

全国高等农业院校教材

线性代数

XIANXING DAISHU
QUANCHENG DAOXUE

● 王学会 张文辉 主编

全程导学

全国高等农业院校教材

线性代数全程导学

王学会 张文辉 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数全程导学 / 王学会, 张文辉主编. —北京:
中国农业出版社, 2011. 4
全国高等农业院校教材
ISBN 978 - 7 - 109 - 15508 - 4

I. ①线… II. ①王…②张… III. ①线性代数-高
等学校-教学参考资料 IV. ①0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 033134 号

中国农业出版社出版
(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)
(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷
文字编辑 魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行
2011 年 4 月第 1 版 2011 年 11 月北京第 2 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 16.5

字数: 296 千字

定价: 25.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

编写人员名单

主 编 王学会 张文辉

参 编 房 宏 崔军文

内 容 简 介

本教材根据线性代数现行教学大纲和研究生入学考试大纲编写，采用以章节为序的方法，归纳了线性代数课程中涉及的大量题型，精心选编和分析了一些经典题型及考研题，以供读者学习。

前言

线性代数是高等学校普遍开设的一门重要的数学基础课，它具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。不少读者在学习后感觉内容似乎是懂了，但在分析、解决实际问题时，概念容易混淆，解题能力明显不足。为了解决这些矛盾，同时帮助读者进一步加深对线性代数中基本概念、基本定理的理解，引导读者掌握线性代数的解题方法和技巧，启发、培养读者学习线性代数的兴趣，提高其逻辑思维能力、计算能力和演绎论证能力，特编写了本教材。

本教材根据现行教学大纲和研究生入学考试大纲编写，采用以章节为序的方法，归纳了这门课中所涉及的大量题型，精心选编和分析了一些经典题型及考研题，以供读者学习。本教材在编写上有以下几个特点：（1）画龙点睛，给出了每一章的学习要求与内容提要，使读者学习时心中有数，有的放矢。（2）答疑解惑，对重点、难点及容易混淆的概念进行诠释，使读者对学习中遇到的问题能迎刃而解，便于掌握线性代数的实质。（3）典型例题解析，尽可能全面归纳这门课程所涉及的典型题型，其中有介绍基本概念和基本方法的计算题及证明题，有一题多解的开拓思路题，有较灵活的综合题，也有历届的考研题。不少例题在解答前有详细的分析，请读者务必仔细阅读、品味，做到明其精髓、举一反三。（4）将知识点的讲解、分析与综合习题解答合二为一，便于读者的学习及使用。（5）每一章后安排了章节测试题，旨在进一步强化解题训练，帮助读者掌握本章的重点及难点，提高和巩固学习的效果。当然解题能力的提高需要读者亲自动手，只有通过本身的实践，才能真正得到锻炼，从而不断提高解题能力。

本教材不仅可作为广大学生的学习指导书、教师教学的参考书，还可作为硕士研究生入学考试的复习参考书，具有很强的实用性。

参加本教材编写的教师有：房宏(第三章)，王学会(第一章、第五章)，崔军文(第四章)，张文辉(第二章、第六章)，全书由房宏统稿。

本教材在编写、出版过程中，得到了天津农学院张孝义、卢绍娟老师的支持和帮助，在此表示衷心感谢。

编写本教材时，参阅了许多书籍，引用了一些经典的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

编者于天津农学院

2011年1月

目 录

前言

第一章 行列式	1
一、学习要求与内容提要	1
二、答疑解惑	4
三、典型例题解析	6
四、综合习题解答	20
五、章节测试题一	31
六、参考答案与提示	33
第二章 矩阵	41
一、学习要求与内容提要	41
二、答疑解惑	49
三、典型例题解析	52
四、综合习题解答	69
五、章节测试题二	86
六、参考答案与提示	89
第三章 线性方程组	96
一、学习要求与内容提要	96
二、答疑解惑	101
三、典型例题解析	103
四、综合习题解答	125
五、章节测试题三	147
六、参考答案与提示	151
第四章 相似矩阵	161
一、学习要求与内容提要	161

二、答疑解惑	163
三、典型例题解析	165
四、综合习题解答	174
五、章节测试题四	181
六、参考答案与提示	184
第五章 二次型	190
一、学习要求与内容提要	190
二、答疑解惑	193
三、典型例题解析	194
四、综合习题解答	208
五、章节测试题五	227
六、参考答案与提示	230
第六章 线性空间与线性变换	235
一、学习要求与内容提要	235
二、答疑解惑	238
三、典型例题解析	239
四、章节测试题六	250
五、参考答案与提示	252
主要参考文献	256

第一章

行列式

一、学习要求与内容提要

(一) 学习要求

1. 掌握 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质, 会利用行列式的性质计算行列式.
3. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式.
4. 会用克拉默法则求解线性方程组.

本章重点: n 阶行列式的计算.

(二) 内容提要

1. 排列的逆序数

(1) n 级排列: 自然数 $1, 2, \dots, n$ 按一定的次序排成一个无重复数字的有序数组称为一个 n 级排列, 记为 $i_1, i_2, \dots, i_n$.

(2) 逆序和逆序数: 在一个 n 级排列中, 若一个较大的数排在一个较小的数的前面, 则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

(1) 定义: n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

它是 $n!$ 项的代数和, $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 取自 D 的不同行不同列.

(2) 对角线法则适用于计算二阶和三阶行列式.

(3) 由 n 阶行列式的定义可以得到一些特殊的行列式:

①上、下三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

②对角行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

③副对角行列式:

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

④关于副对角线的上、下三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 行列式的性质

- (1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等.
- (2) 交换行列式的两行(列), 行列式改变符号.
- (3) 如果行列式有两行(列)完全相同, 则行列式等于零.
- (4) 用一个数 k 乘行列式, 等于行列式某一行(列)的所有元素都乘以 k .
也可以说, 如果行列式某一行(列)元素有公因子, 则可将公因子提到行列式的外面.
- (5) 如果行列式有一行(列)元素全为零, 则该行列式等于零.
- (6) 如果行列式有两行(列)对应元素成比例, 则该行列式等于零.
- (7) 如果行列式某一行(列)元素可以表示为两项的和, 则该行列式可以表示为两个行列式的和, 即

二、答疑解惑

问 1. n 阶行列式定义的实质是什么?

答 对 n 阶行列式的定义的理解应把握以下四点:

- (1) 行列式的值是一个具体的数;
- (2) n 级排列的总数是 $n!$, 对所有排列求和, 共有 $n!$ 项;
- (3) 每一项都是 n 个不同元素的乘积, 这 n 个元素要求取自不同行不同列;
- (4) 每一项的“符号”规则是当第一个下标排列为自然排列时, 由第二个下标排列的奇偶性而定.

例如, 考虑四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix},$$

由行列式的定义可知: D 是关于 λ 的 4 次多项式.

因为 D 中有正项 $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)(a_{44} - \lambda)$, 而其他各项 λ 的次数均低于 4. D 中 λ^3 的系数是 $-(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})$.

问 2. 能否由行列式定义得到下面两个关于 x 的多项式的最高次项?

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4x^4 + 3 \end{vmatrix}; \quad (2) D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x^4 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ x & -1 & 2 & 4x^4 \end{vmatrix}.$$

答 可以得出. 考察 D 中所有取自不同行、不同列的 4 个元素之积中含 x 的幂次最高的那些项.

(1) 在 D_1 中, 含 x 的最高幂次的项为 $x \cdot 2x^2 \cdot 3x^3 \cdot (4x^4 + 3)$, 从而 D_1 中 x 的最高幂次项为 $24x^{10}$.

(2) 在 D_2 中, 含 x 的最高幂次的项有两个, 是 $x \cdot 2x^2 \cdot 3x^3 \cdot 4x^4$ 和 $-x \cdot 2x^2 \cdot 3x^3 \cdot x^4$, 从而 D_2 中 x 的最高幂次项为 $(24 - 6)x^{10} = 18x^{10}$.

问 3. (1) 余子式与代数余子式有什么特点?

(2) 它们之间有什么联系?

答 (1) 对于给定的 n 阶行列式 D , 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij}

仅与元素 a_{ij} 的位置有关, 而与元素 a_{ij} 所在行和列元素的大小和正负无关.

(2) 二者的关系是: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 则当 $i+j$ 为奇数时, $A_{ij} = -M_{ij}$; 当 $i+j$ 为偶数时, $A_{ij} = M_{ij}$.

问 4. 范德蒙行列式有什么特点?

答 n 阶范德蒙行列式 $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 记为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

D_n 有以下三个特点:

(1) 从行的角度看, 第 i 行元素从左向右依次是各变元的 $i-1$ 次幂, $i=1, 2, \dots, n$.

(2) 从列的角度看, 第 j 列元素从上到下依次是变元 x_j 的零次幂, 1 次幂, $\dots, n-1$ 次幂, $j=1, 2, \dots, n$.

(3) 从结果看, D_n 是 n 个变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的函数, 是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个一次因式之积, 每一个因式形如 $x_i - x_j$, 其中 $1 \leq j < i \leq n$, 即下标大的变元与下标小的变元之差. 于是 n 阶范德蒙行列式是所有可能的下标大的变元与下标小的变元差的乘积.

问 5. 克拉默法则的意义是什么?

答 一方面, 克拉默法则给出了求解 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般结论, 又是 n 个未知数 m 个方程的线性方程组理论的基础.

另一方面, 由克拉默法则可以得出以下三个结论:

(1) 如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解或有两个不同的解, 则系数行列式 $D=0$;

(2) 如果齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解, 则系数行列式 $D=0$;

(3) 如果齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数行列式 $D \neq 0$, 则只有零解.

问 6. 如果线性方程组的系数行列式 $D=0$, 能不能说非齐次线性方程组有无穷多个解?

答 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组来说, 系数行列式 $D \neq 0$ 是方程组有唯一解的充要条件. 因此, 如果系数行列式 $D=0$, 可以说方程组不是有唯一解, 可能是无解或有无穷多解两种情况.

三、典型例题解析

题型一 计算排列的逆序数

例 1 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

(1) 1 3 4 7 2 6 5;

(2) $n(n-1)\cdots 2\ 1$;

(3) $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)\ 2\ 4\ 6\cdots 2n$.

解 (1) $\tau=0+0+0+0+3+1+2=6$, 偶排列.

(2) $\tau=0+1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$, 则当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, 为偶排列; 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 为奇排列.

(3) $\tau=0+1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$, 奇偶性与排列(2)相同.

例 2 选择 i 和 k , 使

(1) 1 i 2 5 k 4 8 9 7 为奇排列;

(2) 1 2 7 4 i 5 6 k 9 为偶排列.

解 (1) 由题意, i, k 只能取 3 和 6, 两种可能: $i=3, k=6$ 或 $i=6, k=3$, 逆序数分别为 $\tau_1=5, \tau_2=8$. 所以 $i=3, k=6$ 为所求.

(2) 由题意, i, k 只能取 3 和 8, 两种可能: $i=3, k=8$ 或 $i=8, k=3$, 逆序数分别为 $\tau_1=5, \tau_2=10$. 所以 $i=8, k=3$ 为所求.

题型二 有关行列式的概念

例 3 已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 是四阶行列式中带负号的一项, 求 j 和 k .

解 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$, 则排列 $2kj1$ 只有两种可能: 2 3 4 1 或 2 4 3 1, 而 $\tau(2341)=0+0+0+3=3, \tau(2431)=0+0+1+3=4$.

因为 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 带负号, 故 $k=3, j=4$.

例 4 若

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x)=0$ 的根有多少个?

解 由题意可知, $f(x)$ 是关于 x 的四次多项式.

化简行列式：将第 1 行元素分别乘以 (-2) , (-3) , (-4) 后加到第 2, 3, 4 行的对应元素上, 得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义可知, $f(x)$ 是一个关于 x 的二次多项式, 故 $f(x)=0$ 至多有两个根.

例 5 证明:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 行列式 D 中的一般项是 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$, 列标互不相同取 $1 \sim 5$, 故 j_3, j_4, j_5 中至少有一个要大于或等于 3, 那么 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 中至少有一个为 0, 所以 D 的每一项都为 0, 故 $D=0$.

题型三 利用性质计算行列式

将行列式化成上(或下)三角形行列式.

例 6 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 解法一 从第 2 行开始到第 n 行分别减去第 1 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

再将第 2, 3, $\dots$, n 列加到第 1 列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法二 将第 2, 3, ..., n 行分别加到第 1 行上, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

从第 2 行开始到第 n 行分别加上第 1 行的 $-a$ 倍, 得

$$\begin{aligned} D_n &= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

例 7 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 把 D 化为上三角形行列式.

将第 2 列的 $-\frac{1}{2}$ 倍, 第 3 列的 $-\frac{1}{3}$ 倍, ..., 第 n 列的 $-\frac{1}{n}$ 倍分别加到第 1 列上, 得