

GAO DENG SHUXUE GLIAN XICE (下册) 高等数学练习册

南昌航空大学高等数学教研组 编

- 多元函数微分法及其应用
- 重积分
- 曲线积分与曲面积分
- 无穷级数
- 微分方程

$$d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq z^2} r dr d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} r dr d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz$$

$$r dr d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz$$



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

1437667

013

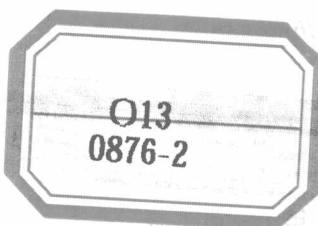
08762



CS1604949

高等数学练习册（下）

南昌航空大学高等数学教研组 编



西南交通大学出版社
· 成都 ·

重庆师大图书馆

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学练习册 / 南昌航空大学高等数学教研组编.
—成都：西南交通大学出版社，2011.1
ISBN 978-7-5643-0966-4

I . ①高… II . ①南… III . ①高等数学—高等学校—
习题 IV . ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 238111 号

高等数学练习册

(上、下册)

南昌航空大学高等数学教研组 编

责任 编辑	黄淑文
封面 设计	墨创文化
出版 发行	成都西南交大出版社有限公司 (简称 西南交通大学出版社)
发行部电话	028-87600564 87600533
地 址	成都二环路北一段 111 号
邮 政 编 码	610031
网 址	http://press.swjtu.edu.cn
印 刷	成都蜀通印务有限责任公司
成 品 尺 寸	185 mm×260 mm
总 印 张	13
总 字 数	327 千字
版 次	2011 年 1 月第 1 版
印 次	2011 年 1 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-0966-4
套 价	20.00 元 (本册：10.00 元)

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话：028-87600562



第八章 第一次作业 班级_____ 姓名_____ 学号_____

1. 函数 $z = \frac{\sqrt{2x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是_____.

2. 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) =$ _____.

3. 极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} (1+xy)^{\frac{1}{x}} =$ () .
A. 1 B. 2 C. e D. 不存在

4. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin(xy)}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 连续, 则 $a =$ () .
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$.

解：令 $t = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 则 $t \in (0, 1)$.

6. 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}}$.

7. 证明：极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2y^4}{x^4 + y^8}$ 不存在.

$$\begin{aligned} & \text{沿 } y = x \text{ 轴取极限: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2y^4}{x^4 + y^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2x^4}{x^4 + x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^4(1 + x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x^4} = 0. \\ & \text{沿 } y = x^2 \text{ 轴取极限: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2y^4}{x^4 + y^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2x^8}{x^4 + x^{16}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{x^4(1 + x^{12})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{1 + x^{12}} = 1. \end{aligned}$$

1. 设 $f(x, y) = x^2 + (y-2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f_x(1, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f_y(1, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \\ y = 6 \end{cases}$ 在点 $(2, 6, 10)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是 _____.

3. 设 $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 () .

- A. 连续, 且偏导数存在
- B. 不连续, 但偏导数存在
- C. 连续, 但偏导数不存在
- D. 可微

4. 设 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$, 则 $dz|_{(2,1)} = (\quad)$.

- A. $\frac{5}{9}dx + \frac{10}{9}dy$
- B. $-\frac{5}{9}dx + \frac{10}{9}dy$
- C. $\frac{5}{9}dx - \frac{10}{9}dy$
- D. $-\frac{5}{9}dx - \frac{10}{9}dy$

5. 求函数 $z = e^{xy} + x \ln y$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y-1) \lambda_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x-1) \lambda_2 + \frac{x}{y}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{其中 } \lambda_1 = e^{xy} + x \ln y, \quad \lambda_2 = e^{xy} + 1; \\ \text{且 } \lambda_1' = (y-1) \lambda_1, \quad \lambda_2' = (x-1) \lambda_2. \end{array} \right\}$$

6. 设 $z = y^x$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

7. 设 $u = \sin(xy) + \cos(yz)$, 求 du .

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = (\cos(xy) + y \sin(xy)) dx + (\sin(xy) + z \sin(yz)) dy + (-\sin(yz) - y \sin(yz)) dz.$$

1. 设 $z = e^{x+y^2}$, $x = \sin t$, $y = t^2$, 则 $\frac{dz}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $z = x^{\ln y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

本题为选择题，每题有且仅有一个正确答案。请将正确答案的字母填入括号内。

3. 设 $z = (1+xy)^{x+2y}$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = (\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 设 $z = f(x-y, \frac{x}{y})$, f 具有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\quad)$.

- A. $f''_{11} + \frac{1}{y} f''_{12} + \frac{1}{y} f''_{21} + \frac{1}{y^2} f''_{22}$
 B. $-f''_{11} - \frac{x}{y^2} f''_{12} - \frac{1}{y} f''_{21} - \frac{x}{y^3} f''_{22} - \frac{1}{y^2} f'_2$
 C. $f''_{11} + \frac{x}{y^2} f''_{12} + \frac{2x}{y^3} f'_2 + \frac{x}{y^2} f''_{21} + \frac{x^2}{y^4} f''_{22}$
 D. $f''_{11} + \frac{1}{y} f''_{21}$

5. 设 $z = u^2 + 2uv + w^2$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, $w = x^2 - y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. 章八第

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + 2uv + w^2) = 2u \cdot 2x + 2v \cdot y + 2w \cdot 0 = 4xu + 2vy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + 2uv + w^2) = 2u \cdot 0 + 2v \cdot x + 2w \cdot (-2y) = 2vx - 4wy$$

6. 设函数 $z = f(xy, \frac{y}{x}) + g(x^2y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有连续的二阶导数, 求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$z = f(xy, \frac{y}{x}) + g(x^2y)$$

7. 设 $z = f(u, x, y)$, 且 $u = xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_x \frac{\partial x}{\partial y} + f_y \frac{\partial y}{\partial y} = f_u e^y + f_x \cdot 0 + f_y = f_u e^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(f_u e^y) = f_{uu} e^y + f_{ux} \cdot 0 = f_{uu} e^y$$

$$= f_u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + f_{uy} = f_u \frac{\partial}{\partial u} (e^y) + f_{uy} = f_{uu} e^y + f_{uy}$$

$$= f_u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + f_{uy} = f_u \frac{\partial}{\partial u} (e^y) + f_{uy} = f_{uu} e^y + f_{uy}$$

$$= f_u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + f_{uy} = f_u \frac{\partial}{\partial u} (e^y) + f_{uy} = f_{uu} e^y + f_{uy}$$

第八章 第四次作业 班级_____ 姓名_____ 学号_____

1. 设 $x^2y + 3x^4y^3 - 4 = 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $xyz = x + y + z$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $z = e^{2x-3z} + 2y$, 则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 设 $z = f(x, y)$ 是由 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2z - 1 = 0$ 所确定的隐函数, 则当 $z=2$ 时,
 $f_x(1, 1) = (\quad)$.

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. 1

5. 设 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, 求 $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$.

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

6. 设 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} e^{-xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} e^{-xy}$$

7. 设 $\begin{cases} 2ux+vy=0 \\ u-x^3+v^2=0 \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v}$$

1. 设 $u = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, 则 $\frac{du}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $z = e^u \cos v$, 而 $u = xy$, $v = x + y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下列 4 条性质: ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续; ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续; ③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微; ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在. 若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质 P 推出性质 Q, 则有 () .

- A. ② \Rightarrow ③ \Rightarrow ① B. ③ \Rightarrow ② \Rightarrow ① C. ③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ① D. ③ \Rightarrow ① \Rightarrow ④

注: 本题与教材第 10 章例题 1 相同, 只是将“在该点处可微”改为了“在该点处可导”.

4. 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分

$$dz = (\quad).$$

- A. $dx - dy$ B. $\sqrt{2}dx + dy$ C. $dx - \sqrt{2}dy$ D. $dx + \sqrt{2}dy$

5. 求极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4}$.

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} = \frac{\partial b}{\partial b} \lim_{y \rightarrow 0} (x^2 + y^2 + y^4)^{-1} = x^2 + 0^2 + 0^4 = x^2$

6. 设 $xy+yz+zx=1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 设 $f(x, y, z) = e^x yz^2$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求 $f_x(0, 1, -1)$.

设 $u = x+y+z+xyz=0$, 则 $\bar{\nabla}u = \bar{\nabla}(x+y+z+xyz) = \bar{\nabla}x + \bar{\nabla}y + \bar{\nabla}z + \bar{\nabla}(xyz) = \bar{\nabla}x + \bar{\nabla}y + \bar{\nabla}z + z\bar{\nabla}x + x\bar{\nabla}y + y\bar{\nabla}z$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}u &= \bar{\nabla}x + \bar{\nabla}y + \bar{\nabla}z + z\bar{\nabla}x + x\bar{\nabla}y + y\bar{\nabla}z \\ &= (1+z)x\bar{\nabla}x + (1+z)y\bar{\nabla}y + (1+z)z\bar{\nabla}z \end{aligned}$$

1. 曲线 $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ 在点 $(0, 2, 1)$ 处的切线方程是_____，法平面方程是_____.

2. 曲面 $x^3y^2 + xz + z = 3$ 在 $(1, 1, 1)$ 点处的切平面方程为_____，法线方程为_____.

3. 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的

单位法向量为 () .

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}\{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ B. $\frac{1}{\sqrt{5}}\{\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}\}$ C. $\frac{1}{\sqrt{5}}\{\sqrt{3}, 0, 1\}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}\{1, 0, \sqrt{2}\}$

4. 旋转抛物面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦为

() .

- A. $\frac{1}{\sqrt{22}}$ B. $\frac{3}{\sqrt{22}}$ C. $-\frac{3}{\sqrt{22}}$ D. $-\frac{1}{\sqrt{22}}$

5. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 与抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在点 $(1, 1, 2)$ 处的切线和法平面的方程.

解: 由题意知, 两曲面的交线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$ 得 $\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 4 \end{pmatrix}$.

6. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

解: 由题意知, 两曲面的交线为 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ 得 $\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 0 \end{pmatrix}$.

7. 在曲面 $z = x^2 + y^2$ 上求一点, 使曲面在该点处的法线垂直于平面 $x + 2y + 3z = 1$, 并写出此法线方程.

解: 由题意知, 两曲面的交线为 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial z}{\partial z} &= 1, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial F}{\partial y} &= 2, & \frac{\partial F}{\partial z} &= 3. \end{aligned}$$

1. 函数 $u = xy^2z^3$ 在点 $A(5, 1, 2)$ 处沿该点到点 $B(9, 4, 14)$ 的方向的方向导数为_____.2. 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 - z^2)$ 在点 $M(1, -1, 1)$ 处的梯度 $\text{grad}u|_M = \underline{\hspace{2cm}}$.3. 对二元函数 $z = f(x, y)$ 而言 () .

- A. 若 f_x, f_y 存在且连续, 则 $f(x, y)$ 沿任一方向的方向导数存在
 B. 若 $f(x, y)$ 的偏导数都存在, 则 $f(x, y)$ 沿任一方向的方向导数存在
 C. 若沿任一方向的方向导数存在, 则函数 $f(x, y)$ 必连续
 D. 以上结论均不对

4. 若函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处的三个偏导数都存在且不全为 0, 则向量 $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$ 的方向是函数 u 在点 (x, y, z) 处的 ().

- A. 变化率最小的方向
 B. 变化率最大的方向
 C. 可能是变化率最小的方向, 也可能是变化率最大的方向
 D. 既不是变化率最小的方向, 也不是变化率最大的方向

5. 求由方程 $e^z - xyz = e$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(0, 1)$ 处沿 $\vec{l} = (3, -4)$ 方向的方向导数.

6. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上点 $(1, 1, -1)$ 处沿曲线在该点的切线正方向（对应于 t 增大的方向）的方向导数.

7. 求函数 $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在这点的内法线方向的方向导数.