



船舶与海洋工程

国家十二·五重点图书

自由边界流动的水动力学

HYDRODYNAMICS OF FREE-BOUNDARY FLOWS

T·B·罗格维诺维奇 著
施红辉 译



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

自由边界流动的水动力学

Hydrodynamics of Free-Boundary Flows

Г·В·罗格维诺维奇 著

施红辉 译

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书论述了当物体在水中高速运动时,自由边界效应和表面不连续性的水动力学理论及各种渐进解法。第一章介绍自由边界的主要特性,引出了瓦格纳定理和其他定理;第二章介绍自由边界流动的势流理论;第三章介绍自由边界流动的基本实例;第四章介绍物体入水的浸没问题;第五章介绍充分发展的空化,给出了著名的空泡独立膨胀原理;第六章和第七章分别介绍剖面方法的应用和空化水翼。

本书可供船舶与海洋工程、海洋技术与工程、流体力学、空气动力学、计算流体力学、水中兵器设计、应用数学等相关专业的研究生、科研人员及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自由边界流动的水动力学/(乌克兰)罗格维诺维奇
著;施红辉译. —上海:上海交通大学出版社,2012
ISBN 978-7-313-08814-7

I. ①自… II. ①罗… ②施… III. ①自由边界—水
动力学 IV. ①TV131.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 165532 号

自由边界流动的水动力学

Г·В·罗格维诺维奇 著

施红辉 译

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

浙江云广印业有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787 mm×1092 mm 1/16 印张: 12.5 字数: 218 千字

2012 年 9 月第 1 版 2012 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-313-08814-7/TV 定价: 50.00 元

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话: 0573-86577317

■ 前 言

许多当前的水动力学问题与物体在流体中高速运动有关,它不可避免地造成自由边界的形成。

这本专著涉及当自由边界效应和表面不连续性变得必须被考虑时,流体中物体前端一般性的流动物理特性,带有已发展的空蚀的流动、滑行以及其他相关的情况。

对于二维和三维的流动问题,定理和对问题的一般求解被讨论到了同样的深度,这样允许人们在足够的一般性下进行近似计算、解析实验结果并对问题提出特定的数学公式。在此情况下,作者几乎完全忽略了涉及碰撞、绕流自由射流和滑行的二维问题的早已熟知的解;因此,本著作中所采用的解法就直接引用文献中已知的结果。

在许多场合,分析由自由表面的形成引起的复杂流动,能使人们成功地开发出某种方法,以发现有理解力的预估和推导出相对简单的公式,用这些公式就可以计算出在数学严密性下无法计算的某些效应。作者在一定程度上努力根据工程需要,探讨了包括使用简单方法的工程上的不同方面,并对与固体在流体中运动有关的复杂现象进行初步的定量估计。所以,许多结果是从简单的计算公式推导而来。

要在理论上评估用近似方法获得的计算公式的精度通常是有困难的。因此,在本书的每一节都列举了基础实验数据,并与近似理论的结果进行了比较。实验数据和近似理论结果的相互一致,可以作为使用两者自身结果以及包含在它们的推导中的方法的基石。应该牢记,很少有重要的水动力学问题在借助与实际流动相当接近的流型被解出来。在大多数重要的场合,为了提出数学解,原始的流动模型在某些程度上被简化,所得出的解只能在受限制的程度里反映所包含的实际物理过程。这个情况可以用假定自由面是平面的线

性水翼问题的解来说明,其中水翼的厚度和攻角被认为是无限小的。事实上,对于一个有限水翼厚度和攻角的型线,自由面在某种程度上被扭曲,这是因为水翼可能升到非扰动水平的高度之上,尽管这从线性理论中找不到证据。总体而言,构造一个非线性理论是重要的,所以设计安排实验几乎总是必须的,然而,如果在实验的设计和结果中缺乏理论上的分析,该实验将很难产出科学和实用的数据。为了这个目的,近似计算可以证明是有用的。

凯尔迪什(М. В. Келдыш)、拉夫连季耶夫(М. А. Лаврентьев)和谢多夫(Л. И. Седов)的经典结果直接涉及流体的连续运动,经过适当修正,这些结果可用于不连续的空蚀流动。特别地,谢多夫的薄翼理论对于空蚀水翼仍然有效。

这本专著是基于作者的相同题目的一篇论文^①。

在涉及物体浸没的章节里,在作者已发表的工作的基础上,完成补充了最大(崩溃)空泡尺寸、碰撞中的能量损失、根据需要对流体可压缩性给出必要的假定数据。

细长体动力学的通用方程,是在计算由于刚性和柔性细长体的振动力的公式形式里解出的。柔性体的结果解释了鱼和海洋动物的游泳机理,并使得对此进行有趣的计算成为可能。这个理论的后续发展包括振荡物体的非均匀尾迹、不同型线的分析和实验结果的精细化,将允许人们详细解释拍打翼的机理。

① 罗格维诺维奇(Г. В. Логвинович), Гидродинамика течений со свободными границами. — В кн.: Труды ЦАГИ, 93, М., 1965.

■ 译 者 序

《自由边界流动的水动力学》一书,是位于莫斯科的儒可夫斯基中央空气流体力学研究所的罗格维诺维奇(Г. В. Логвиновч)教授所著的力学理论经典著作,曾经是、现在也是水下超空泡鱼雷及其他兵器和运载工具的理论基础。作者为苏联国家科学院院士,他系统地总结了从 20 世纪 40 年代至 60 年代的近 30 年间,苏联在超空泡流动及相关现象方面的研究成果。阅读此书,可以深感作为理论家的作者,对自然界深邃的洞察,对数学和力学传统的彻底继承,对实验的重视,并且在此基础上将力学分析方法发挥到极致。原著于 1969 年由乌克兰科学院科学思想出版社出版,1972 年以色列科技翻译规划出版社出版了该书的英文版。作者还是一名成功的教育家,他的许多学生都是享誉世界的学者。罗格维诺维奇教授已于 10 年前去世,希望他的著作的中文版面世,能使我们以此缅怀这位力学巨匠。

在中文版里,将原来插入每页下面的脚注,全部移到了每章的最后,以保持文本的美观和流畅性。在原著中,例如速度 v 的矢量表示为 $\vec{v}$;在中文版的文字中,全部改成 v 。当然,在有些插图中,有时为了保留原著风貌,仍然使用原来的符号。另外,在第 7 章中描述弧形楔形型线时,原著中多次用弧线代指楔形中心线,这容易与楔形母线弧线相混淆;为此,在中文版中,在有注明的地方直接译为“中心线”或“平均线”,在没有注明的地方译为“脊线”。译文保留了原书的图号和表格号、参考文献以及某些排版格式。

该书的中文翻译工作经历了两年多的时间。2010 年年初,译者委托国家教育部“长江学者”讲座教授、美国 Akron 大学机械工程系王国祥教授,得到了该书的英文版(G. V. Logvinovich, *Hydrodynamics of Free-Boundary Flows*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1972)。2011 年夏天,乌克兰科学院流体力学研究所的 Vladimir Serebryakov 教授给

译者寄来了俄文原版(Г. В. Логвинович, ГИДРОДИНА ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ, ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКОВА ДУМКА, КИЕВ, 1969)。在本书的翻译过程中,得到了浙江理工大学机械与自动控制学院的硕士研究生周素云和肖毅、讲师陈波博士,以及浙江海洋学院船舶与建筑工程学院的谢永和教授和李广年讲师的鼎力帮助。上海交通大学出版社的潘新编辑,在从翻译到定稿的过程中,多次给予指导。本书的出版,得到了浙江理工大学科技发展基金(1003901 - Y)和浙江省自然科学基金重点项目(Z1110123)的资助。在此一并致谢。由于译者水平有限,若书中有不妥之处,敬请广大读者批评指正。

译 者

2012年5月18日于杭州

■ 目 录

第 1 章 自由边界的主要特性	1
1.1 边界的动力学条件	1
1.2 边界的运动学条件	4
1.3 正交自由面	6
1.4 稳定自由边界	8
1.5 自相似自由边界	11
1.6 水花的根部	13
1.7 水花片的尖端	14
第 2 章 有势自由边界流动的一些普遍特性	15
2.1 速度势	15
2.2 流函数	16
2.3 边界条件和流动的普遍性质	17
2.4 自由边界的速度势	18
2.5 等势表面	20
2.6 流体内的压力	21
2.7 流体的动能	23
2.8 能量方程	24
2.9 动量定理	25
2.10 零势表面	28
2.11 通过零势表面的质量、动量和能量通量	29
2.12 格林定理	30

第3章 自由边界流动的基本实例	34
3.1 具有球对称性的流动: 球体流动	34
3.2 具有球对称性的流动: 惯性流动	35
3.3 具有球对称性的流动: 等势表面	36
3.4 具有球对称性的流动: 动能	37
3.5 射流中的空化: 流体环的二维膨胀	38
3.6 射流中的空化: 薄流体环的运动	39
3.7 射流中的空化: 阻力和再进入射流	40
3.8 射流中的空化: 能量和动量方程的一般处理	43
3.9 板的滑行: 稳定自由边界	44
3.10 板的滑行: 动能	46
3.11 板的滑行: 滞止点	47
3.12 板的滑行: 升力和阻力	48
第4章 物体对流体的对称浸没	50
4.1 浮力物体的冲击	50
4.2 浸没与冲击	52
4.3 型线的连续浸没: 楔形的连续浸没(瓦格纳问题)	52
4.4 型线的连续浸没: 小船底斜度角	55
4.5 型线的连续浸没: 自由面的运动单元	60
4.6 型线的连续浸没: 动量和能量的图形表示	61
4.7 型线的连续浸没: 速度和压力分布	63
4.8 型线的连续浸没: 圆柱体上的阻力	65
4.9 型线的连续浸没: 瞬态阻力	66
4.10 型线的连续浸没: 估算瞬态函数	67
4.11 型线的连续浸没: 一些实验结果	70
4.12 圆锥的均匀浸没	71
4.13 圆锥的均匀浸没: 小船底斜度角的场合	72
4.14 圆锥的均匀浸没: 应用压力积分确定圆锥上的阻力	74
4.15 圆锥的均匀浸没: 圆锥上的瞬态阻力	78
4.16 变速物体的对称浸没	81

4.17	变速物体的对称浸没: 主要能量和动量方程	84
4.18	变速物体的对称浸没: 用瓦格纳积分计算阻力	85
4.19	变速物体的对称浸没: 细长体的轴对称浸没	87
4.20	变速物体的对称浸没: 细长体的诱导质量	88
4.21	变速物体的对称浸没: 物体降落在流体表面上	90
4.22	变速物体的对称浸没: 可压缩性流体的主要方程	91
4.23	变速物体的对称浸没: 最简单的冲击情况	92
4.24	变速物体的对称浸没: 运动的受限场合	94
 第 5 章 充分发展了的空化		97
5.1	空泡阻力	97
5.2	无限轴对称空泡的形状	99
5.3	应用动量理论确定空泡的尺寸和阻力	101
5.4	动量定理的推论	103
5.5	空泡膨胀的一般方程	104
5.6	空泡外形和长度的近似方程	107
5.7	空化能量	109
5.8	空泡独立膨胀原理	109
5.9	空泡闭合及尾流	111
5.10	重流体中空泡的结构详情	112
5.11	空泡的上升	114
5.12	不对称流动中的空泡下洗	115
5.13	空泡横向运动的一般情况	116
5.14	空泡扰动运动的运动方程	120
5.15	自由面和壁面的影响	122
5.16	充分发展了的空泡的不同阶段以及空泡的气体损失	122
 第 6 章 剖面方法及其在计算水动力中的应用		127
6.1	基本条件和原理	128
6.2	在理想流体中运动的附加质量的近似计算	129
6.3	贯通层的概念	132

6.4	分离流动	135
6.5	理论的进一步改进	136
6.6	局部浸湿物体上的受力	140
6.7	滑行的重要思考	141
6.8	计算型线滑行的方程	145
6.9	运动方程	148
6.10	细长体的振动: 扑翼	149
6.11	固体细长体的小幅振动	150
6.12	柔性物体的运动	153
第7章 空化水翼		157
7.1	流动经过一个型线或有限翼展水翼	157
7.2	升力和诱导阻力	159
7.3	空泡对下洗的影响	161
7.4	水翼浸深的影响	164
7.5	小浸深下型线的升力	166
7.6	水翼的水动力学特征	168
7.7	经过楔形型线的流动	169
7.8	谢多夫理论在空泡水翼中的应用	171
7.9	评估无空化楔形型线的水动力学特征	174
7.10	水翼和实验数据的极坐标图	177
7.11	完全失速的型线	178
7.12	机翼理论在空化平板计算中的应用	180
7.13	失速的有限展长机翼	182
参考文献		185

第 1 章 自由边界的主要特性

>>>

当固体浸没在流体中时,后者的自由边界处于运动状态,在许多情况下这是不能忽略的。如果物体以高速运动,但流体的速度仍大大小于流体的声速,而且物体表面的不同点不会同时与流体接触,这样,流体的重量和可压缩性就可以忽略。当物体表面上的许多点同时与流体接触(冲击),流体的可压缩性就必须考虑,因为固液冲击产生会带走部分能量的压缩波。如果物体的尺寸和流体中的动压力足够大,表面张力就无关紧要。摩擦力不一定总能忽略,然而,它们通常被近似地处理并添加到当它们被忽略时所得到的结果之中。

流体的自由边界通常受限于大气环境。流体运动带动大气中的气体一起运动,这个运动包含了在自由边界上压力的变化。然而,在大多数情况下,与液体的密度相比,气体的密度是可以忽略的。这样,在自由边界上每点的压力可以近似认为是均匀的和随时间变化的。

上述考虑,使得将流体处理为理想的、无重量的、不可压缩的以及在自由面上压力为恒定的情况成为可能。在理想流体中,任何运动中的变化只能是由于施加在流体边界上的垂直压力而发生。必然地,如果流动在施加给物体之前是有势的,那么流动在随后也仍保持为有势。

在进入具体问题的研究之前,我们考虑自由、恒压边界的基本普遍的特性。

如下假定的运动边界的物理特性减少到了三个条件:① 沿自由边界的压力恒定,并且因此在流体内的压力梯度与自由边界相垂直;② 自由边界上某点的沿着与边界垂直方向上的运动速率,等于与该点重合的流体质点绝对速度在这个垂直方向上的投影;③ 流体质点一旦到达自由边界之后,在后续的运动期间,流体质点将停留在边界。

1.1 边界的动力学条件

我们假定正交坐标系 x, y, z 与静止流体连在一起,并设坐标轴上的单位矢量

分别为 i, j, k 。在与所研究的流体质点重合的某点 ξ , 与自由面垂直向外的单位矢量和与自由面相切的两个单位矢量表示为 e_s, e_n 和 e_τ 。质点的绝对速度是 $u = e_s u_s + e_n u_n + e_\tau u_\tau$ (图 1)。

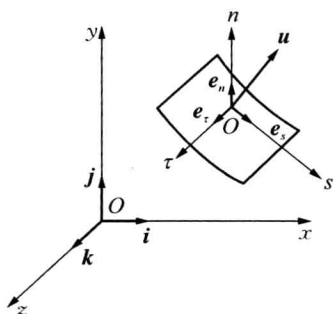


图 1

不考虑质量力的理想流体的欧拉方程是^①

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1.1)$$

遵照在自由面上每点压力相同的事实, 第一个边界条件简化为下面两个等价的表达式

$$e_n \times \frac{Du}{Dt} = e_n \times \text{grad } p = 0 \quad (1.2)$$

或

$$e_s \frac{Du}{Dt} = 0, \quad e_\tau \frac{Du}{Dt} = 0$$

从而, 等压自由面上流体质点的加速度方向, 总是沿着这个表面的垂直方向。

形成自由面的流体质点的运动, 等同于一质点以定义为 $\partial p / \partial n$ 的垂直作用对运动表面的无摩擦运动。这样, 研究动力学的所有原理在这里都适用。

在自由面上质点所在位置的角速度的分量表示为 ω_s, ω_n 和 ω_τ , 这里 s, n 和 τ 是相应的轴线。质点的绝对加速度为

$$w = \frac{Du}{Dt} = e_s \left(\frac{Du_s}{Dt} + u_\tau \omega_n - u_n \omega_\tau \right) + e_n \left(\frac{Du_n}{Dt} + u_s \omega_\tau - u_\tau \omega_s \right) + e_\tau \left(\frac{Du_\tau}{Dt} + u_n \omega_s - u_s \omega_n \right)$$

矢量乘积 $e_n \times \frac{Du}{Dt}$ 的展开产生

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du_s}{Dt} + u_\tau \omega_n - u_n \omega_\tau &= 0 \\ \frac{Du_\tau}{Dt} + u_n \omega_s - u_s \omega_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

压力梯度为 $p = e_s \partial p / \partial s + e_n \partial p / \partial n + e_\tau \partial p / \partial \tau$, 但是既然它服从式(1.2), 即 $\partial p / \partial s = 0$ 和 $\partial p / \partial \tau = 0$, 我们得到

$$\frac{Du_n}{Dt} + u_s \omega_\tau - u_\tau \omega_s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (1.4)$$

特别地,对于自由面截面上的平行运动,假设在每个平面 $z = \text{const}$ 上的流动是相同的,以及 s 轴和 n 轴在这个平面的相交方式如图 2 所示,我们推导出 $u_\tau = 0$, $\omega_n = 0$, $\omega_\tau = D\alpha/Dt$, $\omega_s = 0$, 这里 α 是 s 和 n 之间的夹角。此后,根据 $\mathbf{e}_s \cdot D\mathbf{u}/Dt = 0$ 的事实,边界条件(1.3)和(1.4)可以写成下列形式:

$$\frac{Du_s}{Dt} = u_n \frac{D\alpha}{Dt}, \quad \frac{Du_n}{Dt} + u_s \frac{D\alpha}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (1.5)$$

只要轴线 s 和 n 与通过对称轴的平面相重合,很容易表明条件式(1.5)适用于任何轴对称流动。

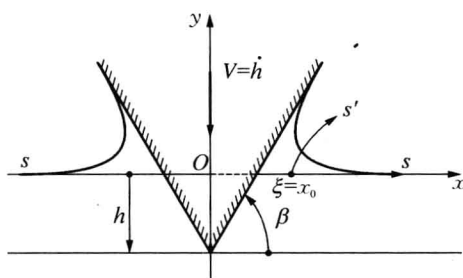


图 3

所有的带运动自由边界的水动力学问题可以细分为两组。第一组由新质点不出现在自由面上的流动组成,例如,无限大的浸没尖劈或椎体,没有流动分离(见图 3)。在这些场合下,单独的质点可以用在无扰动的自由面坐标 (x_0, y_0, z_0) 的初始时刻 $(t = 0)$ 表示。随后的质点的位移,表达为 $x = x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y =$

$y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z = z(x_0, y_0, z_0, t)$, 定义了质点的轨迹 s' 。

第二组问题包括这样的流动: 原来停留在流体中的质点上升到自由面后成为新质点。具体例子是滑行和有限尺寸的尖劈和锥体的浸没,而当自由射流或空穴在物体的边缘形成之时。显然,这些质点可以用时间和它们在固体表面被剥落那点的坐标来表示,这个坐标又是时间的函数。由在运动开始时所在位置的流体质点形成的自由面,代表了外自由边界,而在固体边缘剥落的流体质点形成的自由面代表了内自由边界。我们注意到在一些场合,外自由边界与内自由边界同时存在(图 4)。这样,在一滑动容器(水翼)的平面台阶后面的自由面是内自由面,而在水翼前面、侧面及尾迹处产生的自由面是外自由面。

当质点在自由面聚集后,自由边界的每个部分的行为是相同的,不管边界是内边界还是外边界。然而,如果流体是从静止开始运动的,那么对于外自由边界在

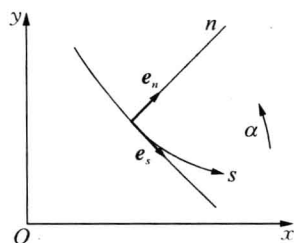


图 2

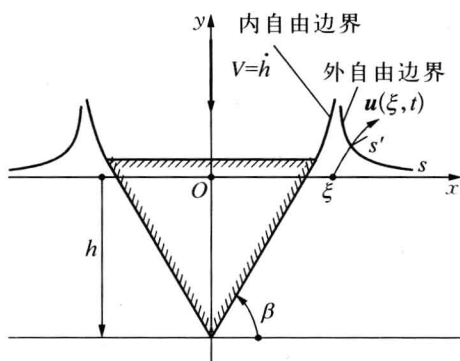


图 4

$t = 0$ 时刻, 边界上所有点的速度将为 $u_{s0} = 0, u_{n0} = 0$ 和 $u_{\tau 0} = 0$ 。对于内自由边界, 质点在 $t > 0$ 的某个时刻在边界聚集, 并且一般具有非零的初速度。

每个单独的流体质点标示为 ξ , 它表示质点的初始坐标系。在二维或轴对称流动的特殊情况下, 对于外边界, 可以方便地认为 ξ 表示从质点到坐标原点的初始距离, 而内边界的 ξ 的含义将在下面解释。

1.2 边界的运动学条件

让我们考虑长度为 δs 的一自由面单元的运动, 在该单元上出现了质点 ξ 和 $\xi + \delta\xi$ 。设这些质点在 $t = t_1$ 时刻的坐标为 $\xi = s$ 及 $\xi + \delta\xi = s + \delta s$ 。将与每个质点有关的速度矢量表示为 $\mathbf{u}(\xi, t)$, 我们发现质点 ξ 的绝对速度为 $\mathbf{u}(\xi, t_1)$, 它的经过微小时间间隔 δt 后的位移是 $\mathbf{u}(\xi, t_1)\delta t$ 。在同一时刻质点 $\xi + \delta\xi$ 的速度将是 $\mathbf{u}(\xi + \delta\xi, t_1) = \mathbf{u}(\xi, t_1) + (\partial\mathbf{u}/\partial\xi)\delta\xi$, 它的位移将是 $\mathbf{u}(\xi, t_1)\delta t + (\partial\mathbf{u}/\partial\xi)\delta\xi\delta t$ 。和以前一样, 在 t_1 时刻沿自由面切向和垂直方向上的单位矢量分别表示为 $\mathbf{e}_s$ 和 $\mathbf{e}_n$, 我们发现 $t_1 + \delta t$ 时刻所研究的各点之间的距离变化了一个量 $\mathbf{e}_s(\partial\mathbf{u}/\partial\xi)\delta\xi\delta t$, 而且在新位置上的自由面单元相对于原始位置转了一个角度 $\delta\alpha = \mathbf{e}_n(\partial\mathbf{u}/\partial\xi)\delta\xi\delta t$ 。在时刻 $t_1 + \delta t$ 沿边界 s 在质点 ξ 和 $\xi + \delta\xi$ 之间的距离为 $\delta s' = \delta s + \mathbf{e}_n(\partial\mathbf{u}/\partial\xi)\delta\xi\delta t$, 而在时刻 t_1 的距离为 $\delta\xi = \delta s$ 。

我们现在引入自由面的相对伸长率

$$\epsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta s}{\delta} - 1 \right) = \frac{\partial s}{\partial \xi} - 1$$

当 $\delta t \rightarrow 0$, 我们有

$$\delta\alpha = \mathbf{e}_n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \delta t = \mathbf{e}_n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \partial t, \quad \delta s' - \delta\xi = \mathbf{e}_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \delta\xi \delta t$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} &= \mathbf{e}_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} = \frac{\partial u_s}{\partial s} - u_n \frac{\partial \alpha}{\partial s} \\ \frac{D\alpha}{Dt} &= \mathbf{e}_n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} = \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_s \frac{\partial \alpha}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

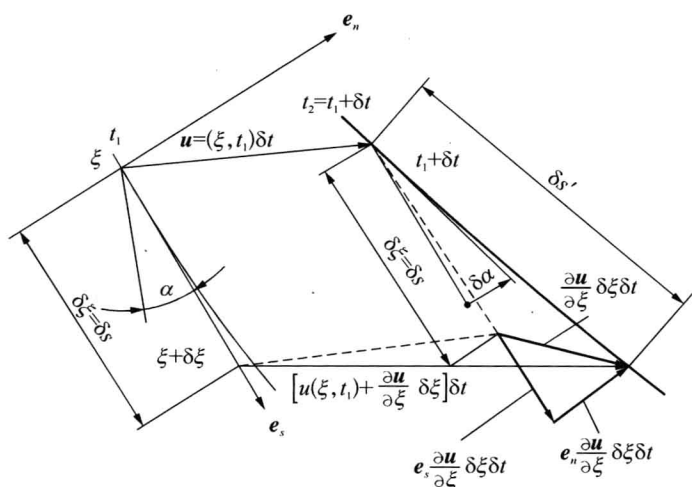


图 5

这里,所用偏导数的含义是:时间维持恒定,对沿自由面从一个质点到另一个质点的运动求微分。这个表面的曲率为 $\partial\alpha/\partial s = 1/R$, 这里 $R = R(s, t)$ 是所研究的自由表面在质点 ξ 的区域里 ($\xi = s$) 的曲率半径。式(1.6)的第一个式子产生了自由面的“非延展性”的定理。

如果 $\epsilon = \text{常数}$ 或 $D\epsilon/Dt = 0$, 沿自由表面测量的质点之间的距离保持恒定。这来自于公式(1.6)的第1式,该条件只有当矢量 $\partial\mathbf{u}/\partial s$ 与单元 s 正交时才被满足。

〔定理一〕 沿运动自由面在个别质点之间的距离保持不变,当且仅当沿自由面被取流体的绝对速度的偏导数与自由面正交。

将式(1.6)第2式的右边代入式(1.5),得出瓦格纳(Wagner)的一般化的边界条件:

$$\frac{Du_s}{Dt} = u_n \left(\mathbf{e}_n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right) = u_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + u_s \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \quad (1.7)$$

自由面单元 δs 在质点 ξ 的区域内不能弯曲的事实,用条件 $D\alpha/Dt = 0$ 来表达。

〔定理二〕 在一与自身平行运动的二维自由边界上(见图6)的各质点的切向速度 $u_s(\xi, t)$, 不会被任意修正边界的垂直速度所改变。

这个定理在研究带有在物体表面形成片状喷雾的不稳定物体运动时很重要。

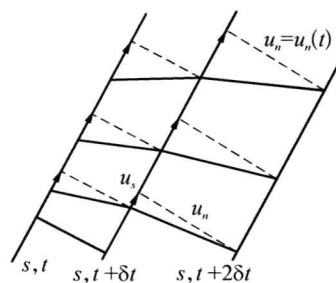


图 6

如果自由面由方程 $F(x, y, x, t) = 0$ 描述, 那么这个表面的每点的垂直速度为

$$v_n = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad (1.8)$$

然而, 速度 v_n 是关于表面 F 上某点的速度, 而不是关于在这个表面上质点 ξ 的速度。

1.3 正交自由面

对于表面上所有点的质点速度 u 都垂直于这个表面的自由面, 将被定义为正交自由面。对于这样的自由边界, 存在一些一般性的定理。

[定理三] 一个连续的以有限速度和加速度运动的自由面可以与属于该自由面的质点的轨迹正交, 当且仅当这些质点的轨迹是直线时。

设属于自由面 s (图 7) 的质点 ξ 沿着轨迹 s' 运动, 轨迹在与 s 的交点处具有曲率半径 R' ; 质点的绝对速度为 $u = ds'/dt$, 与轨迹相切和垂直的加速度为 du/dt 和 u^2/R' , 所有这些加速度都在轨迹的切面内。很明显, 轨迹切线和质点绝对加速度 w 之间的夹角的正切绝对值, 等于 u^2/R' 对 du/dt 的比值。根据动力学条件 (1.1) 和 (1.2), 矢量 w 与 s 正交; 自然地, 当 $u \neq 0$, 或者 $R' \rightarrow \infty$, 或者 $du/dt \rightarrow \infty$ (如果 R' 为有限) 时, s 方向将和 s' 方向正交。这就产生了上述定理。

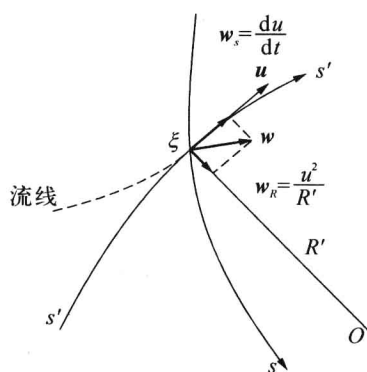


图 7

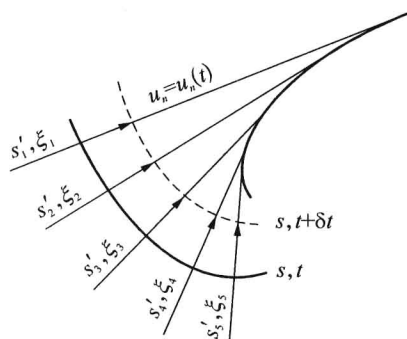


图 8

如果表面 s 与质点轨迹 s' 正交 (见图 8), 那么根据定理三, 轨迹 s' 是直线。因