东北师范大学数学教学参考资料

# 高等代数习题集

（附答案与解法）

上　册

数学系代数教研室编

北师范大学

一九八〇年十月

# 目　　录

## 习题答案与解法

# 第六章 线 性 空 间

## §1. 线性空间定义

### 基 本 内 容

**定义1．** 设$V$是一个非空集合，$F$是数域。如果在$V$中定义一个叫做加法的代数运算，即$\forall\alpha$，$\beta\in V$，在$V$中有唯一的一个元素$\nu$与之对应，称为$\alpha$与$\beta$的和，记为$\nu=\alpha+\beta$；在$V$和$F$之间还定义一个叫做数乘的作用乘法，即$\forall k\in F$，$\alpha\in V$，在$V$中有唯一元素$\delta$之对应，称为$k$与$\alpha$的数量乘积，记为$\delta=k\alpha$，对上述两种运算如果满足

1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3）在$V$中存在元素0，对$V\alpha\in F$，都有$0+\alpha=\alpha$，称0为$V$的零元素。

4）对于$V$中每一$\alpha$都存在$\beta\in V$使得$\alpha+\beta=0$称$\beta$是$\alpha$是负之素。

5）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

6）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

7）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

8）$1\cdot\alpha=\alpha$

其中$k\cdot l\in F$，$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\in V$，则称$V$是$F$上的线性空间，记作$V(F)$。$F$叫做$V$的基域，线性空间$V$中的元素叫做向量。

在线性空间中有以下简单性质：

零元素是唯一的，称为零向量；负元素也是唯一的，也称为负向量，并记$\alpha$的负向量为$-\alpha$，且有$0\alpha=0$；$k\cdot 0=0$；$(-1)\alpha=-\alpha$；$k\alpha=0$当且仅当$k=0$或$\alpha=0$。

### 习 题

1 在线性空间的定义中，，3），4）两条可换成等价条件：对$V$中任意两元素$\alpha$，$\beta$，一定存在元素$x$使$\alpha+x=\beta$，记$x=\beta-\alpha$。

2．证明线性空间具有如下两条性质

1）$-(k\alpha)=(-k)\alpha=k(-\alpha)$　　2）$k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$

3．有没有一个向量的线性空间，有没有两个向量的线性空间，有没有$m$个向量的线性空间？

4．按通常的多项式加法和数与多项式乘法，下列集合是否构成数域$F$上的线性空间？

1）$F[x]$：数域$F$上所有一元多项式的集合。

2）$F[x]_n$：数域$F$上次数不大于$n$和零多项式的集合。

3）$F[x]^n$：数域$F$上次数等于$n$的多项式集合。

5. 在几何空间 $R_3$ 中，按通常的向量加法和数乘向量的运算，下列集合是否是实数域$R$上的线性空间。

1）过原点平面$H$上所有向量集合。2）位于第一卦限，以原点为始点的向量集合。

3）位于第一，三卦限，以原点为始点的向量集合。 4）$x$ 轴上的向量集合

5）平面$H$上，不平行某向量的向量集合。

6. 按通常的阵的加法和数乘阵的运算下列集合是否构成数域$F$上的线性空间

1）$M_{m\times n}$：数域 $F$ 上 $m$ 行 $n$ 列阵的集合；

2）$M_n$：数域 $F$ 上 $n$ 阶方阵的集合；

3）$GL_n(F)$：数域 $F$ 上 $n$ 阶可逆阵的集合

4）$SL_n(F)$：数域$F$上行列式为 1 的 $n$ 阶方阵的集合；

5）数域$F$上 $n$ 阶对（反）称阵的集合：

6）数域$F$上 $n$ 阶上（下）三角形阵的集合；

7）数域$F$上迹为 0 的 $n$ 阶方阵的集合：

8）数域$F$上，主对角线元素为 0 的 $n$ 阶方阵的集合；

9）数域$F$上 $n$ 阶 0 阵的集合；

10）数域$F$上 $n$ 阶单位阵集合；

7. 按通常的函数加法和数乘函数运算，下列集合是否构成实数域$R$上 的线 性 空间。

1）〔0　1〕区间上的实函数集合　2）〔0　1〕区间上连续函数集合$c$〔0，1〕

3）〔0　1〕区间上积分为 0 的函数集合。

8. 按通常的数的加法和数的乘法，下列数集是否构成有理数域$Q$上的线性空间；是否构成实数域$R$上的线性空间？

1）整数集$Z$　　2）有理数集$Q$　　3）实数集$R$

4）复数集$C$　　5）单个数集$\{0\}$　　6）$n$ 个数集$N=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$

9. 按通常矩阵的加法和数乘运算，下列集合是否构成给定数域上的线性空间

1）实数域上的 $n$ 阶方集合，是否构成复数域$C$上的线性空间

2）复数域上 $n$ 阶方阵集合，是否构成实数域上的线性空间，

10）设$M=\{(a,b)|a,b\in k\}$其中$R$是实数域，规定

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$k\cdot(a,\ b)=(ka,\ kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$$

问$M$关于运算$\oplus$，$\cdot$是否构成$R$上的线性空间？

11. 设$R^+$是正实数集合，$R$是实数域，规定：

$$a\oplus b=ab,\ k\cdot a=a^k$$

其中$a$，$b\in R^+$，$k\in R$，问$R^+$关于运算$\oplus$和$\cdot$是否构成$R$上的线性空间？

12. 设$U=\{\cos\alpha+i\sin\alpha|\alpha\in R\}$其中$R$是实数域，规定

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\oplus(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$k\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

间$U$关于运算⊕，·是否构成$R$上的线性空间。

13. 平面上全体向量，对于通常加法和如下定义数量乘法$k\alpha=0$是否构成向量空间。

14. 集合与加法同上题，对于如下定义数量乘法，$k\alpha=\alpha$是否构成向量空间。

15. $V=\{ax_1^2+bx_1x_2+x_2^2|a,\ b,\ c\in F\}$关于多项式的加法和数乘多项式乘法，$V$是不是线性空间？

16. 由零和次数为$n$的两个未知量的齐次多项式全体所构成的集合，关于多项式的加法和数与多项式乘法是否构成线性空间。

17. 对于齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的全部解是否构成线性空间。

## §2. 线 性 相 关 性

### 基 本 内 容

第四章§1关于线性相关性与极大无关组和向量组的秩以及向量组等价等概念均可一字不改地推广到一般向量组上，只是向量的含义更广了，不限于$n$元向量，也可是矩阵，多项式或其它研究对象。

**定义2.** 若向量$\beta$可被向量组$\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\}$的有限部分线性表出，则称$\beta$被向量组$\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\}$线性表出。

**定义3.** 若向量组$\{\alpha_1,\ \alpha_2\cdots\}$每个有限部分都是线性无关的，则称该向量组线性无关。

**定理1，** 若$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m(m\geqslant 2)$线性相关当且仅当其中必有一个向量被其余线性表出。

### 习 题

本书第四章§1中的题均可作为本节的题来做。

18. 若$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_s$是$V(F)$中线性无关的向量组，讨论$k_1\alpha_1,\ k_2\alpha_2,\cdots,k_s\alpha_s$的线性相关性$k_i\in F$。

19. 判断下列论断是否正确？

1）如果当$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$那么$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$线性无关。

2）如果$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_r$线性无关，而$\alpha_{r+1}$不能由$\alpha_1,\ \alpha_2\cdots\alpha_r$线性表出，那么$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_r,\ \alpha_{r+1}$线性无关。

3）如果$\alpha_1,\ \alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关，那么其中每个向量都不能被其余向量线性表出。

4）如果$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_r$线性相关，那么其中每个向量都可被其余向量线性表出。

20. 若向量组 $\{\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m\}$ 的秩为 $r$，则向量组中每个向量皆可被向量组中的 $r$ 个线性无关向量线性表出，且表法唯一。

21. 若向量组 $\{\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m\}$ 可被向量组 $(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)$ 线性表出，而$\{\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n\}$可被 $\{\gamma_1\ \gamma_2\cdots\gamma_p\}$ 线性表出，则 $\{\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m\}$ 可被 $\{\gamma_1\ \gamma_2\cdots\gamma_p\}$ 线性表出。

22. 在实函数线性空间中，下列函数集合是否线性相关。

1）$1, \cos^2x, \cos 2x$；　2）$1, \sin^2x, \cos^2x$；　3）$\{\cos(n\arccos x)\mid n=1,2\cdots\}$

23. 在实系数多项式空间 $P[x]$中，下列多项式集合是否线性相关。

1）$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$是互质的，但两两又不互质。

2）$T=\left\{\sum\limits_{i=0}^{n}x^i\ \middle|\ n=0,\ 1,\ 2\cdots\right\}$　3）$U=\{f(x)\mid f(x)\in P[x]且f(0)=0\}$

24. 设$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关，如果$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$且$k_i\neq 0$，那么$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_{i-1}\beta\ \alpha_{i+1}\cdots\alpha_n$线性无关。

25. 如果向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_s$满足：1）$\alpha_1\neq 0$，2）$\alpha_i$ 不能被前面 $i-1$ 个向量线性表出，$(1<i\leqslant n)$ 证明$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$ 线性无关。

26. 设$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m$（1）是不全为0的向量组，证明在（1）中存在线性无关的向量组$\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_r$（2），使（1）可被（2）线性表出。

27. 在多项式空间 $P[x]$中，向量组 $f_i(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x^j\,(i=1,2,\cdots,m)$ 是线性无关的，试证向量组 $g_i(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_{ij}x^j+\sum\limits_{j=n+1}^{n+k}b_{ij}x^j$　$(i=1,2,\cdots,m)$是线性无关的。

28. 在$P[x]$中，向量组 $g_i(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}a_{ij}x^j+\sum\limits_{j=k+1}^{n}b_{ij}x^j$　$(i=1,2,\cdots,m)$线性相关的，求证向量组　$f_i(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}a_{ij}x^j$　$(i=1,2,\cdots,n)$线性相关

29. 在 $P[x]$ 中，试求向量组 $T=\{f(x)\mid \deg f(x)=n\}$的一个极大无关组。

30. 在 $P[x]$ 中，试求向量组$T=\left\{\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\mid n=0,\ 1,\ 2\cdots\right\}$的一个极大无关组。（称$T$为勒让德尔 *Legendre* 多项式组）

31. 设向量$\beta$可被$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_r$线性表出，但不能被$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_{r-1}$线性表出，则$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_r$与$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\beta$等价。

32. 设向量组$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关，而$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_r$，$\beta$，$\gamma$线性相关，证明或者$\beta$与$\gamma$至少有一个可被$\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_r$线性表出，或者$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_r$，$\beta$与$\alpha_1\alpha_2$，$\cdots\alpha_r\gamma$等价。

## §3. 基底、坐标与维数

**定义 4**. 设$\alpha_1$，$\alpha_2\cdots\alpha_m$是$V(F)$中的一组向量，如果$V(F)$中的每个向量都可被

$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_m$ 线性表出时，则称 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_m$ 是 $V(F)$ 的生成组，当 $V(F)$ 存在有限个向量构成生成组时，称 $V(F)$ 是有限维线性空间。否则，称为无限维线性空间。

**定义5．** 有限维线性空间 $V(F)$ 的线性无关生成组叫做 $V(F)$ 的基底。

**定义6．** 有限维线性空间 $V(F)$ 的基底所含向量个数是唯一确定的，称此数叫做 $V(F)$ 的维数。只有一个零向量所构成的线性空间的维数规定为0，维数是 $n$ 的数域 $F$ 上的线性空间叫做 $n$ 维向量空间，记作 $V_n(F)$。

**定义7．** 线性空间向量 $\beta$，被基底线性表出时，其表出系数是唯一的，称此系数为 $\beta$ 在该基底上的坐标。

## 习　　题

33．设 $\alpha_1=(1,0,-1,0,-1)$，$\alpha_2=(0,1,0,1,1)$，$\alpha_3=(1,-1,0,1,1)$，$\alpha_4=(1,0,-1,1,0)$ $\alpha_5=(2,-1,-1,2,1)$ 是 $V_5$ 的生成组，证明 $\beta_1=(1,0,0,2,2)$ $\beta_2=(2,-1,-1,1,0)$ $\beta_3=(1,1,-1,1,0)$ 是 $V_5$ 中3个线性无关向量，求在 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$，$\alpha_5$ 中找出三个向量用 $\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$ 代替使之仍为生成组。

34．证明：$x^2+x$，$x^2-x$，$x+1$ 是 $P[x]_2$ 的基底，并求出 $2x^2+7x+3$ 在此基底上的坐标。

35．在 $V_n(F)$ 中，线性无关向量组所含向量个数不超过 $n$。

36．在 $V_n(F)$ 中，生成组所含向量个数不小于 $n$。

37．在 $V_n(F)$ 中，$n$ 个向量所构成的生成组，一定是基底。

38．若 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$ 能将 $V(F)$ 中每个向量唯一线性表出，则 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$ 是 $V(F)$ 的基底。

39．若 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$ 能将 $V(F)$ 中每个向量线性表出，又对 $V(F)$ 中某一向量 $\beta$ 表法唯一，则 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$ 是 $V(F)$ 的基底。

40．求 $P[x]_n$ 的维数。

41．在 $P[x]_n$ 中，令 $f_i(x)=\sum\limits_{j=0}^{i}a_{ij}x^j$，其中 $a_{ii}\neq0$，$(i=0,1,2,\cdots,n)$ 证明，$f_0$，$f_1\cdots$，$f_n$ 是 $P[x]_n$ 的基底。

42．在 $P[x]_n$ 中，如果 $\deg f(x)=n$，求证 $f(x)$，$f'(x)$，$\cdots$，$f^{(n)}(x)$ 是 $P[x]_n$ 的基底。如果，$f(x)=(x-a)^n$，对任一 $g(x)\in P[x]_n$ 如何求它的坐标？

43．已知 $P[x]_n$ 中，$n$ 次多项式 $g(x)$ 在互不相同的 $a_i$ 点的值 $g(a_i)=b_i$　$i=0,1,\cdots,n)$ 求 $g(x)$ 在基底 $1$，$x$，$\cdots$，$x^n$ 上的坐标．

44．求 $M_{m\times n}$ 的维数．

45．求数域 $F$ 上 $n$ 阶对称阵所构成的线性空间的维数。

46．求数域 $F$ 上 $n$ 阶反对称阵所构成的线性空间的维数．

47．试求 $M_2$ 的两组不同基底，并求出向量 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 在所求基底上的坐标．

48. 证明实域$R$上三阶方阵集合$M_3$是$R$上的9维线性空间，并证 当

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

时，$E$，$A$，$A^2$，$B$，$AB$，$A^2B$，$B^2$，$AB^2$，$A^2B^2$，为此空间的一组基底。

49. 同一向量在不同基底上坐标是否不同？不同向量在同一基底上坐标是否也不同？

50. 在$P[x]_n$中对向量$g(x)=(x+a)^n$试求出两个不同基底，使其坐标相同。

51. 在$P[x]_2$中，如果$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$两两线性无关，那么$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$是否是$P[x]_2$的基底？

52. 求本章第中的第11题的维数。

53. 关于数的加法和乘法，以1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$为生成组，在有理数域$Q$上生成的线性空间$V$是几维的。

54. 在开区间（0，1）上连续函数所构成的线性空间中，试证1，$x,x^2\cdots$是线性无关组，但它不是该空间的基底。

55. 证明多项式空间$P[x]$是无限维的.

56. 试求由二个未定元$x$，$y$的三次齐次式和0多项式所构成的有理数域$Q$上的线性空间的维数，对于$k$个未定元的$n$次齐次式和0多项式所构成的线性空间的维数.

57. 关于数的加法和乘法，求由有理数集$Q$构成$Q$上的线性空间和实数集$R$构成$Q$上的线性空间以及复数集$C$构成$R$上的线性空间的维数。

58. 复数域$C$上的二阶方阵集合$M_2$，构成实数域$R$上的线性空间，求其维数.

## §4. 基底变换与坐标变换

**定义8.** 设$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$和$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots\beta_n$是$V_n(F)$的两个基底，令$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\alpha_i$（$j=1，2，\cdots n$），则$n$阶方阵$T=(a_{ij})$称为由基底$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$到基底$\beta_1$ $\beta_2$ $\cdots\beta_n$的过渡阵。利用矩阵可表为：$(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)T$.

**定理2.** 若$T$是基底$\alpha_1$，$\alpha_2\cdots\alpha_n$到基底$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots\beta_n$的过渡阵，则$T$是非奇异的。

**定理3.** 设$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$是$V_n(F)$的基底$T=(a_{ij})$是非奇异矩阵，如果$(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)T$，则$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots\beta_n$是$V_n(F)$的基底.

**定理4.** 在$V_n(F)$中，设$T$是由基底$\alpha_1$，$\alpha_2\cdots\alpha_n$到基底$\beta_1$，$\beta_2\cdots\beta_n$的过渡阵，向量$\xi\in V_n(F)$，在基底$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$上和$\beta_1$，$\beta_2\cdots\beta_n$上的坐标分别为（$x_1$，$x_2$，$\cdots x_n$）与（$y_1$，$y_2$，$\cdots y_n$），则有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

**定理5．** 设$A$是由基底$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$到基底$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots\beta_n$的过渡阵，$B$是由基底$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots\beta_n$到基底$\gamma_1$，$\gamma_2\cdots\gamma_n$的过渡阵，则由基底$\alpha_1$，$\alpha_2\cdots\alpha_n$到基底$\gamma_1$，$\gamma_2\cdots\gamma_n$的过渡阵为$AB$。

**定理6．** 在同一基底上的向量和的坐标等于向量坐标之和，数乘向量的坐标等于向量坐标乘以数。

## 习　　题

59．在$V_3$中，求由基底$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$即基底$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(1,1,1)$的过渡阵。

60．在$V_3$中，求由基底$\alpha_1=(1\ \ 0\ \ 0)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(1,1,1)$通过过渡阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所得到的新基底。

61．已知$V_3$中向量$\alpha$在基底$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$上的坐标为2，3，5，试求$\alpha$在基底$\eta_1=(1,0,0)$，$\eta_2=(1,1,0)$，$\eta_3=(1,1,1)$上的坐标。

62．在$P[x]_3$中，求基底1，$x$，$x^2$，$x^3$到基底，1，$1+x$，$1+x+x^2$，$1+x+x^2+x^3$的过渡阵，已知$g(x)$在基底1，$1+x$，$1+x+x^2$，$1+x+x^2+x^3$上的坐标为1，0，$-2$，5，$f(x)$在基底1，$1+x$，$1+x+x^2$，$1+x+x^2+x^3$上的坐标为7，0，8，$-2$，试求$f(x)+g(x)$在基底1，$x$，$x^2$，$x^3$和1，$1+x$，$1+x+x^2$，$1+x+x^2+x^3$上的坐标。

63．在$P[x]_n$中求基底1，$x-a$，$(x-a)^2\cdots(x-a)^n$到基底1，$x$，$x^2\cdots x^n$的过渡阵，对于$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$求在第一个基底上的坐标。

64．在$P[x]_n$中，令$f(x)=(x-a)^n$，$g(x)=(x-b)^n$求基底$f(x)$，$f'(x)$　$f^{(2)}(x)\cdots f^{(n)}(x)$到基底$g(x)$，$g'(x)$，$g^{(2)}(x)$，$\cdots g^{(n)}(x)$的过渡阵。

65．在实数域$R$上的$M_2$中，1）试求基底　$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，　$E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

$E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$到基底$F_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$F_2=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，

$F_3=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$F_4=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$的过渡阵。

2）求向量$M=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$在基底$\{E_i\}$和$\{F_i\}$上的坐标。

3）在$M_2$中求一非零向量$A$，使$A$在基底$\{E_i\}$和$\{F_i\}$上的坐标相等。

66. 在 $P[x]_n$中，1）证明 $f_i(x)=\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x-a_k)}{(x-a_i)}$ $(i=0,1,\cdots n)$ 是一组基，其中当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$

2）如取 $a_i=\varepsilon^i$，$\varepsilon$ 是 $n+1$ 次单位原根，求由基底 $1, x, x^2\cdots x^n$ 到基底 $f_0(x)$，$f_1(x)\cdots f_n(x)$ 的过渡阵。

67. 设 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$ 是 $V_n(F)$ 的基底，对于 $F$ 中的数 $l\neq 1$，如果 $\beta_i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-i+1}+l\alpha_{n-i+2}+\alpha_{n-i+3}+\cdots+\alpha_n$ $(i=1,2,\cdots n)$ 证明 $\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots\beta_n$ 是 $V_n(F$ 的基底。

68. 在 $P[x]_2$中，在基底 $1, x, x^2$ 上向量 $\alpha$ 的坐标是 $1, 0, -1$，在基底 $x+1$ $x+x^2$，$x^2$ 上向量 $\beta$ 的坐标是 $2, 1, 0$，在基底 $1, x-x^2, x+x^2$ 上向量 $\gamma$ 的坐标是 $0, -1, 1$，求 $\alpha+\beta+\gamma$ 在基 $1, x, x^2$ 上的坐标；并且由 $1, x, x^2$ 到 $1+x$，$x+x^2$ $x^2$的过渡阵和由 $1, x, x^2$ 到 $1, x-x^2, x+x^2$ 的过渡阵，求出 $1+x$，$x+x^2$，$x^2$ 到基底 $1, x-x^2, x+x^2$ 的过渡阵。

69. 设 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$ 是数域 $F$ 上的 $V_n$ 一个基，$A$ 是 $F$ 上 $n\times s$ 阵，令 $(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_s)==(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)A$，证明由 $\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_s$ 生成的线性空间的维数等于秩 $A$。

## §5 子　空　间

### 基　本　内　容

**定义9.** 线性空间 $V(F)$ 的非空子集 $L$，如果关于 $V(F)$ 的运算仍构成数域 $F$ 上的线性空间，则称 $L$ 是 $V(F)$ 的子空间。零空间与 $V(F)$ 是 $V(F)$ 的当然子空间（或平凡子空间），其它的子空间是 $V(F)$ 的真子空间（或非平凡子空间）.

**定理7.** $L$ 是 $V(F)$ 的子空间的充分必要条件是对任意的 $\alpha$，$\beta\in L$，$k\in F$，有 $\alpha+\beta$，$k\alpha\in L$.

**定理8.** 子空间 $R$ 和 $L$ 的交，即 $R\cap L=\{\alpha|\alpha\in R,且\alpha\in L\}$，仍是子空间. $R$ 与 $L$ 的和，即 $R+L=\{\alpha+\beta|\alpha\in R,\ \beta\in L\}$，仍是子空间.

**定理9.** 设 $R$，$L$ 是 $V(F)$ 的子空间，则有维 $(R+L)=$维$R+$维$L-$维$(R\cap L)$.

**定义10.** 若子空间 $R_1$，$R_2$ 的和 $R_1+R_2$ 中的每一个向量的表达式是唯一的，称此和为直和，记作 $R_1\oplus R_2$.

**定理10.** $R_1+R_2=R_1\oplus R_2$ 的充要条件是等式 $\alpha_1+\alpha_2=0$ $(\alpha_1\in R_1,\ \alpha_2\in R)$ 只有 $\alpha_1$，$\alpha_2$ 全为零时才成立（即零向量的表法唯一）。

**定理11.** 设 $R_1$，$R_2$ 是 $R$ 的子空间，如果 $R=R_1\oplus R_2$，那么维$R=$维$R_1+$维$R_2$. 反之，若 $R=R_1+R_2$，且维$R=$维$R_1+$维$R_2$，那么 $R_1+R_2=R_1\oplus R_2$.

注：定义10和定理10，11皆可推广到 $n$ 个子空间的情形.

## 习　题

70．判断 $n$ 数组空间 $V_n$ 的子集是否是它的子空间．

1)在 $V_n$ 中满足齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的解向量$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的集合 $L$（即解集合）；

2)在 $V_n$ 中满足非齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$的解向量$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的集合 $L$．

71．判断多项式空间 $P[x]$的子集 $L$ 是否是它的子空间．

1） $L=\{ax^k+bx^l+cx^m \mid a, b, c, \in P\}$

2） $L=\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i} \mid a_i \in P, a=0, 1, 2, \cdots\}$；

3） $L=\{f(x) \mid f(x)\in P[x], degf(x)>n\}$； 4） $L=\{f(x) \mid f(x)\in P[x]\ f(a)=0\}$

72，判断 $n$ 阶方阵线性空间$M_n$的子集是否是它的子空间．

1)阵 $A$ 的左零因子集合 $L_1$； 2) 与阵 $A$ 的可换的阵的集合； 3) 迹为 0 的阵的集合；

4)迹不为 0 的阵的集合； 5)对称阵的集合； 6)反对称阵的集合； 7)上(下)三角阵的集合．

73．判断〔0，1〕区间上连续函数线性空间$C$〔0，1〕的子集是否是它的子空间．

1)$R_1=\{f(x) \mid f(x)\in C[0\ \ 1], f(0)=0;\}$

2)$R_2=\{f(x) \mid f(x)\in C[0\ \ 1], f(x)=f(1-x)\}$；

3)$R_3=\{f(x) \mid f(x)\in C[0\ \ 1], f(0)=f(1)\}$；

4)$R_4=\{f(x) \mid f(x)\in C[0\ \ 1], f(x)>0, x\in[0\ \ 1]\}$．

74．$R$是实数集，关于数的加法和乘法，$R$构成实数域$R$上的线性空间，有理数集$Q$是否是$R$的子空间？

75．$R$是实数集，关于数的加法和乘法，$R$构成有理数域$Q$上的线性空间，有理数集$Q$是否是$R$的子空间？

76．$R$是实数集，关于数的加法和乘法，$R$构成实数域$R$上的线性空间，$R^+$是$R$的实数子集，关于运算$a\oplus b=ab$，$k\cdot a=a^k$也构成$R$上的线性空间，此时$R^+$是否是$R$的子空间？

77．实数域$R$上$V_n$的下例子集是否构成$V_n$的子空间，如果是，确定其维数．

1） $L_1=\{(a_1, a_2, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0) \mid 0\leqslant r\leqslant n\}$；

2） $L_2=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i$ 是整数$\}$；

3） $L_3=\{(a_1, a_2, \cdots a_r, a_{r+1}, a_n) \mid \sum_{i=1}^{r} a_i=0\}$；

4） $L_4=\{(a_1, a_2, \cdots a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i=1\}$；

5）$L_5=\{(a_1, a_2\cdots a_n)|a_i$ 不全大于0，或不全小于0}；

6）$L_6=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)|a_i>0, i=1, 2, \cdots, n\}$。

78。在三维笛卡儿直角坐标系中，以坐标原点为始点的向量集合构成实数域$R$上的三维线性空间。

1）过原点的平面$\Pi$上的全体向量是否是子空间？如果是，维数是几？

2）终点都在一个平面$P$的全体向量，是否是子空间？

3）$R_1$是过原点的平面$\Pi_1$上的向量全体所构成的线性空间，$R_2$是过原点的平面$\Pi_2$上的向量全体所构成的线性空间，向$R_1\cap R_2$和$R_1+R_2$的几何形象是什么？$R_1+R_2$能否是直和。

79。令$M_n$表示数域$F$上一切$n$阶方阵所组成线性空间.设$S=\{A\in M_n|A=A'\}$，$T=\{A\in M_n|A=-A'\}$，证明：$M_n=S+T=S\oplus T$，$S\cap T=\{0\}$。

80，设$\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_n$是$V_n(F)$的基底

1）若$a_i\in F(i=1,2,\cdots n)$不全为0，证明以方程$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$的解$c_1,c_2,\cdots c_n$为坐标的向量$\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i$的集合$L_1$是$V_n(F)$的$n-1$维子空间。

2）证明以方程组$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0$ $(i=1, 2, m)$的解$c_1$，$c_2$，…，$c_n$为坐标的向量$\sum_{j=1}^{n}c_j\beta_j$的集合$L_2$是$V_n(F)$的子空间，并求其维数？

3）论证$V_n(F)$的任何子空间都可用2）的方法表出。

81。设$\gamma_1$，$\gamma_2$，…，$\gamma_n$为$V_n(F)$的基底，对于$F$上线性方程组$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i(i=1, 2, \cdots, n)$的解$c_1$，$c_2$，…，$c_n$，同向量$\sum_{j=1}^{n}c_i\gamma_i$构造子空间$R_1$；对于$F$的线性方程组$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j=0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$的解$d_1$，$d_2$，…，$d_n$，用向量$\sum_{j=1}^{n}d_i\gamma_i$构造子空间$R_2$，求$R_1\cap R_2$，并找出$R_1\cap R_2$的维数与阵$A=(a_{ij})$和阵$B=(b_{ij})$的秩的关系。

82。在线性空间中，证明所有含向量$\alpha$，$\beta$，$\gamma\cdots$的子空间的交是子空间，称为向量集$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，…的线性包。进一步证明$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，…是其线性包的生成系。

83。在$V_4$中，求出向量$\alpha=(1, 3, 2, 1)$，$\beta=(4, 9, 5, 4)$，$\gamma=(3, 7, 4, 3)$的线性包的维数。

84。在$V(F)$中，证明：所有包含子空间$L$和$R$的子空间的交等于$L+R$，即$L+R$是$V(F)$中即包含$L$又包含$R$的最小子空间。

85。设$R$，$L$是$V_n(F)$的真子空间，证明：维$(R\cap L)\geqslant$维$R$+维$L-n$。

86。对于$V_n(F)$的子空间$R_1$，$R_2$，…$R_n$，如果$R_1+R_2+\cdots+R_n=R_1\oplus R_2\oplus\cdots$

$\cdots \oplus R_n$，证明：$R_1 \cap R_i = 0$，（$i=2, \cdots, n$）反之是否成立。

87．对于$V_n(F)$的子空间 $R_1$，$R_2, \cdots$，$R_m$，如果 $R_i \cap R_j = 0$，$i \neq j$，$i, j = 1$，$2$，$\cdots$，$m$．问等式：$R_1 + R_2 + \cdots + R_m = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_m$ 是否成立？

88．对于 $V_n(P)$ 的子空间 $R$，一定存在空间 $L$ 使 $V_n(F) = R \oplus L$.

89．设 $V_1$ 与 $V_2$ 分别是齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_i - x_{i+1} = 0$（$i = 1, 2, \cdots, n-1$）的解空间，证明：$V_n = V_1 \oplus V_2$.

90．证明：如果 $V = V_1 \oplus V_2$，$V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$，则 $V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$.

91．证明：每一个 $n$ 维线性空间都可以表为 $n$ 个一维子空间的直和。

92．子空间 $R_1$ 由向量组 $\alpha_1$，$\alpha_2 \cdots$，$\alpha_p$ 生成，子空间 $R_2$ 由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ 生成。$R_3$ 由向量组 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_p$，$\beta_1$，$\beta_2$，$\cdots, \beta_q$ 生成，证明：维$R_3 \leqslant$维$R_1 +$维$R_2$.

93．在 $V_4$ 中 $R_1$ 的生成系是 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$R_2$ 生成系是 $\beta_1$，$\beta_2$，求 $R_1 \cap R_2$与 $R_1 + R_2$ 的基底与维数，其中：$\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)$，$\alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)$；$\beta_1 = (2, -1$ $0, 1)$，$\beta_2 = (1, -1, 3, 7)$.

94．设 $R$，$L$，$U$ 是 $V(F)$ 的子空间，证明：

1）$R \cap [(R \cap L) + U] = (R \cap L) + (R \cap U)$；

2）$(R + L) \cap (R + U) = R + [(R + L) \cap U]$.

95．设 $R_1$，$R_2$，$R_3$ 是 $V$ 的子空间，证明：

1）$(R_1 \cap R_2) + R_3 \subseteq (R_1 + R_3) \cap (R_2 + R_3)$；

2）$(R_1 \cap R_3) + (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 + R_2) \cap R_3$.

96）．设 $R_1$，$R_2$，$\cdots$，$R_t$ 是 $V(F)$ 的 $t$ 个子空间，试证下面三个条件等价。

1）$R_1 + R_2 + \cdots + R_t = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_t$；

2）$R_j \cap (R_1 + \cdots + R_{j-1} + R_{j+1} + \cdots + R_t) = 0$，$j = 1, 2, \cdots, t$；

3）$R_1 \cap R_2 = 0$，$(R_1 + R_2) \cap R_3 = 0$，$\cdots$，$(R_1 + \cdots + R_{t-1}) \cap R_t = 0$

97．设 $R$，$R_1$，$R_2$ 都是线性空间 $V(F)$ 的子空间，其中 $R_1 \subseteq R_2$，且 $R \cap R_1 =$ $= R \cap R_2$，$R + R_1 = R + R_2$，证明：$R_1 = R_2$。

98．设 $V_1$，$V_2$ 是线性空间 $V$ 的两个真子空间，证明：在 $V$ 中存在向量$\alpha$，使 $\alpha \overline{\in} V_1$，$\alpha \overline{\in} V_2$ 同时成立。

99．设 $V_1$，$V_2$，$\cdots V_s$ 是线性空间 $V$ 的 $s$ 个真子空间，证明：$V$ 中至少有一个向量 $\alpha$ 不属于 $V_1$，$V_2$，$\cdots V_s$ 中任何一个.

100．设$A \in M_n$　1）证明全体与 $A$ 可交换的矩阵组成 $M_n$ 的一个子空间。记作 $C(A)$；

2）当 $A = E$时，求$C(A)$；

3）当 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$ 时求$C(A)$的维数和一组基；

4）证明：和全体 $n$ 阶方阵可交换的 $n$ 阶方阵的集合是 $M_n$ 的子空间，叫做 $M_n$的中心，记作$C(M_n)$，求$C(M_n)$的维数和基底.

性　变　换

性变换的定义

本　内　容

与$N$给定一种规则（方法）$\sigma$，使得$M$中任一元素$\alpha$，按... 准一的一个元素$\beta$，记作$\sigma(\alpha)=\beta$，这样就说规则$\sigma$是$M$到$N$的一... $\sigma$之下的象，$\alpha$为$\beta$在$\sigma$之下的一个原象。

若$\sigma_1$，$\sigma_2$都是... 射，对任一$\alpha\in M$，都有$\sigma_1(\alpha)=\sigma_2(\alpha)$，则称$\sigma_1$与$\sigma_2$是相同的，记作：$\sigma_1=\sigma_2$。

如果$M$到$N$的映射$\sigma$使得$N$中每一元素在$\sigma$之下都有原象，即对任一$\beta\in N$，必有$\alpha\in M$使$\beta=\sigma(\alpha)$，则称$\sigma$为$M$到$N$上的映射。

如果$M$到$N$的映射$\sigma$使得$M$中不同元素的象也不同，即，若$\alpha_1\neq\alpha_2$，则$\sigma(\alpha_1)\neq\sigma(\alpha_2)$则称这样的$\sigma$是$M$到$N$的一一映射。

特别地，当$M=N$时，把$M$到$M$的映射$\sigma$叫做$M$的一个变换。同样有到上的变换、一一的变换、一一到上的变换（或一一对应）等相应的概念。

定义1．线性空间$V(F)$的变换$\sigma$称为线性变换，如果满足条件

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma\alpha+\sigma\beta \qquad (\alpha,\ \beta\in V)$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma\alpha \qquad (k\in F,\ \alpha\in V)$$

定理1．$\sigma$是线性变换充分必要条件是：

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma\alpha+l\sigma\beta \quad (k,\ l\in F．\alpha,\ \beta\in V)．$$

显然，把$V(F)$中每一向量皆变为0向量的变换是线性变换，叫零变换，记作$\theta$。而把$V(F)$中每一向量仍变为自身的变换也是线性变换，称为恒等变换，记为**1**。

习　　题

1．试说明下列对应规则$\sigma$是$V_2$的一个变换，并说明其几何意义：

1）$\sigma(x_1,x_2)=(x_1,-x_2)\qquad((x_1,x_2)\in V_2)$．

2）$\sigma(x_1,x_2)=(-x_1,x_2)\qquad((x_1,x_2)\in V_2)$．

3）$\sigma(x_1,x_2)=(-x_1,-x_2)\qquad((x_1,x_2)\in V_2)$．

4）$\sigma(x_1,x_2)=(x_1,0)\qquad((x_1,x_2)\in V_2)$．

5）$\sigma(x_1,x_2)=(0,x_2)\qquad((x_1,x_2)\in V_2)$．

2．在$V_2$中，$\sigma$是平面上绕原点旋转角$\varphi$的变换，试确定$\sigma(x_1,x_2)$的表达式$((x_1,x_2)\in V_2)$．

3．下列对应规则是否定义了$V_2$的一个变换：

1）使 $V_2$ 中每一个 $\alpha=(x,x)$，对应 $\beta=(x,0)$.

2）使 $V_2$ 中每一个 $\alpha=(x_1,x_2)$，对应 $\beta=(y_1,y_2)$，其中 $y_1,y_2$ 分别是 $x_1,x_2$ 的二次方根.

4. 把 $V$ 中每一向量 $\alpha$ 都变为 $c\alpha$（$c$ 为 $F$ 中固定元素）的变换称为相似变换（或数乘变换）证明：相似变换是线性变换.

5. 证明：在三维空间 $V_3$ 中，射影变换 $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,0)$ 是线性变换.

6. 证明：在二维空间 $V_2$ 中，旋转变换 $\sigma(x_1,x_2)=(x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi, x_1\sin\varphi+ +x_2\cos\varphi)$ 是线性变换.

7. 在 $V_3$ 中，判断下列变换 $\sigma$ 是否是线性变换：

1）$\sigma\alpha=\xi$（$\alpha$ 是 $V_3$ 中任意向量，$\xi$ 是 $V_3$ 中固定向量）.

2）$\sigma\alpha=(\xi,\ \alpha)\alpha$（$\alpha$ 是 $V_3$ 中任意向量，$\xi$ 是 $V_3$ 中固定向量，$(\xi,\ \alpha)$ 是二向量的数量积）.

3）$\sigma\alpha=(\xi,\ \alpha)\xi$（$\alpha$ 是 $V_3$ 中任意向量，$\xi$ 是 $V_3$ 中固定向量，$(\xi,\ \alpha)$ 是二向量的数量积）.

4）$\dfrac{(\xi,\alpha)}{(\xi,\xi)}\xi$（$\alpha$ 是 $V_3$ 中任意向量，$\xi$ 是 $V_3$ 中非零固定向量，$(\xi,\ \alpha)$，$(\xi,\ \xi)$ 是二向量的数量积）.

5）$\sigma\alpha=\alpha+\xi$（$\alpha$ 是 $V_3$ 中任意向量，$\xi$ 是 $V_3$ 中固定向量）.

8. 判断下列变换 $\sigma$ 是否是线性变换：

1）$\sigma\alpha=\bar{\alpha}$（把复数域看做复数域上的线性空间，$\alpha$ 是此空间中任意复数，$\bar{\alpha}$ 是 $\alpha$ 的共轭数）.

2）$\sigma\alpha=\bar{\alpha}$（把复数域看做实数域上的线性空间）.

9. 在 $V_3$ 中，判断下列变换 $\sigma$ 是否是线性变换：

1）$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$.

2）$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$.

3）$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(\cos x_1,\ \sin x_2,\ 0)$.

10. 设 $P[x]_n$ 是实数域上次数不超过 $n$ 的所有一元多项式构成的空间. 判断下列规则 $\sigma$ 是否是 $P[x]_n$ 中的线性变换：

1）$\sigma f(x)=xf(x)\qquad (f(x)\in P[x]_n)$.

2）$\sigma f(x)=f(x+1)-f(x)\qquad (f(x)\in P[x]_n)$.

3）$\sigma f(x)=f(x_0)\qquad (f(x)\in P[x]_n$，$x_0$ 是 $F$ 中固定数）.

11. 证明：变换 $\sigma f(x)=f'x)$ 是 $P[x]_n$ 中的线性变换.

12. 证明：变换 $\sigma f(x)=f'(x)$，$\sigma f(x)=xf(x)$ 是 $P[x]$（实数域上所有一元多项式构成的线性空间）中的线性变换.

13. 证明：变换 $\sigma f(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $C[a,b]$（实数域上定义在闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数构成的线性空间）中的线性变换. 其中 $f(x)$ 是 $C[a,\ b]$ 中任意连续函数，$x\in[a,\ b]$.

14. 证明：变换$\sigma X=BXC$是$M_n$（实数域上全体$n$阶方阵构成的线性空间）中的线性变换。其中$X$是$M_n$中任意$n$阶方阵，$B$，$C$是$M_n$中固定$n$阶方阵。

15. 取定$A\in M_n$，对任意$X\in M_n$，定义$\sigma X=AX-XA$。证明：

1）$\sigma$是$M_n$的线性变换；

2）对于任意$X$，$Y\in M_n$，有$\sigma(XY)=(\sigma X)Y+X(\sigma Y)$。

16. 在$M_2$中，设$\sigma\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$\tau\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$. $\sigma,\tau$是否是$M_2$中的线性变换。

17. 证明：对任意线性变换$\sigma$，有$\sigma 0=0$，$\sigma(-\alpha)=-\sigma\alpha$。

18. 若$\alpha_1,\alpha_2$是二维线性空间$V_2(F)$的基，$\sigma,\tau$是$V_2(F)$的线性变换，$\sigma\alpha_1=\beta_1$，$\sigma\alpha_2=\beta_2$，如果$\tau(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_1+\beta_2$，$\tau(\alpha_1-\alpha_2)=\beta_1-\beta_2$，试证：$\sigma=\tau$。

19. 证明：一维线性空间$V_1(F)$到自身的一个变换$\sigma$是线性变换的充分必要条件是：对$\forall\alpha\in V_1(F)$，都有$\sigma\alpha=\lambda\alpha$。（$\lambda$是$F$中一个定数）

20. 证明：线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组。

21. 线性变换是否一定把线性无关的向量组变成线性无关的向量组。

22. 证明：若某向量组在线性变换下的象是线性无关的，则该向量组是线性无关的。

## §2 线性变换的运算

### 基 本 内 容

定义2. 设$\sigma$，$\tau$是线性空间$V(F)$的两个线性变换，定义$\sigma$，$\tau$的和$\sigma+\tau$为

$$(\sigma+\tau)\alpha=\sigma\alpha+\tau\alpha \qquad (\alpha\in V).$$

定义3. 设$\sigma$，$\tau$是线性空间$V$的两个线性变换，定义$\sigma$，$\tau$的积$\sigma\tau$为

$$(\sigma\tau)\alpha=\sigma(\tau\alpha) \qquad (\alpha\in V).$$

定义4. 设$\sigma$是线性空间$V$的线性变换，$k$是数域$F$中的数，定义$\sigma$的数量倍$k\sigma$为

$$(k\sigma)\alpha=k(\sigma\alpha) \qquad (\alpha\in V).$$

定义5. 设$\sigma$是$V$的变换．若在$V$中存在变换$\tau$，使

$$\sigma\tau=\tau\sigma=\mathbf{1},$$

则称$\sigma$是可逆变换．且称$\tau$是$\sigma$的逆变换。

### 习 题

23. 证明：线性变换的和是线性变换。

24. 证明：线性变换的积是线性变换。

25. 证明：线性变换的数量倍是线性变换。

26. 证明：$\sigma+\tau=\tau+\sigma$，$\sigma+(\tau+\rho)=(\sigma+\tau)+\rho$（$\sigma$，$\tau$，$\rho$是$V$中线性变换）。

27. 证明：$\sigma+\theta=\sigma$（$\sigma$是$V$中线性变换，$\theta$是$V$中零变换）。