初等数学导读丛书

王占元　宗福衡

直线

CHUDENG SHUXUE DAODU CONGSHU

中国科学技术出版社

初等数学导读丛书

直线

王占元　宗福衡

中国科学技术出版社

内 容 提 要

全书共分两章。第一章重点论述了初中平面几何的基本概念，如点、线、面、体，直线、射线、线段的区别与联系，介绍几种相关的角，以及容易混淆的概念；第二章重点阐述了相交线，平行线等概念，怎样掌握平行线的判定和性质，以及有关命题和几何证明等入门知识。

本书深入浅出，既有理论上的论述，又有大量的例题和插图，可供中学生、社会青年，以及教师参考。

初 等 数 学 导 读 丛 书

直 线

王占元 宗福衡

责任编辑：张春荣

封面设计：赵一东

技术设计：赵丽英

*

中国科学技术出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京昌平长城印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：3.375 字数：73千字

1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印数：1—8 000册 定价：1.95元

ISBN 7-5046-0476-3/G·36 登记证号：（京）175号

目　录

第一章 基本概念

不少同学都看过《唐老鸭漫游数学奇境》这部科教电影。唐老鸭在数学王国的漫游中遇到了许许多多的数学问题，其中有不少属于几何问题，比如黄金分割、勾股定理等等。

在日常生活中，也会遇到许许多多有趣的问题，比如：

井盖为什么大多都做成圆形的，而不做成方形的？

车轮为什么要做成圆形的？

利用一根宽窄一样的纸条和一根直尺能不能画一个五角星？

利用横格本能不能把一条线段分成相等的几部分？

七巧板可以拼出各种各样的图形，这是根据什么数学原理？

这样的问题太多了，真是举不胜举。而解决这些问题的钥匙在哪里呢？其实就在同学们的手中。当同学们学习了几何的知识，又学会了思考问题的方法，那么就等于给思维插上了翅膀，对许多问题你自己就会找到答案。

几何难学不难学呢？我们说，只要掌握了学习要领，几何不但不难学，而且越学越有兴趣，有时会使你废寝忘食。

在学习几何时，只把定义、公理背下来还不够，还要真正领会它们的含义；只孤立地了解了课本上的一些内容还不够，还要弄懂这些内容的内在联系；不但要知其然，还要知其所以然。我们在本书中给同学们介绍的一些知识，正是为了帮助同学们深刻理解课本上的有关知识，开阔知识的视野，

提高思维的深度和广度，从而能够在几何王国里驰骋。

一、怎样理解点、线、面、体

点、线、面、体是几何中最基本的概念，我们可以从静止的角度来认识它们，又可以从运动的观点来理解它们。

1. 从静止的角度认识点、线、面、体

(1) 体

每一个物体都有很多特性，比如形状、大小、颜色、比重、材质、密度、硬度等等。如果我们只研究其中的形状和大小，而不研究它的其他性质，我们就称这个物体为几何体，几何体简称为“体”。

比如，桌上摆着三个球，一个是木制的，一个是玻璃的，一个是塑料的。尽管他们的材料、颜色、重量、用途等性质都有很大的不同，但只要它们的形状、大小都完全相同，我们就把这三个几何体看作是相同的几何体。

(2) 面

面是体的界限。比如一个长方体有六个面，借助于这六个面就把这个长方体和其他物体分开；又如圆柱体有两个平面和一个曲面，球体有一个曲面。由此看出，面是体的界限，面又可以分为平面和曲面两种。

几何中所说的面，只去考虑它的形状和大小，而不去考虑它的厚薄。比如在一个透明的玻璃杯内先放进一些水，再在上面倒一些油，这时候会看到，在油和水的分界处形成了一个平面，这个面没有厚薄，只是油和水的界限。

(3) 线

线是面的界限。比如长方体是由六个平面围成，每两个

面之间由一条线分开，一共有十二条线。几何中所说的线，只考虑它的长度而不考虑它的宽窄。比如在一张白纸上涂上一小片墨汁（图1-1），我们便会看到，在白纸和墨汁之间形成一条曲线。线分为直线和曲线。

图 1-1

（4）点

点是线的界限。比如长方体的三条棱（线）之间由一个点分开。点只考虑它的位置，而不考虑它的大小。在地图上用点来表示一个城市的位置，但这个点不反映这个城市的大小；在星座图上，点表示某一个星座的位置，不反映星座的大小。

点、线、面是不加定义的概念，我们把它们称为原始概念，又称为基本概念。点、线、面是构成体的元素。

2．从运动的观点理解点、线、面、体

（1）点动成线

当一个点作连续运动时，就形成一条线，比如在夜晚观察天空中的流星，它是一个星体（可以看作是一个点）坠落时构成的线；又如手拿一根点燃的香在夜晚快速摇动，我们也会看到香头（可以看作是一个点）在运动中形成一条线。这些都给我们点动成线的形象。如果你善于思索，那么就请你猜猜下面的一个谜语说的是什么自然现象，你能从中悟出点和线之间的联系吗？这条谜语是：

“千条线，万条线，落到水里都不见”。

（2）线动成面

也许有细心的同学观察过自行车的辐条，它们是一条条线段，当自行车快速行驶时，我们便会发现，一根根的车条形成了一个平面，这就说明线动成面。又如，菜刀的刀刃是

一条线，当它切豆腐时，随着刀刃的上下运动，便在豆腐块上形成一个平面。请同学们再留心观察一下，还能举出线动成面的例子吗？

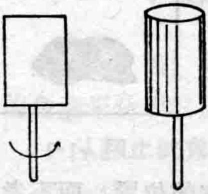

图 1-2

（3）面动成体

我们先做一个小实验：手拿一把带柄的长方形纸扇，两只手夹住把柄用力搓动，使扇子快速旋转起来，这时请你观察，便会发现长方形的纸扇便会形成一个圆柱体（图1-2），这说明面动成体。

二、直线、射线、线段的区别与联系

1．直线是不定义的概念

我们知道，要学习一个新的概念时，就要描述出它和其他概念的区别，也就是阐明它的本质特征，那就需要用已经学过的概念来进行描述；而已经学过的概念又需要用它之前学过的概念来加以描述。这样一直往前推，必然要碰到这样一些概念，它们无法加以定义，这种概念叫做原始概念或基本概念，只能用描述的方法来说明它们的特征。

直线就是一个不加定义的概念，在一些书上常用一些通俗的例子来加以描述，比如阳光从一个小孔穿过，这缕光线给我们以直线的形象，又如用两手把一根线拉紧，这条线也给我们以直线的形象。这种描述的方法只是为了帮助人们认识它们的特征，而不是给这些概念下定义。

线有直线和曲线之分，面有平面和曲面之别。那么怎样区分直线和曲线呢？一般用“公理”来刻划它们的特征：

公理 过两点有一条且只有一条直线。

直线的这条特性是曲线所不具备的，只有直线才有，这样便把直线和曲线区分开了。比如，我们通过一点画线，既可以画无数条直线，又可以画无数条曲线（图1-3）。但是，过两个点画线，从图 1-4 可以看出，它可以画出 无 数 条 曲线，但只可以画出一条直线。

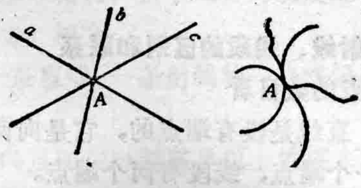

图 1-3

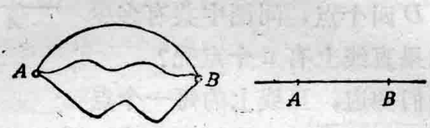

图 1-4

直线的这个特征叫做直线的基本性质，也就是公理，这个性质在实践中有许多应用。比如，木工师傅在木板上先点出两个点的位置，然后沿着这两个点弹出一条墨线，就定出了通过这两个点的直线（图1-5）。又如，在植 树 时，为了使种的树在一条直线上，先定出其中两个树坑的位置，然后

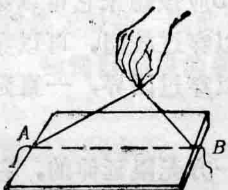

图 1-5

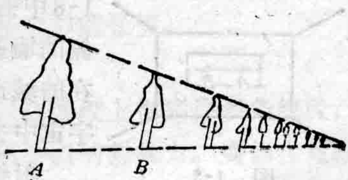

图 1-6

经过这两个点画一条直线，其他树坑的位置就在这条直线上去确定（图1-6）。

当明白了直线的概念以后，便可以应用它给射线和线段下定义：直线上某一点一旁的部分叫做射线，这点叫做射线的端点；直线上两点间的部分叫做线段，这两个点叫做线段的端点。

2. 直线、射线、线段的区别和联系

（1）从端点的数目看

我们知道，直线是没有端点的，它是向两方无限延伸着的；射线只有一个端点，线段有两个端点。

例1 已知：如图1-7，直线上有A、B、C、D四个点，问图中共有多少条射线？如果直线上有n个点呢？

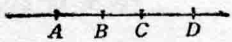

图 1-7

解：我们知道，直线上的每一个点都把直线分成两条射线；我们又知道，端点不同的射线看作是不同的射线，因此，图中直线上有四个点，因此便有八条射线。

如果直线上有n个点，由于每个点都把直线分成两条射线，因此共有2n条射线。

（2）从无限延伸性看

直线是向两方无限延伸的，也就是要多长就有多长。图1-8中的直线AB应该想象它可以穿透两侧的墙壁，可以穿过校园，可以穿过所在的城市，可以穿过国界，一直延伸到宇宙中去。

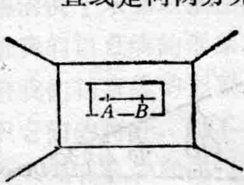

图 1-8

射线是向一方无限延伸的，它可以向一方无限延伸到宇宙中去，而线段的长度却是有限的。

例2 已知：图1-9中 a 表示一条直线，b 表示一条射线，c 表示一条线段，问图中的三条线中哪些可以相交？

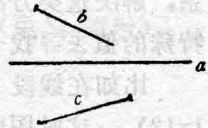

图 1-9

解： 由于直线可以向两方无限延伸，射线可以向一方无限延伸，所以射线 b 可以和直线 a 相交；由于线段的长度是有限的，图中的 a、b 都不能与 c 相交。

例3 画一条直线、一条射线和一条线段，使它们分别不相交。

解： 图1-10及图1-11都满足以上的要求，其中图1-10中的a、b、c 互相平行，因此它们不相交；而图1-11中的 a、b、c 从无限延伸性上来看它们不能相交，由此可以看出，图1-11的画法比较简单。

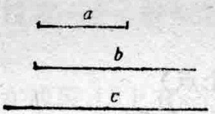

图 1-10

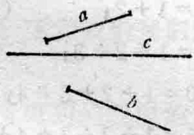

图 1-11

（3）从全量与部分看

在同一条直线上，射线是直线的一部分，线段是射线的一部分，也是直线的一部分。

这里应该指出的是，虽然射线是直线的一部分，但由于它们都是无限的，因此不能比较它们的长短。

3．如何数线段的条数

在一条线段上取若干个点，在线段上得到许多条线段，通过数线段的条数，可以发展同学们的想象力。要想在数线段时做到不重不漏，就要善于分析，找到它们之间的内在联

系。解决这类方法通常采用不完全归纳法，也就是通过一些特殊的值去寻找一般的规律。

比如在线段 AB 上取一个点 C（图1-12），这时图中共有3条线段（AC、AB、CB）；

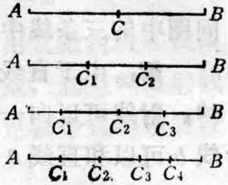

图 1-12

在线段 AB 上取两个点 C_1、C_2，图中共有 6 条线段（AC_1、AC_2、AB、C_1C_2、C_1B、C_2B）；

在线段 AB 上取三个点 C_1、C_2、C_3，图中共有10条线段；

在线段 AB 上取四个点 C_1、C_2、C_3、C_4，图中共有15条线段。

这里面有什么规律呢？我们通过观察所得到的线段的条数3、6、10、15，看看它们与所取点的个数之间有什么联系。

我们把这些数加以分解：

$3=1+2$；　　（取1个点）

$6=1+2+3$；　　（取2个点）

$10=1+2+3+4$；　　（取3个点）

$15=1+2+3+4+5$。　　（取4个点）

我们发现得到的线段的总条数可以分解成从1开始的若干个连续的自然数的和，其中最后一个加数比所取的点的个数多1。

按这个规律，我们可以写出在线段 AB 上取5个点得到的线段的总数为（用 S_5 表示）：

$$S_5=1+2+3+4+5+6$$
$$=21；$$

在 AB 上取9个点得到的线段的总数为（用 S_9 表示）：

$$S_9=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$
$$=55；$$

在AB上取99个点时，线段的总数为（用S_{99}表示）：

$$S_{99}=1+2+3+\cdots+98+99+100$$
$$=5050。$$

为了便于记忆，我们把线段上各个分点（包括线段的两个端点）编上号，依次命名为0，1，2，…，n，把这些号码加起来，其结果和上面的结果是一样的。

比如，在线段AB上取7个点，像图1-13那样编上号，再把这些号码加起来，即

$$S_7=0+1+2+3+4+5+6+7+8$$
$$=36。$$

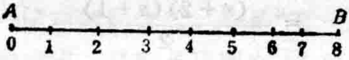

图　1-13

有没有一个一般性的公式呢？有！下面我们来归纳出这个公式。

设在线段AB上有n个分点，那么所得到的线段的总数象前面有1个点、2个点、3个点、4个点那样，可以得到

$$S_n=1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)。$$

这个式子能不能化简得更简单一些呢？我们先用具体的一些数来寻求它的简单求法。

比如求$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$的和。可以把这些数字调过头来再写一遍，得到

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & 1+ & 2+ & 3+ & 4+ & 5+ & 6+ & 7+ & 8+ & 9+ & 10 \\ +) & 10+ & 9+ & 8+ & 7+ & 6+ & 5+ & 4+ & 3+ & 2+ & 1 \\ \hline & 11+ & 11+ & 11+ & 11+ & 11+ & 11+ & 11+ & 11+ & 11+ & 11 \end{array}$$

即　$$11\times10=110.$$
$$110\div2=55.$$

把上面的运算可以概括成：

$$S=\frac{(首项+末项)\times 项数}{2}$$

$$S_{10}=\frac{(1+10)\times 10}{2}=55$$

$$S_{100}=\frac{(1+100)\times 100}{2}=5050$$

下面我们来求S_n。

$$S_n=\frac{[1+(n+1)](n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+3n+2).$$

有了这个公式，以后求线段条数时，只要把线段上取点的个数n代入到上面的公式中就可以了。

比如在线段AB上取50个点，那么公式中的$n=50$，代入公式得

$$S_{50}=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}(50^2+3\times 50+2)$$

$$=1326.$$

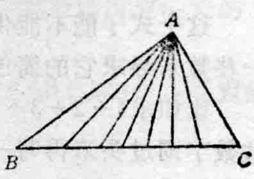

图 1-14

当我们掌握了数线段的条数的方法以后，可以把这个公式引伸到数三角形的个数中去。如图1-14中，BC边上有6个点，问图中共有多少个三角形？

这个问题实质上是BC上每一条线段都可以和A点组成一个三角形，因此，BC边共有多少条线段，图中就有多少个三

角形。

当BC边上有6个点时，BC边上线段的总数为

$$S_6=\frac{1}{2}(6^2+3\times6+2)$$

$$=28.$$

那么图中共有28个三角形。

4．能画多少条直线

前面曾说过直线的基本性质是过两点有一条且只有一条直线，这个性质通常可以简述为："两点确定一条直线"，这里的"确定"一词有两层含义，一是"有一条"，二是"只有一条"。前面的"有一条"是说明它的存在性，后面的"只有一条"是说明它的唯一性。

根据两点确定一条直线的性质，我们可以计算直线的条数。

例4 已知A、B、C是不在一条直线上的三个点，过每两点画一条直线，问一共可以画出多少条直线？

解：由于两点确定一条直线，过A、B两点，B、C两点、C、A两点可以分别画出一条直线，因此一共可以画出3条直线（图1-15）。

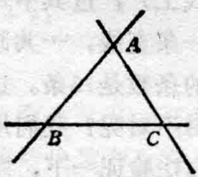

图 1-15

例5 已知A、B、C、D是平面上的四个点，其中任意三点不在一条直线上，问过每两点画一条直线，共可以画出多少条直线？

解：如图1-16过A、B两点，B、C两点，C、D两点，D、A两点，A、C两点，B、D两点可以分别画出一条直线，这样一共可以画出6条直线。

例6 已知A、B、C、D、E是任意三点都不在一条直线上的五个点，过其中每两点画一条直线，问一共可以画出多少条直线？

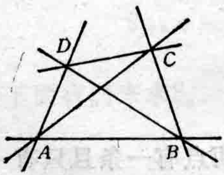

图 1-16

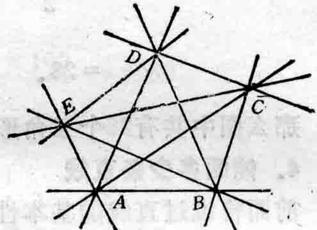

图 1-17

解：过每两点画一条直线，一共可以画出10条直线（图1-17）。

有些细心的同学可能会从例4、例5、例6中得到的结论中看出，画出直线的条数3、6、10恰与数线段的条数得到的数一样。于是可以进而猜测如果在平面上有六个点（其中任意三点都不在一条直线上），过其中每两点画一条直线，一共画出直线的条数是15条。这个结论对不对呢？我们用画图的方法验证一下，发现确实是15条直线（图1-18）。但是，这是不是一般的规律呢？下面我们来研究这个问题。

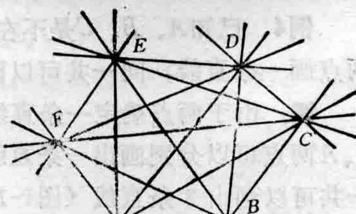

图 1-18

这一类的问题应该怎样考虑呢？我们观察以上各图，不难发现，图中的每一个点都可以和其余各点画出一条直线，