人民教育出版社高中教材

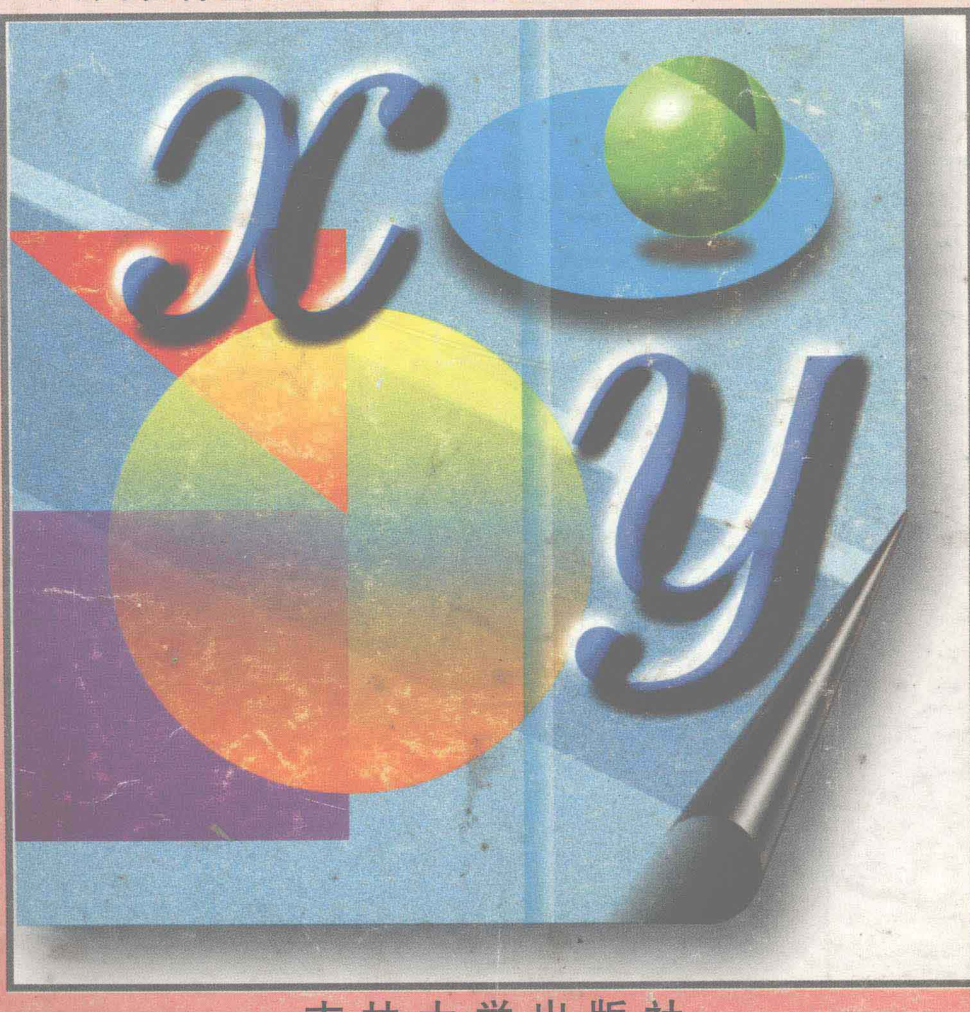
配套辅导用书

平面解析几何

二年级

全一册

●人民教育出版社高中教材配套辅导用书编委会 编



吉林大学出版社

人民教育出版社高中教材配套[redacted]

平面解析几何

全一册

主　编　蔡上鹤
副主编　王国珍　祝承亮
编　者　邢昌振　聂利岩

吉林大学出版社

人民教育出版社高中教材配套辅导用书

平面解析几何

全一册

主　编　蔡上鹤

副主编　王国珍　祝承亮

编　者　邢昌振　聂利岩

责任编辑、责任校对：赵洪波　　封面设计：张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

（长春市东中华路 37 号）　　吉林大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米　1/16　　1997 年 4 月第 1 版

印张：10.875　　1997 年 4 月第 1 次印刷

字数：272 千字　　印数：1—10 000 册

ISBN 7-5601-2016-4/G·224　　全套共七册总定价：87.50 元

本　册　定　价：13.00 元

前　言

得到人民教育出版社的首肯，吉林大学出版社为人民教育出版社出版的现行高中教材配了一套辅导用书（简称《配套用书》）。这是一件国内首创，有助于培育21世纪人才的好事。对此我很感兴趣，愿意为它做一点工作。我曾经为长春、大连、武汉、南京等地的中学教师和大学青年学生们做过几次有关教学思想与学习方法的报告，国内有的出版社也正在准备出版我的有关这方面内容的论文集。现今吉林大学出版社邀我主编《配套用书》，我想应该乘此机会，将我从教50年来的一些教学方法和经验心得，融会到这套用书中去，供立志成材的青年们参考。

《配套用书》编写指导思想十分明确，在编写中尽量参考了正在试行的实验教材的改革思路和部分内容，也汲取了一些中学复习资料的精华。所以，这套用书源于教材又丰富于教材。

《配套用书》是由教学经验丰富、谙熟教材并对教法有专门研究的重点中学特级教师和高级教师执笔，而且还特邀了人民教育出版社的各个学科的专家参与编写并负责主审。此书从结构到内容均有所创新、有所突破，有自己的特点。

特点之一，它与课本同步到章节，因此它与课堂场景相互照应，能帮助学生全面地消化理解课本内容。

特点之二，内容安排上主次分明，详略得当，便于学生自学，能起到课文导读的作用。

特点之三，知识重点突出在课程的各环节中，对其中的要点、难点和易错、易混的内容与问题分别给予分析说明、剖析解疑并精选例题加以深化，能巩固和扩大学生的基础知识和基本技能，为学生顺利达标服务。

特点之四，注重启发性和培育兴趣原则，讲究“题眼”布局，有助于形成正确的解题思路，掌握解题技巧，有助于学习能力和学习兴趣的培养，故有利于改善学生素质，提高高考应试能力。

一套好书宛如一座知识宝库，蕴藏着青年学生们所要追索的思想方法和知识，又像一把金钥匙，能够启迪思维，开发智力。我相信全国的高中学生和自学成材的青年朋友们，一定会欢迎《配套用书》的问世，我衷心祝愿大家能利用它来激发自己的智慧火花，获得成功的喜悦！

徐利治

1997 年 3 月 20 日于长春

目　　录

第一章　直线和圆

本章知识结构如下：

- 直线
  - 基本度量的坐标公式
    - 有向线段的数量公式
    - 两点之间的距离公式
    - 有向线段的定比分点公式
  - 直线方程的四种特殊形式
    - 点斜式
    - 斜截式
    - 两点式
    - 截距式
  - 与坐标轴平行的直线方程
    - 平行于 x 轴的直线 $y=b$
    - 平行于 y 轴的直线 $x=a$
  - 直线方程的一般形式 $Ax+By+C=0$ （A 或 $B\neq 0$）
  - 点 (x_0,y_0) 与直线 $Ax+By+C=0$ 的位置关系
    - 点在直线上：$Ax_0+By_0+C=0$
    - 点在直线外：$Ax_0+By_0+C\neq 0$
      点到直线的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
  - 两条直线的位置关系
    $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$
    $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$
    - 平行
      - $k_1=k_2$
      - 同时垂直于 x 轴 $B_1=B_2=0$
    - 相交
      - 斜交 $\mathrm{tg}\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$
      - 垂直 $\begin{cases}k_1k_2=-1\\ k_1=0,k_2\text{ 不存在}\end{cases}$
      - 求交点

- 圆
  - 圆的标准方程
    - $C(a,b)$为圆心，r 为半径 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
    - 原点为圆心，r 为半径 $x^2+y^2=r^2$
  - 特殊圆的方程
    - 与 x 轴相切的圆的方程
    - 与 y 轴相切的圆的方程
    - 与 x 轴、y 轴都相切的圆的方程
    - 以两点 P_1、P_2 为直径端点的圆的方程
  - 点与圆的位置关系
    点：(x_0,y_0)
    圆：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
    - 点在圆周上，$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$
    - 点在圆外，$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$
    - 点在圆内，$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$
  - 直线与圆的位置关系
    圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
    直线 l：$Ax+By+C=0$
    圆心到 l 的距离为 d
    - $d<r$，直线与圆相割
    - $d=r$，直线与圆相切
    - $d>r$，直线与圆相离
  - 圆与圆的位置关系
    圆 C_1：$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$
    圆 C_2：$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$
    圆心距为 d
    - $d=r_1+r_2$ 时外切；$d=|r_1-r_2|$时内切
    - $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ 时相交
    - $d>r_1+r_2$ 时外离
    - $d<|r_1-r_2|$时内含

圆的一般方程
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
$(D^2+E^2-4F>0)$

一、内容要求

直线部分的主要内容有：有向线段的概念，线段的定比分点公式，直线的倾斜角与斜率，直线方程的几种形式及点与直线、两条直线的位置关系.

1. 有向线段，有向线段的数量，有向线段的长度三者之间的区别和联系.

规定了方向的直线是有向直线，而规定了起点和终点的线段是有向线段；有向线段的长度是一个正数，又叫做有向线段的绝对值；有向线段的数量需在长度前面加上正号或负号.

设 AB 是 x 轴上任意一条有向线段，O 是原点，且 $OA=x_1$，$OB=x_2$，则总有 $AB=OB-OA=x_2-x_1$，而有向线段 AB 的长度为 $|AB|=|x_2-x_1|$.

若 A、B 是直角坐标系中的两点，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 A、B 两点间的距离 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

2. 线段的定比分点

点 P 是有向线段$\overline{P_1P_2}$的定比分点，则 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$；若点 P 是$\overline{P_2P_1}$的定比分点，则 $\lambda=\dfrac{P_2P}{PP_1}$.

$\overline{P_1P_2}$的两个端点为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比 $\lambda(\lambda\neq-1)$，点 P 的坐标为(x,y)，则 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1)$.

当 P 是线段$\overline{P_1P_2}$的中点时，此时 $\lambda=1$，则有中点 $P(x,y)$的坐标公式 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

3. 直线的倾斜角和斜率

直线的倾斜角指的是一条直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角. 当 l 与 x 轴平行时，规定倾斜角为 $0°$，故直线的倾斜角的范围是$[0,\pi)$.

一条直线的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的斜率，即 $k=\mathrm{tg}\alpha(\alpha\neq90°)$.

对直线 l 上任意两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，当 $x_1=x_2$ 时，倾斜角为 $90°$，直线的斜率不存在；当 $x_1\neq x_2$ 时，则有 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\mathrm{tg}\alpha$.

当 $k\geqslant0$ 时，$\alpha=\mathrm{arctg}k$；

当 $k<0$ 时，$\alpha=\pi+\mathrm{arctg}k$ 或 $\alpha=\pi-\mathrm{arctg}|k|$.

4. 直线的方程

直线与 x，y 的一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不全为零）是一对应关系，即“平面内任意一条直线的方程都是 x，y 的一次方程”；“任何一个关于 x，y 的一次方程都表示一条直线”.

由于直线是由两个独立条件确定的，在一定条件下，直线方程的几种形式才可以互相转化，这里要注意各种形式的直线方程的限制条件.

5. 两条直线的位置关系

两条直线的位置关系主要指平行、重合、垂直、相交.

l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0(A_1^2+B_1^2\neq0)$，

l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0(A_2^2+B_2^2\neq0)$.

(1)平行

若 l_1，l_2 都具有斜率，l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，若 $l_1/\!/l_2$，则 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$.

对一般形式，$l_1 // l_2 \Rightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$ 或 $A_1C_1-A_2C_1\neq 0$.

一般形式适用于平面内任何两条平行直线，故 $Ax+By=\lambda$ $(\lambda\in\mathrm{R})$表示平行于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系.

(2)重合

若 l_1,l_2 都有斜率，$l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，l_1 和 l_2 重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$.

一般形式：l_1 与 l_2 重合$\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=B_1C_2-B_2C_1=A_1C_2-A_2C_1=0$.

(3)垂直

若 l_1,l_2 都有斜率，$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

一般形式：$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

(4)相交

若 l_1,l_2 都有斜率，l_1 和 l_2 相交$\Leftrightarrow k_1\neq k_2$.

一般形式：l_1 和 l_2 相交$\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1\neq 0$.

直线 l_1 和 l_2 的交点坐标就是方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

的解.

已知直线 $l_1: y=k_1x+b_2$，$l_2: y=k_2x+b_2$，当 $1+k_1k_2\neq 0$ (l_1 和 l_2 不垂直)时，l_1 到 l_2 所成的角由 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$来确定.

若 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，当 $A_1A_2+B_1B_2\neq 0$ (l_1 和 l_2 不垂直)时，l_1 到 l_2 所成的角由 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$来确定.

l_1 和 l_2 所成的角，即 l_1 和 l_2 的夹角是不大于直角的角，可用公式

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right| \text{ 或 } \mathrm{tg}\theta=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$$

来确定.

6. 点到直线的距离公式

点 $P(x_0,y_0)$，直线 $Ax+By+C=0$.

点 P 在直线上，则 $Ax_0+By_0+C=0$；

点 P 不在直线上，则 $Ax_0+By_0+C\neq 0$，点 P 到直线的距离为 d，则 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

圆部分的主要内容有：圆的标准方程，圆的一般方程，特殊圆的方程；点与圆的相关位置；直线与圆的相关位置；圆的切线方程；圆与圆的相关位置.

1. 圆的标准方程

以点 $C(a,b)$为圆心、r 为半径的圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

特别，圆心在原点、r 为半径的圆的标准方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

平面内任何一个圆都可以用标准方程来表示.

2. 特殊圆的方程

(1)与 x 轴相切的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y\pm b)^2=b^2,$$

其中圆心为(a,b)或$(a,-b)$,半径为$|b|$.

(2)与 y 轴相切的圆的方程为

$$(x\pm a)^2+(y-b)^2=a^2,$$

其中圆心为(a,b)或$(-a,b)$,半径为$|a|$.

(3)与 x 轴、y 轴都相切的圆的方程为

$$(x\pm a)^2+(y\pm a)^2=a^2,$$

其中圆心为(a,a)或$(-a,a)$或$(a,-a)$或$(-a,-a)$,半径为$|a|$.

(4)以两点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$为直径端点的圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0,$$

即

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4},$$

其中圆心为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$、半径为$\sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2}}$.

3. 圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时,方程表示一个圆,圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,半径为$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$;当 $D^2+E^2-4F=0$ 时,方程表示一点,该点为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$;当 $D^2+E^2-4F<0$ 时,方程无曲线.

平面内任何一个圆都可以用一般方程来表示.

4. 点与圆的相关位置

圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,点(x_0,y_0).

当$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ 时,点在圆周上;

当$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$ 时,点在圆外;

当$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$ 时,点在圆内.

5. 直线与圆的相关位置

圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

直线 $l:Ax+By+C=0$.

由几何特征判断:

圆心(a,b)到直线 l 的距离为 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

当 $d<r$ 时,直线与圆相割;

当 $d=r$ 时,直线与圆相切;

当 $d>r$ 时,直线与圆相离.

由代数特征判断:

在方程组

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\ Ax+By+C=0\end{cases}$$

中,用代入消元法解关于 x(或 y)的一元二次方程,由判别式 Δ,得

当 $\Delta>0$ 时,直线与圆相交于两个不同的点(相割);
当 $\Delta=0$ 时,直线与圆相交于两个相同的点(相切);
当 $\Delta<0$ 时,直线与圆无交点(相离).

6. 过圆上一点的圆的切线方程

(1)圆 $x^2+y^2=r^2$,圆上一点为(x_0,y_0),则过此切点的切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

(2)圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,圆上一点为(x_0,y_0),则过此切点的切线方程为

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2.$$

(3)圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,圆上一点为(x_0,y_0),则过此切点的切线方程为

$$x_0x+y_0y+\frac{1}{2}D(x+x_0)+\frac{1}{2}E(y+y_0)+F=0.$$

7. 圆与圆的相关位置

圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$,
圆 $C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$,
圆心距为 $d=\sqrt{(a_1-a_2)+(b_1-b_2)^2}$.
当 $d=r_1+r_2$ 时,两圆外切;
当 $d=|r_1-r_2|$时,两圆内切;
当$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ 时,两圆相交;
当 $d>r_1+r_2$ 时,两圆外离;
当 $d<|r_1-r_2|$时,两圆内含.

8. 相交两圆的公共弦所在的直线方程

圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ 或 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$,
圆 $C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ 或 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$.

若两圆 C_1、C_2 相交,则过两交点的直线方程为$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-(x-a_2)^2-(y-b_2)^2=r_1^2-r_2^2$ 或$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1+F_2=0$.

二、例题精析

例 1 求证三点 $A(2,5)$,$B(1,2)$,$C(-1,-4)$共线.

分析 1 按横坐标由小到大排列为 C,B,A,若能证明$|CB|+|BA|=|CA|$,则三点共线.

证法 1 $|CB|=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$,
$|BA|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,
$|CA|=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$.

由$|CB|+|BA|=|CA|$,知 A,B,C 三点共线.

分析 2 若存在 λ,使

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_C+\lambda x_A}{1+\lambda} \\ y_B=\dfrac{y_C+\lambda y_A}{1+\lambda} \end{cases}$$

成立,则 B 点在直线 CA 上.

证法 2 设

$$\begin{cases}1=\dfrac{-1+\lambda_1\cdot 2}{1+\lambda_1},\\2=\dfrac{-4+\lambda_2\cdot 5}{1+\lambda_2}.\end{cases}$$

解之，得 $\lambda_1=\lambda_2=2$. 故 A,B,C 三点共线.

说明 以上题目可用 $k_{AB}=k_{BC}$ 证得.

例 2 若$\triangle ABC$的三个顶点分别是 $A(1,3)$，$B(-2,8)$，$C(-7,5)$，判断$\triangle ABC$的形状.

解 $|AB|^2=3^2+5^2=34$，$|BC|^2=5^2+3^2=34$，$|CA|^2=8^2+2^2=68$.

因为$|AB|=|BC|$，且$|AB|^2+|BC|^2=|CA|^2$，所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

例 3 已知点 A 的坐标为$(-1,-2)$，点 B 的坐标为$(3,-4)$，在直线 AB 上求一点 C，使得$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{2}{3}$.

解 (1)当点 C 在线段 AB 上时，由$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{2}{3}$，知$\dfrac{|BC|}{|CA|}=2$.

∴点 C 内分有向线段 BA 所成比 λ 为 2.

设点 C 的坐标为(x_1,y_1)，由定比分点坐标公式，得

$$x_1=\frac{3+2\times(-1)}{1+2}=\frac{1}{3},y_1=\frac{-4+2\times(-2)}{1+2}=-\frac{8}{3}.$$

∴点 C 的坐标为$\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$.

(2)当点 C 在线段 AB 的延长线上时，由$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{2}{3}$，知$\dfrac{|AC|}{|CB|}=\dfrac{5}{2}$.

设点 C 坐标为(x_2,y_2)，由定比分点坐标公式，得

$$x_2=\frac{-1-\frac{5}{2}\times 3}{1-\frac{5}{2}}=\frac{17}{3},y_2=\frac{-2-\frac{5}{2}\times(-4)}{1-\frac{5}{2}}=-\frac{16}{3}.$$

∴点 C 的坐标为$\left(\dfrac{17}{3},-\dfrac{16}{3}\right)$.

说明 本题所给条件是线段长度之比，在直线 AB 上，符合$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{2}{3}$的点有两个，故应有两解.

例 4 已知$\triangle ABC$的三个顶点分别为 $A(-3,7)$，$B(1,-1)$，$C(6,16)$，点 M,P 分别为 AB,AC 边上的点，M 坐标为$(0,1)$，连结 MP，且$\triangle APM$的面积等于四边形 $BCPM$ 的面积，求点 P 的坐标.

分析 因为 A,P,C 三点共线，且 A,C 两点的坐标已知，所以要求点 P 的坐标，只需求出点 P 内分有向线段 AC 所成比 λ.

解 设$\triangle ABC$的面积为 S，$\triangle APM$ 的面积为 S'，由已知 $S=2S'$.

又 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A$，$S'=\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|AP|\cdot\sin A$，得

$$\frac{|AB|}{|AM|}\cdot\frac{|AC|}{|AP|}=\frac{S}{S'}=2. \quad ①$$

∵ $|AB|=\sqrt{(-3-1)^2+(7+1)^2}=4\sqrt{5}$，$|AC|=\sqrt{(-3-6)^2+(7-16)^2}=9\sqrt{2}$，

$|AM|=\sqrt{(-3-0)^2+(7-1)^2}=3\sqrt{5}$，

代入①式，得$|AP|=6\sqrt{2}$. 从而得$|PC|=9\sqrt{2}-6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

$\therefore \dfrac{|AP|}{|PC|}=2$,即点 P 内分有向线段 AC 的比为 2.

设点 P 的坐标为(x,y),则 $x=\dfrac{-3+2\times6}{1+2}=3$,$y=\dfrac{7+2\times16}{1+2}=13$. 故 P 点坐标为$(3,13)$.

例 5 已知点 M,N 的坐标分别为$(-1,-5)$,$(5,3)$,直线 l 的方程为 $2x-y-1=0$,直线 l 与点 M,N 所确定的直线交于点 P 点,求 P 点分有向线段 MN 所成比.

解法 1 设点 P 分有向线段 MN 的比为 λ,则 P 点坐标为 $x=\dfrac{-1+5\lambda}{1+\lambda}$,$y=\dfrac{-5+3\lambda}{1+\lambda}$.

因为点 P 在直线 $2x-y-1=0$ 上,所以有 $2\left(\dfrac{-1+5\lambda}{1+\lambda}\right)-\left(\dfrac{-5+3\lambda}{1+\lambda}\right)-1=0$. 解之,得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$. 则点 P 分有线段 MN 所成比为 $-\dfrac{1}{3}$.

解法 2 由两点式直线方程,可得直线 MN 的方程为 $4x-3y-11=0$.

解 $\begin{cases}4x-3y-11=0,\\2x-y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-4,\\y=-9.\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为$(-4,-9)$. 由定比分点坐标公式,得

$$\lambda=\frac{-1-(-4)}{-4-5}=-\frac{1}{3},$$

即点 P 分有向线段 MN 所成比为 $-\dfrac{1}{3}$.

说明 求点 P 分有向线段所成比,除了使用定义外,还可以用定比分点的坐标公式.

例 6 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(4,1)$,$B(7,5)$,$C(-4,7)$,$\angle BAC$ 的平分线交 BC 边于 D,求 $|AD|$.

分析 关键是求出 D 点坐标,这需要两个条件,现已知 D 在 BC 边上,于是还需寻找另一个条件. 这个条件是 $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{|CA|}{|BA|}$ 或 D 点到直线 AC 和 AB 的距离相等.

解法 1 设 D 点坐标为(x,y). 由 $|CA|=10$,$|BA|=5$,得 $\lambda=\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{|CA|}{|BA|}=2$.

$\therefore \begin{cases}x=\dfrac{-4+2\times7}{1+2}=\dfrac{10}{3},\\[2mm] y=\dfrac{7+2\times5}{1+2}=\dfrac{17}{3},\end{cases}$ 即 $D\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{17}{3}\right)$.

$\therefore |AD|=\sqrt{\left(4-\dfrac{10}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{17}{3}\right)^2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

解法 2 直线 AB 的方程为

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x-4}{7-4},$$

即 $4x-3y-13=0$. 直线 BC 的方程为 $2x+11y-69=0$,直线 CA 的方程为 $3x+4y-16=0$.

设 $D(x,y)$,则 $\begin{cases}2x+11y-60=0,\\|4x-3y-13|=|3x+4y-16|.\end{cases}$ 解之,得 $D(18,3)$,或 $D\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{17}{3}\right)$.

$\because$ 点 D 横坐标 x 应满足 $-4<x<7$,故舍去前者,取 $D\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{17}{3}\right)$. 以下同解 1.

例 7 $P_1(-1,-6)$,$P_2(3,0)$是两个定点,连结 P_1P_2 并延长到 P,使 $|P_1P|=3|P_2P|$. 求 P 点坐标.

解法 1 把 $P(x,y)$看成线段 P_1P_2 的定比分点,则 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}=-3$. 于是

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1-3\times 3}{1-3} = 5, \\ y = \dfrac{-6-3\times 0}{1-3} = 3. \end{cases}$$

故 $P(5,3)$.

解法 2 把 P_2 看成线段 P_1P 的定比分点,则 $\lambda' = \dfrac{P_1P_2}{P_2P} = 2$. 设 $P(x,y)$,则

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{1+2} = 3, \\ \dfrac{-6+2y}{1+2} = 0. \end{cases}$$

解之,得 $P(5,3)$.

例 8 求函数 $f(x) = \sqrt{x^2-4x+13} + \sqrt{x^2-12x+37}$ 的最小值.

解 如图 1-1,设 $A(2,3)$, $B(6,1)$, $P(x,0)$,点 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(2,-3)$,则容易证明 $|PA|+|PB| \geqslant |A'B|$,而

$$|PA| = \sqrt{(x-2)^2+9} = \sqrt{x^2-4x+13},$$

$$|PB| = \sqrt{(x-6)^2+1} = \sqrt{x^2-12x+37},$$

$$|A'B| = 4\sqrt{2},$$

$\therefore f(x) \geqslant 4\sqrt{2}$,即函数 $f(x)$ 的最小值是 $4\sqrt{2}$.

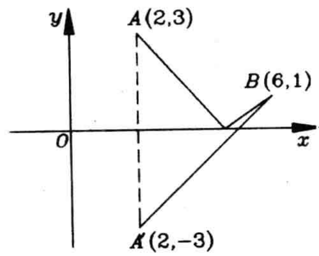


图 1-1

说明 上例结合运用了平面几何的知识,在学习解析几何时,要尽可能地发掘出所给图形的几何性质,以简化解题.

例 9 已知三点 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$, $C(1, \operatorname{tg}\alpha)$,这里 $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$, $\alpha \neq \beta$. 求证 A, B, C 三点共线的条件是 $|\alpha-\beta| = \pi$.

分析 因为三点共线的条件是 $k_{AB} = k_{AC}$,此条件是一个三角方程,所以只需对方程进行变形,就可引出 $|\alpha-\beta| = \pi$.

证明

$$k_{AB} = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$k_{AC} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$\because A, B, C$ 三点共线,所以 $k_{AB} = k_{AC}$. 故 $-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\alpha$,即 $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 或 $\pi + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha+\beta}{2}$,即 $\alpha - \beta = \pi$ 或 $\beta - \alpha = \pi$. 故 $|\alpha-\beta| = \pi$.

例 10 求经过 $P(3,-4)$,且横、纵截距相等的直线方程.

分析 依题意,自然地会想到用截距式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$,但要注意 $a \neq 0, b \neq 0$;若横、纵截距都等于零,则直线过原点.

解 当横、纵截距都是 0 时，设直线方程为 $y=kx$.

由直线过 $P(3,-4)$ 点，有 $-4=3k$，即 $k=-\frac{4}{3}$. 此时，直线方程为 $y=-\frac{4}{3}x$.

当横、纵截距都不是 0 时，设直线 $x+y=a$.

由直线过 $P(3,-4)$ 点，有 $3-4=a$，即 $a=-1$. 此时，直线方程为 $x+y+1=0$.

例 11 直线 l 经过 $M(3,-2)$ 点，且和 x 轴、y 轴正方向所围成的三角形的面积为 4(平方单位)，求 l 的方程.

解 设 l 的方程为 $y+2=k(x-3)$，$k<0$.

由 $\begin{cases} y=kx-3k-2, \\ y=0, \end{cases}$ 得横截距 $a=3+\frac{2}{k}$.

由 $\begin{cases} y=kx-3k-2, \\ x=0, \end{cases}$ 得纵截距 $b=-3k-2$.

依题意得 $\left(3+\frac{2}{k}\right)\cdot(-3k-2)=8$，即 $9k^2+20k+4=0$. 解得 $k_1=-2$，$k_2=-\frac{2}{9}$.

由 $b>0$ 得 $k<-\frac{2}{3}$，故舍去 k_2.

所求直线 l 的方程为 $y+2=-2(x-3)$，即 $2x+y-4=0$.

解法 2 设 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，依题意得 $\begin{cases} a\cdot b=8, \\ \frac{3}{a}-\frac{2}{b}=1. \end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=4$.

故 l 的方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，即 $2x+y-4=0$.

例 12 直线 l 过 $M(1,2)$ 点，和 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A，B 两点. O 是原点，当 $\triangle AOB$ 的面积最小时，求 l 的方程.

分析 上例中，$\triangle OAB$ 面积为定值，现在面积是变数，它是 k 的函数，因此，我们要根据面积最小去确定 k 或确定 a，b.

解法 1 设 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$ $(k<0)$.

由 $\begin{cases} y=kx+2-k, \\ y=0, \end{cases}$ 得横截距 $a=1-\frac{2}{k}$ $(a>0)$.

由 $\begin{cases} y=kx+2-k, \\ x=0, \end{cases}$ 得纵截距 $b=2-k$ $(b>0)$.

设 $\triangle OAB$ 面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{k}\right)(2-k)$，即 $2S=4-\left(k+\frac{4}{k}\right)$.

由 $k<0$，知 $k+\frac{4}{k}\leqslant-4$，故 $S\geqslant 4$.

当等号成立时 S 最小. 所以有 $k+\frac{4}{k}=-4$，即 $(k+2)^2=0$，故 $k=-2$.

从而 l 的方程为 $y-2=-2(x-1)$，即 $2x+y-4=0$.

解法 2 设 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，设 $\triangle OAB$ 面积为 S，则 $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1, \\ 2S=a\cdot b. \end{cases}$

于是 $\frac{1}{S}=\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{2}{b}\right)$.

由 $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{2}{b}\right)}\leqslant\frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}{2}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{S}\leqslant\frac{1}{4}$，即 $S\geqslant 4$.

当等号成立时 S 为最小. 所以 $b=\frac{8}{a}$, $\frac{1}{a}+\frac{a}{4}=1$. 故 $a=2, b=4$.

从而 l 的方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$, 即 $2x+y-4=0$.

说明 由例 10～12 可知, 求直线方程实际上就是求直线方程中的未知系数. 为此, 就要由直线的几何性质列出以这些未知系数为未知数的方程. 所以求直线方程在某种意义上来说, 是一种特殊的"方程应用题".

例 13 已知直线过点 $(-2,-1)$, 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a, b, 且满足 $a=2b$, 求直线的方程.

解 (1)若直线在两坐标轴上截距均为 0, 直线必过原点. 设直线方程为 $y=kx$.

因为点 $(-2,-1)$ 在直线上, 故 $-1=k\cdot(-2)$, 即 $k=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 直线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

(2)若直线在两坐标轴上截距都不是 0, 设直线方程为 $\frac{x}{2b}+\frac{y}{b}=1$.

因为点 $(-2,-1)$ 在直线上, 故 $\frac{-2}{2b}+\frac{-1}{b}=1$, 即 $b=-2$.

$\therefore$ 直线方程为 $x+2y+4=0$.

因此符合条件的直线方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 和 $x+2y+4=0$.

说明 直线的截距式方程仅适用于在两坐标轴上的截距存在, 且不等于 0 的直线. 例如, 直线 $y=3x$, $x=5$, $y=73$ 等就没有截距式方程. 直线方程的其他形式也有类似的问题.

例 14 过点 $P(3,0)$ 作直线 l, 使它被两相交直线 $2x-y-2=0$ 和 $x+y=-3$ 所截得的线段恰好以点 P 为中点, 求直线 l 的方程.

分析 现知所求直线 l 上的一个点 $P(3,0)$ 要求这条直线方程, 一般来说可考虑点斜式, 或者两点式.

解法 1 设所求直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$.

解方程组 $\begin{cases} y=kx-3k, \\ 2x-y-2=0, \end{cases}$ 得 A 点坐标为 $\left(\frac{3k-2}{k-2}, \frac{4k}{k-2}\right)$.

解方程组 $\begin{cases} y=kx-3k, \\ x+y+3=0, \end{cases}$ 得 B 点坐标为 $\left(\frac{3k-3}{k+1}, \frac{-6k}{k+1}\right)$.

$\because$ 线段 AB 中点为 $P(3,0)$, 由中点坐标公式可得 $\frac{1}{2}\left(\frac{4k}{k-2}+\frac{-6k}{k+1}\right)=0$. 解出 $k=8$ 或者 $k=0$, 其中 $k=0$ 不合题意, 舍去.

由点斜式得直线 l 的方程为 $8x-y-24=0$.

说明 这种解法是以 k 为参数, 通过中点坐标这一已知条件, 布列关于 k 的方程, 从而求出 k 的值, 在解的过程中, 可尽量简化, 只求 A、B 两点的纵坐标.

解法 2 设 A 点坐标为 (x_1, y_1).

由于线段 AB 的中点坐标为 $P(3,0)$, 故可设 B 点坐标为 $(6-x_1, -y_1)$.

$\because A$, B 两点分别在直线 $2x-y-2=0$ 和 $x+y+3=0$ 上, 可得方程组

$$\begin{cases} 2x_1-y_1-2=0, \\ (6-x_1)+(-y_1)+3=0, \end{cases}$$

解之, 可得 A 点坐标为 $\left(\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right)$.