中学数学教学参考丛书

相似形和比例线段

上海教育出版社

中学数学教学参考丛书

相似形和比例线段

杨荣祥　黄荣基　编

上海教育出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了初等几何中的相似图形和比例线段的基础知识，内容计分五章，即：成比例的线段、相似三角形、相似多边形、和圆有关的比例线段、相似形和相似变换。书中注意讲清一些概念和结论的本质，并从理论上加以提高；还探讨了初等几何中较多见的有关比例线段的问题，系统介绍了多种求解方法，如运用平行线截割定理、三角形角平分线定理，以及相似三角形的方法、面积方法、坐标方法等。本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读。

中学数学教学参考丛书
相似形和比例线段
杨荣祥　黄荣基　编
上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 3.5　字数 76,000
1988 年 4 月第 1 版　1988 年 4 月第 1 次印刷
印数1—5,200　本

ISBN 7-5320-0437-6/G·383　　定价：0.77 元

目　　录

一、成比例的线段

本书主要讨论相似图形和相似变换．由于对应线段的比是相似变换的不变量，这里首先讨论成比例的线段．

1. 两线段的比

在同一长度单位下两条线段的长度之间有一个比❶．可以证明其比值不随度量单位的不同而改变．例如以"米"作为长度单位，量得篮球场的长与宽的长度分别为 16 和 28，长与宽之比为

$$\frac{a}{b}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}.$$

而以"分米"作为长度单位，则量得篮球场的长与宽的长度分别为 160 和 280，长与宽之比为

$$\frac{a}{b}=\frac{160}{280}=\frac{4}{7}.$$

可见不管以米作长度单位，还是以分米作长度单位，篮球场的长与宽之比 $a:b$ 是确定的，恒为 4:7．一般地，假设以线段 e_1 作为单位线段，量得线段 a 和 b 的长度分别为 $\rho(a)$ 和 $\rho(b)$；以线段 e_2 作为单位线段，量得线段 a 和 b 的长度分别为 $\rho'(a)$ 和 $\rho'(b)$，可以证明

❶ 我们在小学数学中已经知道，两个数 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比，记作 $\frac{a}{b}$，或记作 $a:b$；其中，a 叫做这一比的前项，b 叫做这一比的后项．又若数 λ 是 a 除以 b 所得的商，则称 λ 是 $a:b$ 的比值（或叫做比率）．

$$\frac{\rho(a)}{\rho(b)}=\frac{\rho'(a)}{\rho'(b)}.$$

事实上，我们以线段 e_2 作为单位线段，量得线段 e_1 的长度为 $\rho'(e_1)$. 于是，$\rho'(a)=\rho(a)\times\rho'(e_1)$、$\rho'(b)=\rho(b)\times\rho'(e_1)$，所以

$$\frac{\rho(a)}{\rho(b)}=\frac{\rho(a)\times\rho'(e_1)}{\rho(b)\times\rho'(e_1)}=\frac{\rho'(a)}{\rho'(b)}.$$

就是说，两条线段长度的比，与所采用的长度单位没有关系. 在证明了这一事实之后，才可以把在同一长度单位下的两条线段长度的比，定义作这两条线段的比.

定义 对于两条线段，在某一度量单位下它们的长度的比，叫做这两条线段的**比**.

应该指出，上述定义两线段的比的说法还是很粗略的，其间还有好多问题应先加说明. 例如什么是线段的长度？线段是否一定有长度？量长度又是怎么一回事？线段的长度为什么是一个非负实数？这些都应从理论上加以说清楚.

对于前两个问题，需要用长度公理来回答.

长度公理 对于每一线段 AB，使与唯一的非负数 $\rho(AB)$ 对应，且满足下述条件：

i. 当且仅当点 A 和点 B 重合时，才有 $\rho(AB)=0$;

ii. $\rho(AB)=\rho(BA)$;

iii. 如果 AB 和 CD 相等，那么 $\rho(AB)=\rho(CD)$;

iv. 如果 AB 和 BC 是同一直线上的两个线段，并且没有公共内点，那么 $\rho(AB)+\rho(BC)=\rho(AC)$，即两个线段的和的长度应当等于两被加线段的长度的和，

这时，我们就说建立了线段的度量系统，并把数 $\rho(AB)$ 叫做线段 AB 的**长度**.

长度公理直接回答了凡线段都有长度，且长度还是一个

非负数．此外，长度公理还肯定了线段的长度满足运动不变性和有限可加性，这在下面说明后两个问题时还有用．

为了回答后两个问题，还要用到几何公理中的连续公理，它包括度量公理和直线的完备公理这样两条公理．

度量公理❶　对于任意两线段 a 和 b，必存在正整数 n，使 $na>b$．

直线的完备公理❷　设在直线 l 上有无限多条线段 A_1B_1、A_2B_2、…、A_nB_n、…，其中线段 $A_{i+1}B_{i+1}$ 的点全属于 A_iB_i，记作 $A_{i+1}B_{i+1}\subset A_iB_i$（这里 $i=1, 2, \cdots, n, \cdots$）；并满足：如果对于任意给定的多么小的线段 EF，在这些线段的无穷序列中总有线段 A_kB_k，使之 $A_kB_k<EF$．那么，在直线 l 上有且仅有一点 O，它属于这些线段的无穷序列中的每一线段，或是其中某些线段的端点．

从上述公理出发，我们可以取一已知线段 PQ，让它对应数 1，即 $\rho(PQ)=1$（这样的线段叫做**单位线段**，即把 PQ 作为一把“尺子”，它的长度即是度量中的长度单位）；对于任一线段 AB，不妨设 $AB>PQ$❸，我们便可在 AB 所在直线上从点

❶ 度量公理又叫阿基米得公理，而阿基米得（Archimedes，公元前287～212年）又把这一命题归功于欧多克斯（Eudoxus，约公元前 408～355 年），所以又把度量公理叫作阿基米得-欧多克斯公理．其实，追溯到更早，我国古代《墨经》上记有“穷，或有前不容尺也”，指的就是这个意思．

❷ 希尔伯特（D. Hilbert，1862～1943 年）原来采用的直线的完备公理的表述是很抽象的，大致是说直线上有足够多的点，构成一个满足一定条件（包括联系公理的前二条，还有迭合公理、阿基米得公理）的点集，但不能再行扩大成一个继续满足这些条件的更大的点集．为了表述和使用的方便，后人大都用其等价形式去代替，本书所列的便是德国数学家康托尔（G. Cantor，1845～1918年）提出的一种等价形式．

❸ 至于 $AB<PQ$ 的情形，则考虑 AB 和 $\frac{1}{10}\times PQ$、$\frac{1}{10^2}\times PQ$、…以至 $\frac{1}{10^n}\times PQ$，总有某一 n 起满足 $AB>\frac{1}{10^n}\times PQ$，仍可循照下述步骤进行度量．

A 起向点 B 的方向接连放置和单位线段 PQ 合同的线段 AA_1、A_1A_2、A_2A_3、…. 根据度量公理，必出现如下两情况之一：

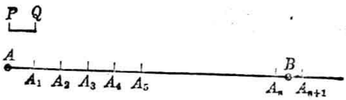


图 1-1

1. 某一点 A_n 恰和点 B 重合，则由长度公理，可知 $\rho(AB)=n$;

2. 点 B 介于 A_n 和 A_{n+1} 之间，则由长度公理，有 $\rho(AA_n)=n$. 而对线段 A_nB，进一步以 $\frac{1}{10}PQ$ 作为分单位来重复上述过程，同样由长度公理，可得 $\rho(A_nA_{n_1})=n_1\times\frac{1}{10}$. 如果 A_{n_1} 仍不和点 B 重合，则循此继续下去，依次以 $\frac{1}{10^k}\times PQ$ 作为分单位来重复上述过程，……如在某一分单位 $\frac{1}{10^r}\times PQ$ 重复上述过程时能达到点 B，则由长度公理，得到有限十进小数 $\rho(AB)=n.n_1n_2\cdots n_r$. 否则，由于点 B 总夹在点列 $\{A_{n_k}\}$ 和 $\{A_{n_{k+1}}\}$ 之间，根据直线的完备公理和实数的完备性，$\rho(AB)$ 是一个确定的无限十进小数：$\rho(AB)=n.n_1n_2\cdots$.

这就建立了线段的度量系统，这里的 $\rho(AB)$ 是一个非负实数，就是线段 AB 的长度.

至此，才完全解决了线段的长度问题，进而也真正解决了两线段的比的定义.

从上面的讨论可以看到，“线段的长度是一个非负实数”这一事实牵涉到实数的科学定义. 可以设想，在人类还没有认识无理数之前，不可能真正建立长度的理论，也不能由长度出发去定义两线段的比的概念；而在当时的情况下，要定义两线段的比，就得另辟蹊径. 完成这一工作，当归功于古希腊的

欧多克斯．他引进了“可公度线段”、“可公度比”、“不可公度线段”、“不可公度比”等概念，通过一系列规定来定义了两线段的比，并建立了严密的理论．但不幸的是，也许正是有了用公度来定义“线段的比”这一套理论，得以通过几何来处理连续量，而使人们对无理数的认识至少推迟了二千年．

需要说明的是，直至五十年代，不少国家的中学平面几何教科书还是要讲一些关于线段的可公度和不可公度的知识，这一方面是因为欧几里得几何传统的影响，另一原因是实数的概念要到高中代数里才出现．随着中学数学教材的改革，六十年代后不少中学数学教科书都提前在初中一年级代数课里即出现实数，所以几何教科书上已不必再讲“公度”，两线段的比只要通过它们的长度之比来定义就可以了．

线段的比不仅有重要的理论价值，还有广泛的现实意义．例如，在弦乐中，弦长的整数比将产生谐音；特别地，两弦长的比是 1:2 时，则产生高八度的音，这些是古希腊人在公元前三百年就已掌握了的．又如，建筑房屋时常用的木梁，其截面是一个矩形，这矩形的长、宽两边之比常取 $1:\sqrt{2}$，这是因为对于截面是一个确定的圆的树干，截面圆的内接矩形的长与宽之比如取 $1:\sqrt{2}$，可以承受最大的压力．再如 $1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，意大利大画家达·芬奇(L. da Vinci, 1452～1519)把它叫做黄金比，并赋予艺术和美学上的意义；据说建于公元前五世纪的雅典帕特农神庙中，大大小小的矩形的长与宽之比都是黄金比．

2. 比 例 线 段

在四条线段 a、b、c、d 中，如果 a 和 b 的比等于 c 和 d 的

比，即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad（或 a:b=c:d），$$

则四条线段 a、b、c、d 叫做**成比例的线段**（或叫做**比例线段**）；其中，a 和 d 叫做这个比例的**外项**，b 和 c 叫做**内项**，d 叫做 a、b、c 的**第四比例项**.

在比例线段中，如果两内项恰好相同，即三条线段 a、b、c 之间有 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 的关系，那么 b 叫做 a 和 c 的**比例中项**（也叫做**等比中项**）；c 叫做 a、b 的**第三比例项**.

根据两条线段之比的意义，两条线段的比就是它们的长度的比，也就是两个非负实数的比．因此，四条线段成比例，实际上就是四个非负实数所组成的比例．所以，四条线段的比例具有数的比例的下列性质.

比例的基本定理　在一个比例中，两内项的积等于两外项的积；反之也成立．即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

运用比例的定义以及上述比例的基本定理，不难得到下述各种比例的变形：

i. **反比定理**　在比例中，两个比的前项和后项可以互换.

证明

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow bc=ad\Rightarrow\frac{bc}{ac}=\frac{ad}{ac}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ii. **更比定理**　在比例中，两个内项或两个外项都可以互换.

证明 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\begin{array}{l}\nearrow\dfrac{ad}{cd}=\dfrac{bc}{cd}\Rightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}.\\ \searrow\dfrac{ad}{ab}=\dfrac{bc}{ab}\Rightarrow\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}.\end{array}$$

iii. **合比定理** 在比例中，第一个比的两项之和与后项的比，等于第二个比的两项之和与后项的比.

证明 $$\begin{aligned}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}&\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\\ &\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.\end{aligned}$$

iv. **分比定理** 在比例中，第一个比的两项之差与后项的比，等于第二个比的两项之差与后项的比.

证明 $$\begin{aligned}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}&\Rightarrow\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\\ &\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.\end{aligned}$$

v. **合分比定理** 在比例中，如果比值不等于1，第一个比的两项之和与两项之差的比，等于第二个比的两项之和与两项之差的比.

证明 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq1\left.\begin{array}{l}\nearrow\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}\Rightarrow\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{b}{d}\\ \searrow\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}\Rightarrow\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{b}{d}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

vi. **等比定理** 几个相等的比的前项和与后项和的比，等于其中的每一个比.

证明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\cdots=\dfrac{m}{n}=r$ (其中 $b+d+\cdots+n\neq 0$)

$$\Rightarrow\begin{cases} a=br,\\ c=dr,\\ \cdots\cdots\\ m=nr \end{cases}\Rightarrow a+c+\cdots+m=(b+d+\cdots+n)r$$

$$\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=r.$$

vii. **连比**❶**定理** 几个相等的比的各前项的比，等于各后项的比，反之也成立.

证明 $a:b=c:d=\cdots=m:n=r$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=br,\\ c=dr,\\ \cdots\cdots\\ m=nr \end{cases}\Rightarrow a:c:\cdots:m=br:dr:\cdots:nr$$

$$\Rightarrow a:c:\cdots:m=b:d:\cdots:n.$$

$a:c:\cdots:m=b:d:\cdots:n$

$$\Rightarrow a:c:\cdots:m=br:dr:\cdots:nr$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=br,\\ c=dr,\\ \cdots\cdots\\ m=nr \end{cases}\Rightarrow a:b=c:d=\cdots=m:n$$

viii. **比例乘积定理** 两个比例中的对应项相乘成比例.

证明 $$\left.\begin{array}{l} a:b=c:d,\\ e:f=g:h \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{两式相乘}} ae:bf=cg:dh.$$

ix. **比例乘幂定理** 在比例中，各项的同次幂成比例.

❶ 如果有若干个比，从第二个比开始，其前项与前一个比的后项相同，如 $a:b$, $b:c$, $c:d$, 我们把这几个比一并记成 $a:b:c:d$, 并称 a、b、c、d 的连比.

证明　$a:b=c:d \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m$

$$\Rightarrow \frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m} \Rightarrow a^m:b^m=c^m:d^m.$$

x. 比例方根定理　在比例中，各项的同次方根成比例.

证明　$a:b=c:d \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}} \Rightarrow \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}.$$

〔例1〕　已知 (1) $5x=\sqrt{3}y$; (2) $\frac{x+y}{y}=\frac{9}{5}$，求 $\frac{x}{y}$.

解　(1) $5x=\sqrt{3}y$ 可看成是四个项 5、x、$\sqrt{3}$、y，两两相乘组成，我们把这四个项分别看成是 $a=x$, $b=y$, $c=\sqrt{3}$, $d=5$. 那么，由 $ad=bc$，运用比例基本定理，可得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，从而得 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(2) $\frac{x+y}{y}=\frac{9}{5}$ 可看成是一个比例式，它的每一项可分别看成是 $a=x+y$, $b=y$, $c=9$, $d=5$. 运用分比定理，可得 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$，从而得 $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$.

〔例2〕　已知 $\frac{a}{7}=\frac{b}{8}=\frac{c}{5}$，求:

(1) $\frac{a+b-c}{a}$;　　　　(2) $a:b:c$.

解　(1) 要求的 $\frac{a+b-c}{a}$ 中，c 的前面是一个负号，所以不能简单地运用等比定理，还得将已知 $\frac{a}{7}=\frac{b}{8}=\frac{c}{5}$ 作些变形，改写成 $\frac{a}{7}=\frac{b}{8}=\frac{-c}{-5}$，这时运用等比定理，得 $\frac{a+b-c}{7+8-5}$

$=\frac{a}{7}$. 再运用更比定理,即得 $\frac{a+b-c}{a}=\frac{10}{7}$.

(2) 已知条件中,三个比的比值相等,并且每个比的前项(a、b、c)恰为所求的三个连比,所以只须运用连比定理,即得 $a:b:c=7:8:5$.

3. 线段上的一点分此线段成两部分的比

在线段 AB 上取一点 P(如图 1-2), 点 P 把线段 AB 分成两线段 AP 和 PB, 这里, 我们把点 P 叫做线段 AB 的内分点. 如果在线段 AB 的延长线上取一点 P (如图 1-3), 我们把上述内分点的意义推广一下, 把 P 相对线段 AB 的位置, 也看成是 P 把 AB 分成两条线段 AP 和 PB (注意: 字母的次序同上), 这种意义下, 把 P 叫做线段 AB 的**外分点**. 并且, 如果 P 是 AB 所在直线上的一点, 不论 P 是 AB 的内分点还是外分点, 我们把 $AP:PB$ 叫做**点 P 分线段 AB 的比**.

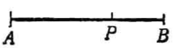


图 1-2

图 1-3

必须指出, 如果把线段 AB 放到有向直线上来考虑时, 有向线段的数量就有正、负之分. 假定 $AP:PB=\lambda$, 当 P 为线段 AB 的内分点时, AP 和 PB 的方向相同, 这时 λ 为正; 当 P 为线段 AB 的外分点时, AP 和 PB 的方向相反, 这时 λ 为负. 特别地, 当 P 和 A 重合时, $\lambda=0$; 如果 P 和 B 重合, 便有 $PB=0$, 比值 λ 不存在. 另外, 不论何种情形, $\lambda\neq-1$.

定理 1 依已知比内分一已知线段, 分点是唯一的.

证明 假设 P 为线段 AB 依定比 $m:n$ 的内分点(图 1-4), 即有 $AP:PB=m:n$, 现采用同一法来证明本定理. 如果在线段

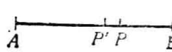


图 1-4

AB 上另有一点 P'，同样满足 $AP':P'B=m:n$，我们只要证明 P 和 P' 重合就可以了.

根据 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{AP'}{P'B}$，我们对 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AP'}{P'B}$ 运用合比定理，得 $\dfrac{AP+PB}{PB}=\dfrac{AP'+P'B}{P'B}$，即 $\dfrac{AB}{PB}=\dfrac{AB}{P'B}$. 所以

$$PB=P'B.$$

由于 P 和 P' 同在 AB 之间，又满足 $PB=P'B$，这就表明了点 P 和点 P' 必重合，也就证明了定比的内分点只有一个.

对于外分点，同样有"依已知比外分一已知线段，分点是唯一的". 证明方法与内分点的情形是相仿的.

4. 平行线和成比例的线段

上面讨论了线段上的一个点，把这线段分成两部分的比，下面讨论由平行线把线段分成两部分的比.

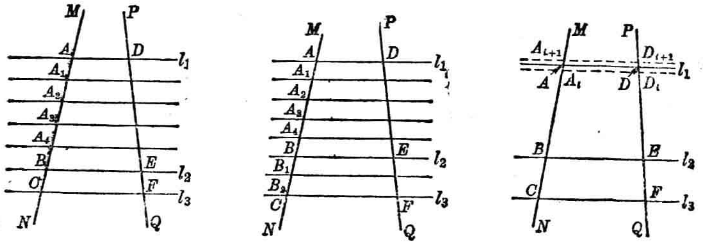
引理（平行线等分线段定理） 如果一组平行线在一条直线上截得相等的线段，那么在其它直线上截得的线段也相等.

此定理通常在"四边形"这一内容中已有证明，这里证明从略.

定理 2（平行线截割定理） 一组平行线截任意两条直线成比例线段.

这里，设直线 l_1、l_2、l_3 相互平行，它们和已知直线 MN、PQ 的交点分别为 A、B、C 和 D、E、F，要证明的是 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

不妨设 $AB\neq BC$，因为相等的情形，只需由上述引理便可得到.



(i)　　(ii)　　(iii)

图 1-5

证法一 不妨以 BC 为长度单位 u 来量 AB，量得情况分别讨论如下：

(1) $AB=mu$，其中 m 是自然数(图1-5(i)画成 $m=5$)，即把 AB 分成 m 等分，各分点依次为 A_1、A_2、…、A_{m-1}. 经过每一分点 A_i 作直线平行于 l_1，由引理可知，这一组平行线将线段 DE 截成 m 等分，且每一份都等于线段 EF. 因此，$\dfrac{AB}{BC}=m$，$\dfrac{DE}{EF}=m$，所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

(2) $AB=\dfrac{p}{q}u$，其中 p、q 都是自然数，且不可约(图 1-5(ii)中画成 $p=5$, $q=2$)，那么，取 $u_1=\dfrac{1}{q}u$ 为单位，便量得 $AB=pu_1$, $BC=qu_1$. 各分点依次为 A_1、A_2、…、A_{p-1} 和 B_1、B_2、…、B_{q-1}，用上面同样的方法，过每一分点作平行于 l_1 的直线，这两组平行线同样把线段 DE 和 EF 分别 p 等分和 q 等分，运用引理同样可以证得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

(3) $AB=\alpha u$, 其中 α 是无理数. 于是, α 有一串有理数的不足近似值 m_i 和过剩近似值 n_i, 且有

$$m_i<\alpha<n_i, \qquad \lim m_i=\lim n_i=\alpha.$$

这样, 可在 AB 上截得线段 A_iB、$A_{i+1}B$, 使 $A_iB=m_iu$、$A_{i+1}B=n_iu$, 而点 A 在线段 A_iA_{i+1} 中间(图1-5(iii)). 过点 A_i、A_{i+1} 作平行于 l_1 的直线, 分别交 PQ 于 D_i、D_{i+1}. 由上面的结论, 可有

$$\frac{A_iB}{BC}=\frac{D_iE}{EF}、\quad \frac{A_{i+1}B}{BC}=\frac{D_{i+1}E}{EF}.$$

由实数的完备性和直线的完备公理, 点 A 即是无穷线段 A_iA_{i+1} 的唯一公共点, 点 D 即是无穷线段 D_iD_{i+1} 的唯一公共点, 可见点 A 和 D 也满足

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

注意 三条以上平行线间所截的线段, 也可仿此方法完成证明.

证法一是大多数几何书上对平行线截割定理所采用的证明方法, 下面再给出另外两种证法.

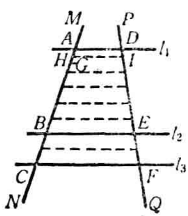


图 1-6

证法二(反证法) 假定 $\frac{AB}{BC}\neq\frac{DE}{EF}$, 为确定起见, 我们设 $\frac{AB}{BC}>\frac{DE}{EF}$. 因此, 在线段 AB 内必有一点 G[1] (如图 1-6), 使得

$$\frac{GB}{BC}=\frac{DE}{EF}. \tag{1}$$

如果把线段 CB 作 n 等分, 且令 $\frac{BC}{n}=u$, 当 n 充分大时,

[1] 根据德国数学家希尔伯脱的顺序公理与结合公理, 可得定理"对于任意的两个点 A 及 C, 在直线 AC 上至少存在着一个点 B, 使得 B 介于点 A 与点 C 之间". 此定理的证明, 读者可参阅几何基础的有关参考书.