《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

李普希兹条件

——从几道近年高考数学试题谈起

刘培杰　孙宏学　编著

◎ 几个高考与竞赛试题

◎ 李普希兹其人

◎ 压缩不动点原理

◎ 李普希兹函数

◎ 李普希兹条件与小波分析

HITP

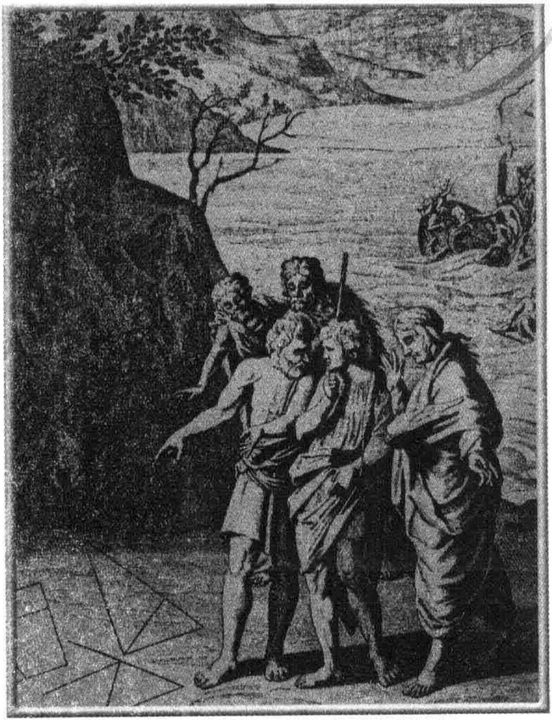
哈[illegible]工業大學出版社

HAR[illegible]ITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

李普希兹条件

——从几道近年高考数学试题谈起



刘培杰 孙宏学 编著

◎ 李普希兹其人

◎ 压缩不动点原理

◎ 李普希兹函数

◎ 李普希兹条件与小波分析

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书深入地探讨和介绍了李普希兹条件的基本内容，并通过近年高考与竞赛中出现的一些试题提出了关于李普希兹条件的几个问题.

本书适合初、高中师生，以及高等师范类院校数学教育专业的大学生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

李普希兹条件：从几道近年高考数学试题谈起/刘培杰，孙宏学编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.9

ISBN 978-7-5603-3766-1

Ⅰ.①李… Ⅱ.①刘… ②孙… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 190044 号

策划编辑	刘培杰　徐　丽
责任编辑	徐　丽
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真	0451-86414749
网　　址	http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷	哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16　印张 6.75　字数 70 千字
版　　次	2012 年 10 月第 1 版　2012 年 10 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5603-3766-1
定　　价	18.00 元

目录

§1 几个高考与竞赛试题

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个正常数 L，使得定义域 D 内的任意两个不等的值 x_1,x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的李普希兹函数.

试题 1 (2003，北京)设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数，且满足条件：

(i) $f(-1)=f(1)=0$；

(ii) 对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$.

(Ⅰ) 证明：对任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$；

(Ⅱ) 证明：对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$；

(Ⅲ) 在区间 $[-1,1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$，且使得

$$\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|, u,v\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\|f(u)-f(v)|=|u-v|, u,v\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

若存在，请举一例；若不存在，请说明理由.

(Ⅰ) 证明：由题设条件可知，当 $x\in[-1,1]$ 时，有 $|f(x)|=|f(x)-f(1)|\leqslant|x-1|=1-x$，即 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$.

(Ⅱ) 证法：对任意的 $u,v\in[-1,1]$，当 $|u-v|\leqslant 1$ 时，有

$$|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|\leqslant 1$$

当 $|u-v|>1$ 时，$u\cdot v<0$，不妨设 $u\in[-1,0)$，$v\in(0,1]$，且 $v-u>1$，从而有

$$\begin{aligned}|f(u)-f(v)|&\leqslant|f(u)-f(-1)|+|f(v)-f(1)|\\&\leqslant|u+1|+|v-1|\\&=2-(v-u)<1\end{aligned}$$

综上可知，对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有

$$|f(u)-f(v)|\leqslant 1$$

（Ⅲ）**答**：这样满足所述条件的函数不存在. 理由如下：假设存在函数 $f(x)$ 满足条件，则由 $|f(u)-f(v)|=|u-v|$，$u,v\in[\frac{1}{2},1]$，得

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}$$

又 $f(1)=0$，所以 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}$，又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$. 由条件 $|f(u)-f(v)|<|u-v|$，$u,v\in[0,\frac{1}{2}]$ 得

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right|<\frac{1}{2}$$

这与 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}$ 发生矛盾，因此假设不成立，即这样的函数不存在.

点评　由试题中函数 $f(x)$ 满足的条件(ii) 可联想到高等数学中的李普希兹函数.

在 2006 年 9 月 24 日举行的全国高中数学联赛江西省预赛中有一题为(第一大题第 2 小题)：

试题 2　集合 M 由满足如下条件的函数 $f(x)$ 组成：当 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant$

$4|x_1-x_2|$，对于两个函数 $f_1(x)=x^2-2x+5$，$f_2(x)=\sqrt{|x|}$，以下关系中成立的是（　　）

A. $f_1\in M, f_2\in M$　　B. $f_1\notin M, f_2\notin M$

C. $f_1\notin M, f_2\in M$　　D. $f_1\in M, f_2\notin M$

答 D.

解　易知 $f_1\in M$，对 f_2 再求得

$$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=\frac{||x_1|-|x_2||}{\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|}}$$

后，不妨取 $x_1=\frac{1}{100}, x_2=\frac{1}{400}$，可得

$$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=\frac{20}{3}|x_1-x_2|>4|x_1-x_2|$$

所以 $f_2\notin M$.

我们再来关注一下高考试题. 2006 年高考题北京卷第 6 题为：

试题 3　在下列四个函数中，满足性质："对于区间 $(1,2)$ 上的任意 $x_1, x_2(x_1\neq x_2)$，$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$ 恒成立"的只有（　　）

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=x^2$

分析　注意到 $x_1, x_2(x_1\neq x_2)$，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<1$$

而 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ 是具有直线斜率的几何意义，利用数形结合的思想可知选（A）.

这样的问题被命名为即时学习型问题，是指在题设中直接引入高等数学概念、高等数学结论，要求学生

理解题目给出高等数学信息并与原有初等数学知识相结合解决问题,再例如 2004 年高考江苏卷第 22 题:

试题 4　已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足下列条件:对任意的实数 x_1,x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$,其中 λ 是大于 0 的常数,设实数 a_0,a,b 满足 $f(a_0)=0,b=a-\lambda f(a)$:

(1) 证明:$\lambda\leqslant 1$,且不存在 $b_0\neq a_0$,使 $f(b_0)=0$;

(2) 证明:$(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$;

(3) 证明:$[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

试题 5　A 是由定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合:(1) 对任意 $x\in[1,2]$,都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$;(2) 存在常数 $L(0<L<1)$,使得对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$,都有

$$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$$

(1) 设 $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x},x\in[2,4]$,证明:$\varphi(x)\in A$;

(2) 设 $\varphi(x)\in A$,如果存在 $x_0\in(1,2)$,使得 $x_0=\varphi(2x_0)$,那么这样的 x_0 是唯一的;

(3) 设 $\varphi(x)\in A$,任取 $x_1\in(1,2)$,令 $x_{n+1}=\varphi(2x_n),n=1,2,\cdots$,证明:给定正整数 k,对任意的正整数 p,成立不等式

$$|x_{k+p}-x_k|\leqslant\frac{L^{k+1}}{1-L}|x_2-x_1|$$

试题 6　(2004 年泰国数学奥林匹克试题) 设函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$,满足:

(1) $f(0)=f(1)=0$;

(2) 对所有的 $x,y\in[0,1]$,且 $x\neq y$

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|$$

证明:对所有的 $x,y\in[0,1]$,有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}$$

以上各题均以李普希兹函数为背景.

§2 李普希兹其人

李普希兹(Lipschitz. Rudolph,1832—1903)是德国著名数学家.1832 年 5 月 14 日出生,1862 年在勃列斯拉夫里大学任教授,1884 年起任波恩大学教授,1903 年 10 月 7 日逝世.

李普希兹在数学分析、数论、微分方程、多维几何、微分几何、张量分析等方面都作出了贡献.

1876 年他把关于微分方程 $y'=f(x,y)$ 解的存在性定理的柯西条件减弱为:存在常数 k,使在

$$|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b$$

的区域内所有 (x,y_1),(x,y_2) 满足

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<k(y_1-y_2)$$

这就是著名的李普希兹条件的原始来源.

§3 压缩不动点原理

在数学分析中有一个常见的习题:

习题 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有定义,若对任意的 $x\in[0,1]$,满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,且对任意的 x,

$y \in [0,1]$ 有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \alpha |x-y|, 0<\alpha<1$$

则必存在唯一的 x_0，使 $f(x_0)=x_0$，即 $f(x)$ 有唯一的不动点.

这个习题很像一维的布劳维尔不动点定理，即下面定理：

定理 1 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，则必存在 $x_0 \in [0,1]$，使 $f(x_0)=x_0$.

证明：先构造一个函数 $F(x)=f(x)-x$. 如 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 0 或 1 即为定理要求的 x_0，定理已成立（此时将有 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$）. 由条件 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ 知 $F(0)=0 \geqslant 0$. $F(1)=f(1)-1 \leqslant 0$，故只需要在 $F(0)>0$ 和 $F(1)<0$ 的情形下证明定理.

由于 $f(x)$ 是连续函数，故 $F(x)$ 也是连续函数，因此当 x 由 0 出发变到 1 时，$F(x)$ 将从正值 $F(0)$ 连续地变到负值 $F(1)$，所以必至少存在一点 x_0，使 $F(x_0)=0$，而这正是 $f(x_0)=x_0$（证毕）.

前面这一习题不仅要求 $f(x)$ 连续，还要求 $f(x)$ 是压缩的（压缩可推出连续）. 这一压缩性质的要求，形成了另一种风格的不动点定理.

由于 $f(x)$ 是自映射（$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$）. 故可以用迭代方法，任取 $x_0 \in [0,1]$ 记 $x_{n+1}=f(x_n)$，则 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. 这时候我们必须关心 $\{x_n\}$ 是否收敛.

在数学分析中用以判断数列收敛的主要依据是柯西收敛准则，即设有数列 $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对任何 $p \in \mathbf{N}$，总有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 成立.

下面我们用此来判断 $\{x_n\}$ 的收敛性，显然有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant\alpha|x_n-x_{n-1}|$$
$$=\alpha|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\leqslant\alpha^2|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

反复应用此不等式可知

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\alpha^n|x_1-x_0|$$

我们对任何正整数 p. 考察

$$\begin{aligned}&|x_{n+p}-x_n|\\ \leqslant&|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\ \leqslant&(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)|x_1-x_0|\\ =&\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}|x_1-x_0|\\ <&\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1-x_0|\end{aligned}$$

其中 $|x_1-x_0|$ 是定数，$0<\alpha<1$，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha^n\to 0$，故 $\{x_n\}$ 满足柯西收敛准则，即 x_n 收敛. 设其收敛于 x^*，由于 f 的压缩性可以导出函数的连续性，由

$$x_n=f(x_{n-1}),n=1,2,\cdots$$

可知 $x^*=f(x^*)$，故 x^* 是不动点.

还可以证明 x^* 是唯一的不动点，假若不然，另有一不动点 x^{**}，则

$$|x^*-x^{**}|=|f(x^*)-f(x^{**})|\leqslant\alpha|x^*-x^{**}|$$

其中 $0<\alpha<1$，这只有在 $|x^*-x^{**}|=0$ 时才成立，即 $x^*=x^{**}$.

此定理的证明过程同 §1 中试题 4 的过程完全一样. 类似的结论还有：

定理 2 设 I 为区间，$f\in C(I)$（表 I 上的全体连续函数），且在 I 中的所有内点处可微，又设存在常数 $L>0$，使得对 I 的所有的点 x 处成立 $|f'(x)|\leqslant L$，则 f 在区间 I 上满足李普希兹条件.

证明 $\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$. 在区间$[x_1,x_2]$

上对 f 用拉格朗日中值定理，就有 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使满足

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2| \leqslant L|x_1-x_2|$

这个定理给出了判定 f 是否满足李普希兹条件的判据.

我们也可以将李普希兹条件推广至一般情形. 即由原来的 $|f(x)-f(y)|<L|x-y|$. 改为 $|f(x)-f(y)|<L|x-y|^d, d>1$，这样满足条件的 f 就大大增加了.

定理 3 设函数 f 在区间 I 上满足带指数的李普希兹条件，即存在 $M>0, \alpha>0$，使得当 $x, y \in I$ 时，成立 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$，则若 $\alpha>1$，f 在 I 上一定为常值函数.

证明只需任取 $x<y$，在两点之间插入足够多的等距分布的点，用以估计 $|f(x)-f(y)|$.

或采用下法：

设 $\alpha=1+\beta(\beta>0)$，任取一点 $x_0 \in [a,b]$，有

$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-x_0|, x \neq x_0, x \in [a,b]$，

上式即

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant M|x-x_0|^\beta$$

令 $x \rightarrow x_0$，则有 $f'(x_0)=0$，故 $f'(x)$ 在$[a,b]$上恒为零，从而 $f(x)$ 在$[a,b]$上恒等于常数.

推广到多元：假设 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中包含闭球

$$\bar{B}(x_0; r)=\{x \mid \|x-x_0\| \leqslant r\}$$

的区域中有连续偏导数，则存在常数 L 使得对 $\bar{B}(x_0; r)$ 中的任意两点 x, x' 成立

$$\|F(x)-F(x')\| \leqslant L\|x-x'\|$$

可用单变量函数的中值定理来证明这个结论. 连

接 x,x' 的线段可用参数表示为

$$(1-t)x+tx'=x+tv$$

其中 $v=x'-x,0\leqslant t\leqslant 1$. 用 F 沿该线段的取值定义函数 $g(t)$

$$g(t)=F((1-t)x+tx')=F(x+tv)$$

则 $g(0)=F(x),g(1)=F(x')$，由链式求导法则（应用于 F 的每个部分）

$$g'(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(x+tv)v_j=DF(x+tv)v$$

因此

$$\begin{aligned}F(x')-F(x)&=g(1)-g(0)\\&=\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 DF(x+tv)v\mathrm{d}t\end{aligned}$$

在最后一步取绝对值，则有

$$\|DF(x+tv)v\|\leqslant\|DF(x+tv)\|\cdot\|v\|$$

这里用到了偏导数矩阵的范数 $\|DF(x+tv)\|$，因为所有偏导数都是连续的，所以存在常数 $L>0$ 使得对所有 $\bar{B}(x_0,r)$ 中的点 x 满足 $\|DF(y)\|\leqslant L$，特别地，在点 $x+tv$ 处以上不等式也成立，从而

$$\begin{aligned}\|F(x')-F(x)\|&\leqslant\int_0^1\|DF(x+v)\|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^1 L\|v\|\mathrm{d}t\\&\leqslant L\|v\|=L\|x'-x\|\end{aligned}$$

§4 推广到向量空间

在向量空间中也可以建立李普希兹条件，$\| F(x) - F(y) \| \leqslant L \| x - y \|$.

举一个著名的例子：如果将地球表面的风力场视为连续可微的，那么在任意时刻，在地球上至少存在一点，在这一点上是风平浪静，即为零级风.

在三维欧氏空间中，以坐标原点为中心，半径为1的球面叫做单位球面，记为S. 在S上的每一点处作切平面，在这切平面上，任意地指定一个向量，这样就形成了S上的一个切向量场. 如果把S想象为地球的表面，那么S的一个切向量场就可以理解为地面上的一个风速场，因为在一个固定的时刻，地球上的每一点处都有一定的风向和风力的大小，风向是该点的切平面上的一个向量.

如果这个场在每一点都不是零向量，那么在除以各点的模长之后，便得到一个各处的模长为1的切向量场，我们称之为S的单位切向量场，它只是刻画出各点处的风向.

这些观点得出的结果可叙述为下列数学结论：

在S上不存在连续可微的单位切向量场. 这是拓扑学中的一个经典定理，并非“场论”中必不可少的内容. 这个定理有许多经典证明，有些用到组合推理、同调论、微分流形，有的涉及几何拓扑的方法. 这个定理

的一个简单证明是 1962 年菲尔兹奖得主米尔诺(Milnor)于 1978 年在《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly,1998(95):11—22)中给出的. 我们是从朗格(Serge Lang)的《Calculus of Several Variables》(Springe,1987)一书中得到的这一线索. 朗格在书中叙述了这一定理并给出了证明. 他在书中写道:"直到最近,我才知道这一经典定理有一个比较简单的证明". 他说的简单的证明就是指米尔诺的那篇文章.

米尔诺的证明,依赖于两个重要引理,第一个涉及体积的计算. 设 A 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个紧致集,映射下是定义在包含 A 的某个开集上的连续可微的向量场,对于每一个实数 t,考察映射

$$\varphi_t(p) = p + tF(p), p \in A$$

我们可以证明存在李普希兹常数 L,使得

$$\| F(x) - F(y) \| \leqslant L \| x - y \|$$

对一切 $x, y \in A$ 成立.

希尔伯特指出:在解决一个数学问题时,如果我们没有获得成功,原因常常在于我们没有认识到更一般的观点,即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节. 采取这样的观点之后,不仅我们所研究的问题会容易得到解决,同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法.

在讨论数学问题时,我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用,其实恰恰相反.

§5 常微分方程组

美国数值分析学家 Arieh Iseries 说："微分方程数值分析，是人类最主要的科技手段之一，这些科技手段繁衍出我们每日经历的科技现象：从电视和因特网到空中旅行、天气预报、工业生产、能量的生成和配给……这个清单实际上可以无限地列下去."

由于常微分方程组在众多应用中的中心地位导致了常微分方程组数值方法的重要性.

而常微分方程组的基本问题是给出初值问题

$$y' = f(t, y), t \leqslant t_0, y(t_0) = y_0 \qquad ①$$

的解. 这里 $f: [t_0, \infty) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ 是一个足够好的函数，并且初始条件 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^d$ 是一个给定的向量，$\mathbf{R}^d$ 表示 d 维实欧几里得空间.

这里"足够好"指的是 f 具有我们需要的所有性质. 至少对于给定的向量范数，我们要求 f 满足李普希兹条件，即对于所有的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^d, t \geqslant t_0$，有

$$\| f(t, \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{y}) \| \leqslant \lambda \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|$$

这里 $\lambda > 0$ 是不依赖于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的实常数，即我们前面所说的李普希兹常数. 为什么要求 f 要满足这一条件呢？因为在这个条件下我们可以证明常微分方程组 ① 具有唯一解. 并且当我们用数值法去解常微分方程组时，当格点列被加细时，数值解趋向于准确解.

§6 如何确定李普希兹常数

对于李普希兹常数 L 如何确定是个问题，一般地，找到式 ① 的上界是一件困难的事情，但是，在许多便用李普希兹函数的优化技术中，集合 P 是逐次加细的矩形或单纯形，对于此类集合，可以使用自适应的方法逼近常数 L，区间分析(interal analysis)方法提供了一种在矩形上估计常数 L 的十分有用的技术.

值得指出的是，李普希兹函数是十分广泛的一类函数，这类函数关于许多常见的运算是封闭的.

定理 4 设 f,g 是紧集 $P\subset\mathbf{R}^n$ 上的李普希兹函数，则：

(1) f,g 的每个线性组合在 P 上也是李普希兹函数；

(2) $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 在 P 上是李普希兹函数；

(3) 乘积 $f\cdot g$ 在 P 上是李普希兹函数；

我们又给出 $\min\{f,g\}$ 的证明：

设 f,g 在 P 上分别具有李普希兹常数 L_f,L_g，则

$$\begin{aligned}&|\min\{f,g\}(x^2)-\min\{f,g\}(x^1)|\\ \leqslant{}&\max\{|f(x^2)-f(x^1)|,|g(x^2)-g(x^1)|\}\\ \leqslant{}&\max\{L_f,L_g\}\|x^2-x^1\|\end{aligned}$$

因此，$\min\{f,g\}$ 在 P 上是李普希兹函数，并且具有李普希兹常数 $L=\max\{L_f,L_g\}$.

李普希兹常数的确定在优化中起至关重要的作用，特别是在全局优化中，全局优化研究的是非线性函