究领域的读者在阅读本书的第 1 章、第 2 章、第 3 章以及第 6 章后, 可以对 Liapunov 函数法在时滞微分方程稳定性理论中的应用有基本的理解.

本书的第 4 章、第 5 章、第 6 章以及附录一是以大学院数学专业硕士学位以上读者为对象, 要求读者具备较广泛的数学基础知识.

本书的第 1 章、第 2 章由原惟行教授 (Tadayuki Hara, 大阪府立大学) 执笔; 第 3 章由原惟行教授和宫崎伦子教授 (Rinko Miyazaki, 静冈大学) 共同执笔; 第 4 章由日野义之教授 (Yoshiyuki Hino, 千叶大学) 执笔; 第 5 章由内藤敏机教授 (Toshiki Naito, 电器通讯大学) 执笔; 第 6 章、附录一和附录二由宫崎伦子教授执笔; 全书内容的统一协调及数值模拟图由原惟行教授完成.

最后, 对本书原稿中的作图以及 Latex 文件的整理提供巨大帮助的同事冈浩司和大阪府立大学松永秀章博士表示衷心的感谢.

著　者

2002 年 6 月

# 目　　录

# 第 1 章　绪　　论

近年来, 生态系统研究中, 采用具有时间滞后的微分方程来建立数学模型变得越来越普遍. 然而, 对于一般的大学二年级学生, 只学习一些常微分方程的基础理论知识和简单的求解方法, 而有关具有时间滞后的微分方程的理论知识, 则在大学期间学得较少. 在本章中将对具有时间滞后的微分方程作简单的介绍.

## 1.1　Logistic 方程

首先看一个实例. 图 1.1 给出了数理生态学中熟知的羊的数量变化.

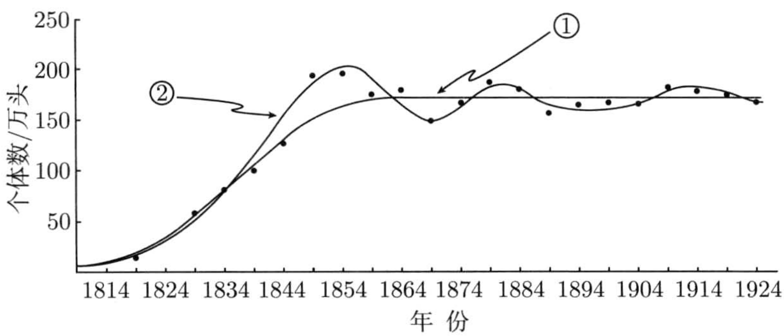


图 1.1　Tasumania 关于羊的数量的变化

注：黑点表示 5 年平均头数的变化 (Davidson J, 1938)

图 1.1 中, 黑点是依据具体的统计数据描述了羊的头数. 将这些黑点简单地用曲线来近似, 就可以得到曲线①. 曲线① 的变化可以用如下的**Logistic 方程** 来表示:

$$x'(t) = ax(t)\left\{1 - \frac{x(t)}{K}\right\}, \qquad (' = \mathrm{d}/\mathrm{d}t), \tag{1.1}$$

这里 $a$, $K$ 是正常数. 将 10 年视为 1 个周期, 依据图 1.1 中曲线①的变化, 确定出常数 $a$, $K$ 分别为 $a = 1$, $K = 180$. 于是, 得到初值问题:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left\{1 - \dfrac{x(t)}{180}\right\}, \quad t \geqslant 0, \\ x(0) = 10. \end{cases}$$

利用计算机数值模拟可以发现上述初值问题的解曲线 (图 1.2) 与图 1.1 中的曲线①几乎一致.

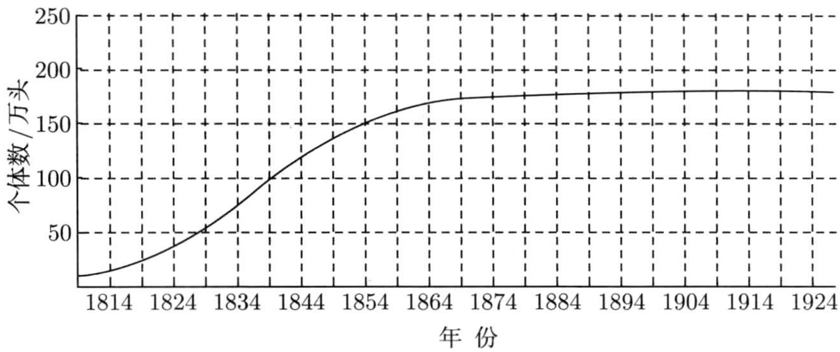


图 1.2　Logistic 方程 (1.1) 的解曲线

但是, 依据图 1.1 中所给的统计数据, 不难发现羊的头数以增加或减少振动的方式趋近于 180 万头. 因此, 方程 (1.1) 并未能较准确地描述羊的数量变化. 然而, 依据图 1.1 中的统计数据, 并注意到增减性的变化, 得到的近似曲线为②. 为了再现曲线②, 我们来考虑如何对方程 (1.1) 进行适当的改进?

为此, 考虑如下**具有时滞的 Logistic 方程**

$$x'(t) = ax(t)\left\{1 - \frac{x(t-r)}{K}\right\}, \tag{1.2}$$

其中 $r > 0$ 是时滞. 方程 (1.2) 表明时刻 $t$ 单位种群的增加依赖于 $t-r$ 时刻的种群数量.

现在, 仍将 10 年视为 1 个周期, 选取方程 (1.2) 中的常数 $a, K, r$ 分别为 $a = 1, K = 180, r = 1$, 利用计算机数值模拟可以发现初值问题:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left\{1 - \dfrac{x(t-1)}{180}\right\}, & t \geqslant 0, \\ x(t) = 10, & -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases}$$

的解曲线为图 1.3 中的粗黑曲线.

显然, 上述解曲线图 1.3 与图 1.1 中的曲线②并非完全一致. 然而, 它却清楚地表明了羊的总头数以振动的方式趋近于 180 万头. 因此, 利用具有时滞的微分方程来描述种群数量或密度的变化显得更为有效.

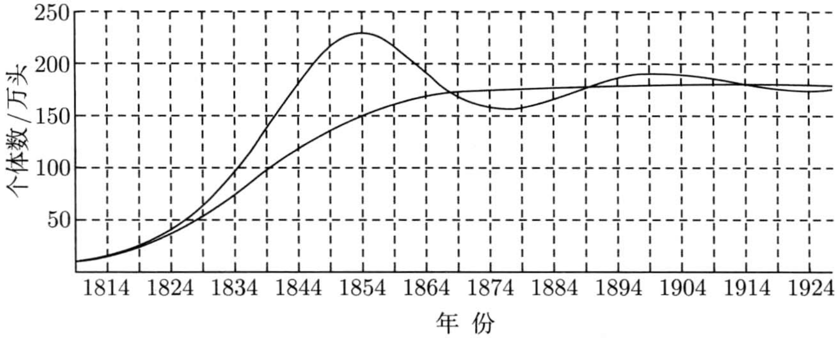


图 1.3 具有时滞的 Logistic 方程 (1.2) 的解曲线

作为时滞微分方程简单的例子, 1.2 节将要考虑一阶线性常系数微分差分方程.

## 1.2 一阶线性微分差分方程

首先, 对于如下的一阶线性常微分方程的初值问题:

$$x' = -ax \quad (\,' = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\,), \tag{1.3}$$

$$x(0) = 1 \quad (初始条件). \tag{1.4}$$

大学二年级的学生也可以知道其精确解为 $x(t) = \mathrm{e}^{-at}$, 且对应的解曲线如图 1.4 所示.

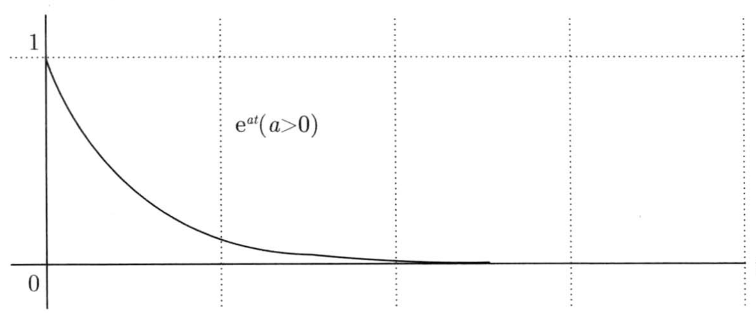


图 1.4 方程 (1.3) 满足初始条件 (1.4) 的解曲线

方程 (1.3) 可以写为如下形式:

$$x'(t) = -ax(t-0).$$

此方程可以看成不含有时滞的常微分方程.

与方程 (1.3) 相比较, 考虑如下具有时滞的线性微分方程:

$$x'(t) = -ax(t-r). \tag{1.5}$$

这里 $a \in \mathbf{R}$, $r > 0$. 方程 (1.5) 这种含有时滞的微分方程又称为**微分差分方程**. 下面主要考虑如下的问题:

与方程 (1.3) 相比较, 时滞 $r$ 对方程 (1.5) 的解 $x(t)$ 产生什么样的影响? 方便起见, 取初始时刻为 $t_0 = 0$.

不含有时滞的方程 (1.3) 的初值问题中, 其初始条件为 (1.4). 然而, 对于含有时滞的方程 (1.5), 其初值问题中, 初始区间 $-r \leqslant t \leqslant 0$ 上需要给出**初始函数**.

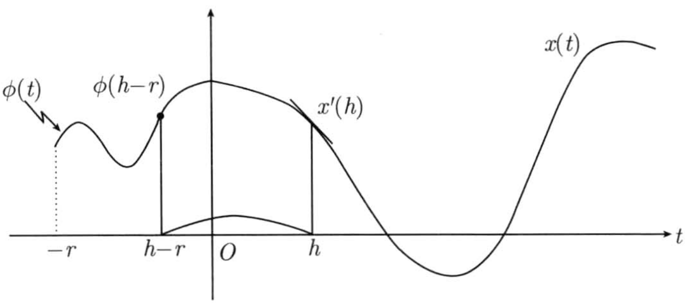


图 1.5　方程 (1.5) 的初始函数与解曲线

需要给定初始函数的理由为：若在方程 (1.5) 中令 $t = h(0 \leqslant h \leqslant r)$, 则方程 (1.5) 的左端的导数值 $x'(h)$ 将由右端的函数值 $-ax(h-r) \equiv -a\phi(h-r)$ 来确定. 因此, 方程 (1.5) 的初值问题中, 在初始区间 $-r \leqslant t \leqslant 0$ 上需要事先给出初始函数 $\phi$.

现在, 考察满足方程 (1.3) 满足初始条件 (1.4) 的解 $x(t) = \mathrm{e}^{-at}$ 的求解方法. 设方程 (1.3) 具有形如 $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}(c \neq 0)$ 的解, 并代入方程 (1.3) 得

$$c\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = -ac\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

两端除以 $c\mathrm{e}^{\lambda t}$, 便得

$$\lambda = -a.$$

因此, 方程 (1.3) 的通解为 $x(t) = c\mathrm{e}^{-at}$. 利用初始条件 (1.4), 有 $c = 1$, 所以, 得到特解 $x(t) = \mathrm{e}^{-at}$.

将同样的方法用于方程 (1.5), 即设方程 (1.5) 亦具有形如 $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}(c \neq 0)$ 的解, 并代入到方程 (1.5) 得

$$c\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = -ac\mathrm{e}^{\lambda(t-r)} = -ac\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda r}.$$