



海文考研

强化提分

海文考研辅导教材公开出版

2014考研数学

适合数学(一)(三)

概率论与数理统计 辅导讲义

万学海文考试研究中心 编

主编：叶盛标 铁 军 张震峰 何先枝

主审：赵达夫

直击考试重点+强化提分+免费超值视频课程

◆万学海文强化辅导讲义**详解版**◆

- ✓ 权威名师扛鼎力作，理论解题全面突破
- ✓ 知识梳理精准透彻，巧解考试疑难重点
- ✓ 独创秘诀快速解题，深度阐释作答技巧
- ✓ 一题多解图文并茂，同步练习巩固提高



中国时代经济出版社

赠送超值网络精品课程学习卡(详见书中彩页)

2.价值300元的超值网络精品课程学习卡(详见书中彩页)

1.最高可获300元的报名特惠代金券





海文考研

海文

2014考研数学

适合数学(一)(三)

概率论与数理统计 辅导讲义

万学海文考试研究中心 编

主编：叶盛标 铁军 张震峰 何先枝

主审：赵达夫

直击考试重点+强化提分+免费超值视频课程

◆万学海文强化辅导讲义详解版◆



中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学概率论与数理统计辅导讲义 / 叶盛标等主编 ; 万学海文考试研究中心编. —北京 : 中国时代经济出版社, 2013.6

ISBN 978-7-5119-1560-3

I. ①考… II. ①叶…②万… III. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 136888 号

书 名：考研数学概率论与数理统计辅导讲义
作 者：万学海文考试研究中心

出版发行：中国时代经济出版社
社 址：北京市丰台区玉林里 25 号楼
邮政编码：100069
发行热线：(010)83910203
传 真：(010)83910203
网 址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经 销：各地新华书店
印 刷：保定市中华美凯印刷有限公司
开 本：787×1092 1/16
字 数：150 千字
印 张：7.75
版 次：2013 年 6 月第 1 版
印 次：2013 年 6 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5119-1560-3
定 价：18.00 元

本书如有破损、缺页、装订错误，请与本社发行部联系更换
版权所有 侵权必究

万学海文图书编委会

总策划 万学海文考试研究中心

编委会 (以姓氏笔画为序)

丁 勇 叶盛标

邬丽丽 何先枝

张同斌 李 铮

苏德矿 张震峰

赵达夫 铁 军

本书编委会

马 媛 向定锋 朱 杰

吴志雄 张全军 张 燕

张 璐 李光华 李兰巧

李家雄 谷存昌 徐 婕

诸炜鑫 郭孝龙 绪玉珍

筵丽霞 赖邦城

前 言

在长期深入研究历年全国硕士研究生入学统一考试数学真题,以及长期从事考研数学辅导工作之后,编者认为,考生在备考过程中必须坚持“以考纲为纲,以课本为本,以思维定势拿高分,以常考题型论输赢”的指导思想。

以考纲为纲。考纲是专家命题、考生备考的唯一的权威依据。

以课本为本。考纲源于教学大纲,但又不同于教学大纲,因此,首先要用考纲圈定课本上的复习内容,考纲上没有而课本上有的内容,一定要划掉;考纲上有而课本上没有的内容,一定要补充。在考纲的指导下,认真研读课本,才能全面地、系统地掌握需要考查的内容。

以思维定势拿高分。思维定势就是人们的一种思维倾向,是人们在长期的思维过程中所形成的一种思维条件反射,亦称思维惯性。我们平时脱口而出的“七七四十九,九九八十一”就是思维定势。要对付考试,考生必须掌握对付常考题型的思维定势。

以常考题型论输赢。常考题型是基本概念、基本理论、基本方法的具体化,是考纲的具体化,是由历年真题浓缩出来的精华。真题集中体现了全国命题组各位专家的智慧,剔除了题海中的偏题、怪题、难题,是题海中的精品,所以我们必须认真研究真题,通过研究真题,真正掌握常考题型。本书中的例题和习题收录了部分精选出的真题,乃精品中的精品!衷心地希望对考生的复习起到抛玉引玉的作用!

“以考纲为纲,以课本为本,以思维定势拿高分,以常考题型论输赢”是本书的指导思想。

复习完高等数学和线性代数,沉浸在研究函数和矩阵的愉悦之后,考生接着复习概率论与数理统计,研究的对象是事件(随机事件),是事件发生的可能性的(概率),最重要、最关键的是要正确地表达事件。随机变量的引入,使得随机事件可以数量化,事件的概率就构成了分布函数。于是,我们可以用微积分的方法研究概率、研究函数的性质,可以继续享受学习的快乐。

本书共分为八章,每章由五部分构成:

第一部分:知识结构图,一目了然,简捷明快。

第二部分:重要概念、性质、定理和公式,内容完整,叙述严谨。

第三部分:重点题型精讲,是各章的核心内容。重点题型的表达颇具特色,例如,二维离散,同一表格;二维连续,五字方针;二维混合,全概搞定。成语结构,朗朗上口,铿锵有力,刻骨铭心!

第四部分和第五部分是精选练习题和练习题答案解析,题量充分,解答完整!

特别提示 对于个别仅针对数学一的内容及题目,书中以上标[1]表示。

编者编写本书的最大愿望是实用,与考试配套:图书有特色,考生喜欢读;效果显著:忘不了,出手快,得高分!

编者的邮箱是 ysbkysx@sina.com,承诺有信必回,有邮必复!与考生心连心,共同奋斗!

叶盛标

2013年5月30日

于武昌巡司河畔

万学海文图书邮购目录

序号	书 名	开本	定价	作者	出版时间	出版社
考研思想政治理论系列						
1	《考研早班车——整体规划及政治理论主干知识》	32开	23.8元	梁伟伟、赵宇、金柳安、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
2	《考研思想政治理论真题穿越》	16开	38.50元	赵宇、王瑞领、金柳安、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
3	《考研思想政治理论真题全解全析》	16开	35元	张子见、井宇虹、郭继承、金柳安	已出版	中国时代经济出版社
4	《考研思想政治理论红宝书梯度题集》	16开	46元	张子见、井宇虹、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
5	《考研思想政治理论红宝书考点巧解》	16开	49元	赵宇、井宇虹、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
6	《考研思想政治理论形势与政策暨热点解读》	32开	拟18元	万学海文名师	2013.10	中国时代经济出版社
7	《考研思想政治理论随身宝——速记周计划》	64开	拟18元	张子见、井宇虹、郭继承	2013.10	中国时代经济出版社
8	《考研思想政治理论冲刺大串讲》	32开	拟28元	赵宇、井宇虹、郭继承	2013.11	中国时代经济出版社
9	《考研思想政治理论点题预测》	32开	拟18元	赵宇、井宇虹、郭继承、金柳安	2013.11	中国时代经济出版社
10	《考研思想政治理论最后成功5套卷及18金鉴》	8开+16开	拟28元	张子见、井宇虹、郭继承、金柳安	2013.11	中国时代经济出版社
考研英语系列						
11	《考研英语写作高分进阶》(英语一、二)	16开	32元	付博	已出版	中国时代经济出版社
12	《考研英语新大纲核心词汇大全》(便携版)	64开	18.80元	李伟、吴本文	已出版	中国时代经济出版社
13	《考研英语分级词汇记忆宝典·周计划》(核心级+拔高级+基础级)	16开	49.80元	李伟、吴本文	已出版	中国时代经济出版社
14	《考研英语基础综合手册——语法·阅读·写作·词汇》	16开	45元	吴本文、毛利锋	已出版	中国时代经济出版社
15	《考研英语二复习指南+模拟真题》	16开	49元	周冰、蒋华	已出版	中国时代经济出版社
16	《考研英语历年真题超详解》	16开	49元	吴耀武	已出版	中国时代经济出版社
17	《考研英语历年真题来源报刊阅读120篇》	16开	拟49.80元	钟平	2013.07	中国时代经济出版社
18	《考研英语必背范文30篇》(便携版)	64开	拟18元	付博	2013.07	中国时代经济出版社
19	《考研英语阅读思路标准解读》	16开	拟45元	吴耀武	2013.09	中国时代经济出版社
20	《考研英语易混常考词汇辨析手册》	16开	拟35元	万学海文名师	2013.09	中国时代经济出版社
21	《考研英语最后成功五套题》(英语一)	8开	拟22元	万学海文名师	2013.09	中国时代经济出版社
考研数学系列						
22	《考研数学概率论与数理统计基础教材》	16开	28元	张震峰	已出版	中国时代经济出版社
23	《考研数学基础必做880题》	16开	42元	张同斌、鄢丽丽、丁勇	已出版	中国时代经济出版社
24	《考研数学高等数学基础教材》	16开	42元	李铮	已出版	中国时代经济出版社
25	《考研数学线性代数基础教材》	16开	30元	铁军	已出版	中国时代经济出版社
26	《考研数学真题大解析》(数学一)	16开	39.80元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社

序号	书名	开本	定价	作者	出版时间	出版社
27	《考研数学真题大解析》(数学二)	16开	39.80元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社
28	《考研数学真题大解析》(数学三)	16开	39.80元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社
29	《考研数学高等数学辅导讲义》	16开	40元	赵达夫等	已出版	中国时代经济出版社
30	《考研数学线性代数辅导讲义》	16开	28元	铁军等	已出版	中国时代经济出版社
31	《考研数学概率论与数理统计辅导讲义》	16开	18元	叶盛标等	已出版	中国时代经济出版社
32	《考研数学强化必做660题》	16开	拟42元	何先枝、铁军	2013.07	中国时代经济出版社
33	《考研数学强化复习全书》(数学一)	16开	拟50元	苏德矿、李铮、铁军、张震峰	2013.09	中国时代经济出版社
34	《考研数学强化复习全书》(数学二)	16开	拟42元	苏德矿、李铮、铁军	2013.09	中国时代经济出版社
35	《考研数学强化复习全书》(数学三)	16开	拟50元	苏德矿、李铮、铁军、张震峰	2013.09	中国时代经济出版社
36	《考研数学考点归纳及最后成功150题》	16开	拟22元	叶盛标	2013.09	中国时代经济出版社

网址: www.wanxue.cn <http://shop.wanxue.cn>

电话: 010-82487358 传真: 010-82487450

地址: 北京市海淀区北四环西路66号中国技术交易大厦A座17层

邮编: 100080

郑重声明

本书版权属于北京万学教育科技有限公司所有, 违者必究!

读者意见调查表

亲爱的读者：

您好！非常感谢您对万学海文图书的信赖与支持。您的这份肯定将激励我们出版更多更好的精品图书。为充分了解您对考研数学图书的需求，以便今后为您提供更贴切、更优质、适用性更强的辅导书，万学海文图书部特推出读者意见有奖调查活动，请您抽出宝贵时间填写以下调查表。

万学海文图书拥有业内最多优异一线名师作者资源，汇集当前各个学科领域顶尖权威专家学者，紧密围绕教学考试要求，出版考研辅导各系列图书，编写体例与内容适用性最强，每一本都堪称权威精品。

为答谢您对我们的支持，我们将对反馈信息进行随机抽奖活动，每一位中奖者，我们都有精美礼品随之奉上！期待您的参与，再次感谢！

来信请寄：

1 0 0 0 8 0

北京市海淀区北四环西路 66 号中国技术交易大厦 A 座 17 层
万学海文图书部(收)

《考研数学概率论与数理统计辅导讲义》

① 姓名 _____ 年龄 _____ 职业 _____ 教育背景 _____
② 本科专业 _____ 拟报考专业 _____
③ 通讯地址 _____ 邮编 _____
④ 联系电话 _____ E-mail/ QQ _____

1. 您认为自己的数学基础：

好 一般 不好

2. 您是通过哪种渠道得知本书的？

辅导班推荐 在书店看到 朋友推荐 老师推荐
 网上宣传 其他方式 _____

3. 您是如何得到本书的？

辅导班购买 书店购买 万学网店 网上书店 _____
 报名赠送 其他方式 _____

4. 影响您购买此书的原因有(可多选):

- 万学海文品牌 图书作者 图书价格 编排结构
内容质量 封面设计 广告宣传 网上书评
其他_____

5. 您认为本书的优点为(可多选):

- 体例完备 内容全面 紧扣大纲 难度适中
题量适中 封面美观 版式清晰 印刷精美
其他_____

6. 您认为本书在哪些方面还有待改进(可多选):

- 结构安排 内容质量 难易程度 例题习题数量
封面设计 版式设计 印刷质量 其他_____

7. 请问您还需要哪些方面的考研数学辅导资料(可多选):

- 讲义类 题集类 方法类 手册类
大纲解读类 重点题型类 真题类 模拟题类
其他_____

8. 请问您在购买考研数学辅导图书、资料时,主要考虑的因素有(可多选):

- 内容质量 图书定价 作者名气 出版社影响力
图书设计 网络评价 他人推荐 其他_____

9. 请问您会将本书推荐给:

- 5人以上 4~5人 2~3人 1人

10. 您所知道的同类考研数学图书有:

11. 您对万学海文图书的其他意见和建议(可另附页)

更多考研资讯,请关注:

万学教育网址:<http://www.wanxue.cn>

图书频道:<http://kaoyan.wanxue.cn/book>

编辑部博客:<http://blog.sina.com.cn/uegbook>

编辑部微博:[@海文考研图书](http://weibo.com/uegbook)

[@海文考研图书](http://t.qq.com/uegbook)

图书增值 YY 频道:46769000

发行部 QQ:19777181

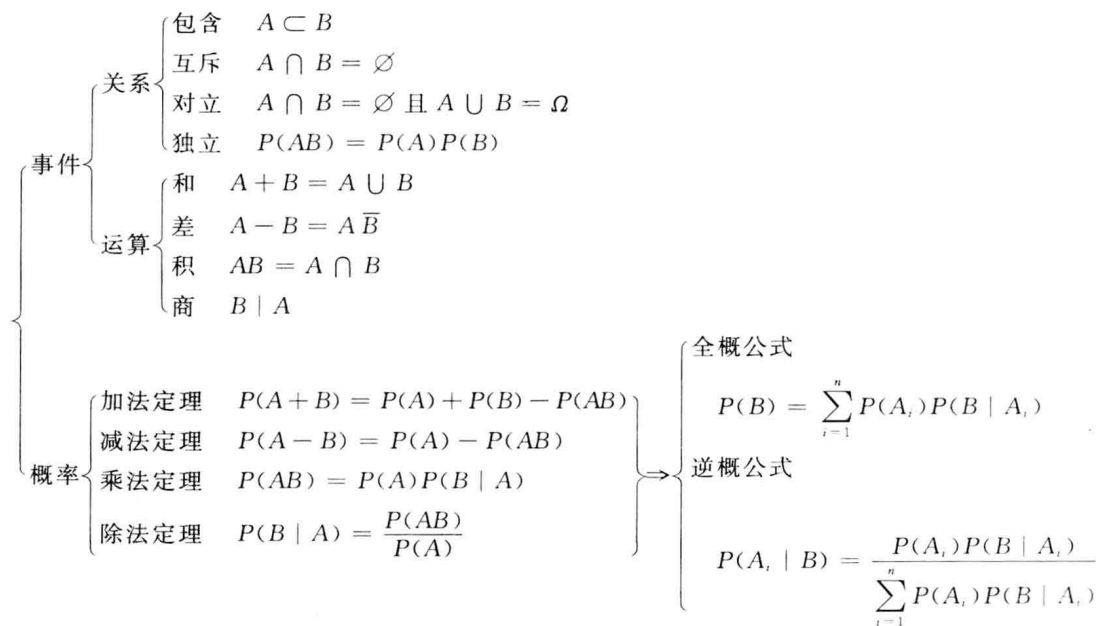
目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
1.1 知识结构图	(1)
1.2 重要概念、性质、定理和公式	(1)
1.3 重点题型精讲	(4)
1.4 精选练习题	(8)
1.5 练习题答案解析	(9)
第二章 一维随机变量及其分布	(12)
2.1 知识结构图	(12)
2.2 重要概念、性质、定理和公式	(12)
2.3 重点题型精讲	(14)
2.4 精选练习题	(23)
2.5 练习题答案解析	(25)
第三章 多维随机变量及其分布	(28)
3.1 知识结构图	(28)
3.2 重要概念、性质、定理和公式	(29)
3.3 重点题型精讲	(32)
3.4 精选练习题	(49)
3.5 练习题答案解析	(51)
第四章 随机变量的数字特征	(59)
4.1 知识结构图	(59)
4.2 重要概念、性质、定理和公式	(59)
4.3 重点题型精讲	(61)

4.4	精选练习题	(69)
4.5	练习题答案解析	(70)
第五章	大数定律与中心极限定理	(74)
5.1	知识结构图	(74)
5.2	重要概念、性质、公式和定理	(74)
5.3	重点题型精讲	(75)
5.4	精选练习题	(78)
5.5	练习题答案解析	(78)
第六章	数理统计的基本概念	(80)
6.1	知识结构图	(80)
6.2	重要概念、性质、定理和公式	(81)
6.3	重点题型精讲	(84)
6.4	精选练习题	(87)
6.5	练习题答案解析	(88)
第七章	参数估计	(91)
7.1	知识结构图	(91)
7.2	重要概念、性质、定理和公式	(91)
7.3	重点题型精讲	(93)
7.4	精选练习题	(103)
7.5	练习题答案解析	(104)
第八章	假设检验^[1]	(107)
8.1	知识结构图	(107)
8.2	重要概念、性质、定理和公式	(107)
8.3	重点题型精讲	(108)
8.4	精选练习题	(111)
8.5	练习题答案解析	(112)

第一章 随机事件与概率

1.1 知识结构图



1.2 重要概念、性质、定理和公式

一、事件表达最重要，加减乘除就是好！

- 包含. $A \subset B$, 称事件 B 包含事件 A , 指事件 A 发生必导致事件 B 发生. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 这时称事件 A 与事件 B 相等.
- 和事件. $A \cup B$ (或 $A + B$), 即当且仅当 A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.
- 积事件. $A \cap B$ (或 AB), 即当且仅当 A, B 同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生.
- 差事件. $A - B = A\bar{B}$, 即当且仅当 A 发生、 B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.
- 互不相容事件. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 是互不相容的, 或互斥的.
- 逆事件. 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 又称事件 A 与事件 B 互为对立事件. A 的对立事件记为 \bar{A} .

7. 摩根律: $\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k, \overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k.$

概率论的故事, 是事件表达的故事!

加法定理:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC).$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

若 A, B 互不相容, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

若 A_1, A_2, \cdots, A_n 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

减法定理:

$$P(B - A) = P(B) - P(AB).$$

若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

乘法定理:

$$(1) P(AB) = P(A)P(B | A) \quad (P(A) > 0).$$

$$P(ABC) = P(A)P(B | A)P(C | AB) \quad (P(AB) > 0).$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_{n-1} | A_1 A_2 \cdots A_{n-2})P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

$$(P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0).$$

(2) 设 A_1, A_2, \cdots, A_n 是 n 个事件, 如果对于任意 $k (1 \leq k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 A_1, A_2, \cdots, A_n 相互独立.

若对任意 $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, 有 $P(A_{i_1} A_{i_2}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})$,

则称 A_1, A_2, \cdots, A_n 两两相互独立.

【说明】 ① 事件 A_1, A_2, \cdots, A_n 相互独立就一定两两独立; 两两独立, 不一定相互独立.

② 若 A_1, A_2, \cdots, A_n 相互独立, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)].$$

③ 若 A 与 B 相互独立, 则 A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 也相互独立.

④ 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立.

除法定理(条件概率公式):

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

若 A, B 相互独立, 则

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

二、建立完备事件群,全概、逆概无技巧

若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 满足:

$$(1) A_i A_j = \emptyset \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n),$$

$$(2) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega,$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为 Ω 的一个完备事件群(完备事件组).

全概公式(全概率公式):

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为一个完备事件群,则

$$\begin{aligned} P(B) &= P[B(A_1 + A_2 + \dots + A_n)] = P(BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n) \\ &= P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n) \\ &= P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n). \end{aligned}$$

逆概公式(贝叶斯公式):

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}.$$

三、重要概型

1. 古典概型

如果随机试验 E 满足两个条件:

- (1) 试验的样本空间 Ω 的元素只有有限个;
- (2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同,则

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

2. 几何概型

如果随机试验 E 的样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域,且每个样本点的出现具有等可能性,则称此试验为几何概型. 对于几何概型,事件 A 的概率有下列计算公式:

$$P(A) = \frac{A \text{ 的度量(长度,面积,体积)}}{\Omega \text{ 的度量(长度,面积,体积)}}.$$

3. 伯努利(Bernoulli) 概型

如果试验 E 的结果只有两个: A 与 \bar{A} ,则称此试验为伯努利概型(试验). 若将伯努利试验独立重复 n 次,则称为 n 重伯努利概型,简称伯努利概型. 在伯努利概型中,若 $P(A) = p$,则 n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

1.3 重点题型精讲

重点题型一 事件表达,第一重要

【题型分析】 对于复杂事件,要借助事件的三大运算(和、积、差),将复杂事件分解成简单事件,然后再计算其概率.这一过程体现了概率方法的精华所在,因此,事件表达,极为重要.

【例 1.1】 以 A 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 \bar{A} 为().

- (A) “甲种产品滞销,乙种产品畅销”.
 (B) “甲、乙两种产品均畅销”.
 (C) “甲种产品滞销”.
 (D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

【解】 以甲表示“甲种产品畅销”的事件,乙表示“乙种产品畅销”的事件,则

$$A = \text{甲} \cap \bar{\text{乙}}, \quad \bar{A} = \overline{\text{甲} \cap \bar{\text{乙}}} = \bar{\text{甲}} \cup \bar{\bar{\text{乙}}} = \bar{\text{甲}} \cup \text{乙},$$

选(D).

【评注】 表达事件一般使用大写字母 A, B, C, D ,但也可使用汉字甲、乙、丙、丁等,有时后者的效果更好.

【例 1.2】 对于任意两个事件 A 和 B ,与 $A \cup B = B$ 不等价的是().

- (A) $A \subset B$. (B) $\bar{B} \subset \bar{A}$. (C) $A\bar{B} = \emptyset$. (D) $\bar{A}B = \emptyset$.

【解】 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \Leftrightarrow A\bar{B} = \emptyset$,故(A)、(B)、(C)为干扰项,选(D).

重点题型二 概率计算:加减乘除

【题型分析】 将复杂事件分解成简单事件后,就可用求概率的加法定理、减法定理、乘法定理、除法定理(条件概率公式)求事件的概率.

【例 1.3】 设两两相互独立的三个事件 A, B, C 满足条件: $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$,且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$,则 $P(A) =$ _____.

【解】 根据加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC), \quad (1-1)$$

由于 A, B, C 两两相互独立, $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C)$,故

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = [P(A)]^2, \quad P(ABC) = P(\emptyset) = 0,$$

则式(1-1)可化简为 $P(A \cup B \cup C) = 3P(A) - 3[P(A)]^2 = \frac{9}{16}$,解得 $P(A) = \frac{3}{4}$

或 $\frac{1}{4}$,根据题设 $P(A) < \frac{1}{2}$,可得 $P(A) = \frac{1}{4}$.

【例 1.4】 证明: $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

【证明】 不妨设 $P(A) \geq P(B)$ ($P(B) \geq P(A)$ 的情形同理可证), 则
 $P(AB) - P(A)P(B) \leq P(B) - P(B)P(B) = P(B)[1 - P(B)] \leq \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} & \text{又} \quad P(A)P(B) - P(AB) \\ &= P(A)[P(AB) + P(\bar{A}B)] - P(AB) \\ &= P(A)P(\bar{A}B) + P(AB)[P(A) - 1] \\ &\leq P(A)P(\bar{A}) = P(A)[1 - P(A)] \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

综上所述, $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

【评注】 此类问题看似无厘头, 事件 A 与 B 没关联, 但也有解决的方法. 既然两个事件没关联, 因此只能想办法在推导过程中去掉其中的一个事件.

【例 1.5】 如图 1-1 所示, 在圆心角为直角的扇形 OAB 中, 分别以 OA, OB 为直径作两个半圆. 在扇形 OAB 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率是 ().

- (A) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$. (B) $\frac{1}{\pi}$. (C) $1 - \frac{2}{\pi}$. (D) $\frac{2}{\pi}$.

【解】 如图 1-1 所示, 取 $OA = OB = 2$. 连接 AC , $\triangle OAC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, 因此所求概率为 $p = \frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\frac{1}{4}\text{大圆}}} =$

$$\frac{\pi - S_{\text{白}}}{\pi} = \frac{\pi - 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}, \text{ 故选 (C).}$$

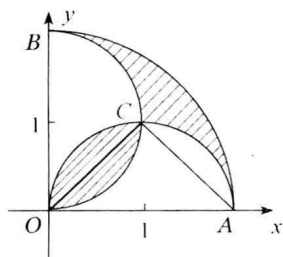


图 1-1

重点题型三 全概逆概, 两个阶段

【题型分析】 若随机试验分两个阶段, 且在第一阶段的试验结果是不确定的, 这时要用全概(全概率)公式或逆概(贝叶斯)公式.

全概或逆概公式是加法定理与乘法定理的完美结合, 应用的关键是要找到一个完备事件群(完备事件组).

【例 1.6】 从数 $1, 2, 3, 4$ 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} =$ _____.

【解】 因为 $\{X = 1\}, \{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 4\}$ 构成完备事件组, 且根据题意有 $P\{X = i\} = \frac{1}{4} (i = 1, 2, 3, 4)$, 故

$$\begin{aligned} P\{Y = 2 | X = 1\} &= 0, & P\{Y = 2 | X = 2\} &= \frac{1}{2}, \\ P\{Y = 2 | X = 3\} &= \frac{1}{3}, & P\{Y = 2 | X = 4\} &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$