

新编

高中 数学

主编：冯士腾

上册

奥林匹克基础知识及素质教育丛书

展开思想的翅膀
活跃在奥林匹克广场上
为了明天的成功
哪怕今天摸爬滚打
让我们手挽手
深挖智慧的力量
奋斗——前进
这里是练兵的战场



5

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{cases}$$

6

7

8

9

3

2

科学技术文献出版社

◇新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

高中数学

(上册)

主编 冯士腾
编者 冯士腾 李方烈
付小平 祝厚元
彭 林 王小丹
李 彬 印志建

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书是以高中数学知识为主线,为高中数学课外活动编写的教材。

全书分为上下两册,每册又分为基础篇与提高篇。基础篇内容与高中数学教材同步,与课堂教学实际联系密切,并适当补充了参加高考及数学竞赛的必备知识。提高篇以高中数学教学大纲为依据,内容覆盖了高中数学竞赛的主要内容。通过对典型例题的分析,向学生介绍了数学竞赛中常用的数学思想方法,及其在解题中灵活、多变的应用,以帮助学生提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为数学竞赛辅导读物,也可供教师、高考学生、高中学生参考阅读。

科学技术文献出版社 向广大读者致意

科学技术文献出版社成立于1973年,国家科学技术部主管,主要出版科技政策、科技管理、信息科学、农业、医学、电子技术、实用技术、培训教材、教辅读物等图书。

我们的所有努力,都是为了使您增长知识和才干。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学(上、下册)/冯士腾主编.-北京:科学技术文献出版社,1999.3

(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)

ISBN 7-5023-3224-3

I. 高… II. 冯… III. 数学课-高中-教学参考资料
IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 38981 号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大
楼 B 段/100038

图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091

邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953

图 书 编 务 部 电 话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789

图 书 发 行 部 电 话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009

门 市 部 电 话:(010)68515544-2172

图 书 发 行 部 传 真:(010)68514035

图 书 编 务 部 传 真:(010)62878317

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:王亚琪 王 琦

责 任 编 辑:蒋 驰

责 任 校 对:梁文彦

责 任 出 版:周永京

封 面 设 计:孟朝阳

发 行 者:新华书店北京发行所

印 刷 者:三河市富华印刷厂

版 (印) 次:1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷

开 本:850×1168 32 开

字 数:238 千

印 张:8.875

印 数:1—10000

定 价:26.00 元(上册 12.00 下册 14.00 元)

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换

前 言

近些年来,世界范围内的学科奥林匹克竞赛方兴未艾。我国自参赛以来,不断取得优异成绩。1997年,我国参加在阿根廷布宜诺斯艾利斯举办的第37届世界数学奥林匹克竞赛,6名选手均获金牌,并取得了团体第一名的好成绩。学生参加各学科的奥林匹克竞赛活动,不但为国家争得了荣誉,也已成为他们丰富学习内容、增长知识、提高各门功课学习成绩的重要方式之一。

为了帮助广大中小学生完整、准确、全面地掌握各门功课的学习内容,在日常的学习和参加奥林匹克竞赛活动中取得好的成绩,同时为了配合目前中小学素质教育,我们邀请了京内外著名奥校具有多年教学与辅导经验的权威老师,编写了这套《新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书》。

参加本丛书编写工作的老师,全部来自于教学第一线,具有扎实的基础理论功底和丰富的教学实践经验。他们结合自己多年教学、科研和奥校辅导的经验,在总结各类奥林匹克竞赛教学讲义、习题解答及辅导材料的基础上,博采众家之长,形成了本丛书独具特色的风格和特点:

(1)学科门类齐全。全套丛书共18分册,涵盖数学、物理、化学、生物、计算机5个学科,跨越小学、初中、高中三个阶段,是目前此类图书中覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强的奥林匹克竞赛系列丛书之一。

(2)普及与提高并重。各册书紧密配合本年级的教学进度,选择基础性强、应用性广、具有代表性的教学内容作为专题,进行重点讲解,旨在提高大多数学生的学习水平。同时又根据各学科竞赛的实际需要,选择针对性强的专题,以点带面,重点讲解。

(3)科学准确,结构合理。各分册按照学科特点进行科学编排,内容繁简适当。对于教学中的重大疑难问题,分析透彻,注重科学性和准确性。重点、难点部分举一反三,力求使学生在理解的基础上,学会灵活运用。

(4)新颖独特,趣味性强。各分册力求做到选题典型、新颖有趣,例题讲解富有启发性,注意培养学生独立思考的能力。注重从学习方法、分析思路和解题技巧上,全方位、多角度地培养学生对各种知识的综合运用能力。

为便于学生掌握各门功课的学习要领,各分册除对基础知识进行系统讲解外,还配备有一定数量的练习,并附有提示及答案,供同学们根据自己的实际情况有选择地使用。

我们真诚地希望本套丛书能对同学们参加奥林匹克竞赛和各类学科竞赛有所裨益,能有助于我国中小学生全面提高各门功课的学习成绩。书中如有错漏或不当之处,欢迎读者批评指正。

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

主要作者简介

- 吴文虎** 中国计算机学会普及委员会主任
国际信息学奥林匹克中国队总教练
清华大学计算机系教授
- 吕品** 全国计算机教材审查委员会委员
北京信息学奥林匹克学校副校长
中学高级教师
- 刘尧** 北京教育学院化学教研室主任、教授
- 陆禾** 北京14中化学特级教师
北京市有突出贡献的专家
- 黄儒兰** 北京教育局化学教研室主任
中学特级教师
- 冯士腾** 北京宣武区教育学会秘书长
中学特级教师
- 李方烈** 北京宣武区中学数学教研室主任
中学特级教师
- 赵欣如** 北京师范大学生物系教授
中国生物奥林匹克竞赛委员会委员
- 曹保义** 北京师范大学二附中副校长
生物教研组组长
中学高级教师

- 高建军** 湖南长沙一中生物教研组组长
中学高级教师
- 石长地** 首都师范大学研究生处教师
数学奥林匹克专业研究生毕业
教育学硕士
- 贺贤孝** 辽宁师范大学数学系教授
辽宁数学教育学会副会长
- 杨 蹇** 辽宁师范大学数学系副教授
大连市奥林匹克学校校长
- 由 峻** 北京市宣武区中学教研室主任
- 秦家达** 北京市 66 中物理教研组组长
中学高级教师
- 高玉臻** 北京师范大学附中物理高级教师
- 马凌风** 北京市 15 中物理教研组组长
中学高级教师
- 王健子** 北京市 15 中物理高级教师

目 录

基础篇

- | | | |
|------|---------------|-------|
| 第一讲 | 集合及其应用 | (3) |
| 第二讲 | 二次函数与方程、不等式 | (15) |
| 第三讲 | 函数的图像 | (29) |
| 第四讲 | 函数的性质 | (40) |
| 第五讲 | 幂函数、指数函数、对数函数 | (60) |
| 第六讲 | 三角运算 | (73) |
| 第七讲 | 三角不等式与三角最值 | (87) |
| 第八讲 | 反三角函数 | (95) |
| 第九讲 | 空间中的“角”和“距离” | (105) |
| 第十讲 | 折叠、旋转、展开 | (119) |
| 第十一讲 | 射影面积定理及其应用 | (138) |
| 第十二讲 | 立体图形中的三角函数关系式 | (148) |
| 第十三讲 | 反证法 | (160) |
| 第十四讲 | 函数观点 | (173) |

提高篇

- | | | |
|------|------|-------|
| 第十五讲 | 奇偶分析 | (185) |
|------|------|-------|

☞	第十六讲	同余	(191)
☞	第十七讲	函数方程与函数迭代	(197)
☞	第十八讲	高斯函数初步	(216)
☞	第十九讲	四面体及其性质	(238)
☞	第二十讲	抽屉原则	(256)
☞	第二十一讲	极端性原则	(268)



基础篇

第一讲 集合及其应用

集合概念及其基本理论,是近代数学最基本的内容之一.许多重要的数学分支,如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等,都建立在集合理论的基础之上.此外,集合思想还广泛地渗透到自然科学的许多领域,集合术语在科技文章和科普读物中比比皆是.

一般地,某些特定的对象的全体就成为一个集合,集合中的各个对象叫做这集合的元素,并且集合中的元素具有确定性、互异性和无序性.集合的表示方法分列举法和描述法.集合间的关系有子集、真子集和相等.集合间的运算有交集、并集和补集.

集合的运算律:

1. 等幂律 $A \cap A = A, A \cup A = A$
2. 同一律 $A \cap I = A, A \cup I = I$
 $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$
3. 互补律 $A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = I$
 $\overline{\bar{A}} = A, \bar{I} = \emptyset, \bar{\emptyset} = I$
4. 交换律 $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
5. 结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. 吸收律 $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A.$
8. 摩根律(亦称反演律) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

有限集合的元素数目间关系:

用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数, 则:

1. $|A|$ 是个非负整数, 若 $A \neq \emptyset$, 则 $|A| \in \mathbb{N}$.

2. $|A| + |\bar{A}| = |I|$

3. $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, 当且仅当 $A \cap B = \emptyset$ 时取等.

4. $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$, 当且仅当 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 时取等.

5. $|A \cup B| = |B| + |A \cap \bar{B}| = |A| + |B| - |A \cap B|$

6. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

集合部分的学习, 概念要清楚准确, 对于较抽象的问题, 可借助数轴、直角坐标系、韦恩图来直观判断; 它可与许多学科挂钩, 因为集合已经成为一种广泛使用的语言和思想方法. 在数学竞赛中, 集合问题常把函数问题、组合问题结合在一起.

例 1 已知 $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbb{N}\}$, $P = \{y | y = b^2 - 6b + 10, b \in \mathbb{N}\}$, 问集合 M 与 P 间的关系是怎样的.

分析: 两个集合间的关系, 不外乎“ \subseteq ”“ \subset ”“ $=$ ”或不存在这些关系. 而集合 M 、 P 都是无限集, 不可能用列举法穷尽, 于是要考虑两个表达式之间有什么关系.

解: P 集中, $y = b^2 - 6b + 10 = (b - 3)^2 + 1$, 当 $b = 4, 5, 6, \dots$ 时, 与 M 集中 $a = 1, 2, 3, \dots$ 值相同, 而 $b = 3$ 时, $y = 1 \in P, 1 \notin M, \therefore M \subset P$.

或用定义来分析: 对任意的 $x_0 \in M$, 有 $x_0 = a_0^2 + 1 = (a_0 + 3)^2 - 6(a_0 + 3) + 10 \in P$

($\because a_0 \in \mathbb{N} \therefore a_0 + 3 \in \mathbb{N}$).

$\therefore M \subseteq P$

又 $b = 3$ 时, $y = 1, \therefore 1 \in P$, 而 $x = a^2 + 1 > 1, \therefore 1 \notin M$

从而 $M \subset P$.

说明:(1)本题的关键是,如何将表达集合 M 和 P 的解析式间关系寻求出来,并从中找出特殊元素.(2)若将题目中自然数集 N 改为整数集 Z ,则 $M = P$.

例 2 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

分析: A 、 B 、 C 均是数集,由于含字母 a ,故集合 C 的确定需要分类讨论.

解: $\because A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$

$$\therefore B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\} = [-1, 2a + 3]$$

$C = \{z | z = x^2, x \in A\}$ 的意义是二次函数 $y = x^2$ 在 $[-2, a]$ 上的函数值的集合,需要分

$$(1) \text{ 当 } a \geq 2 \text{ 时, } C = [0, a^2]$$

$$(2) \text{ 当 } 0 \leq a < 2 \text{ 时, } C = [0, 4]$$

$$(3) \text{ 当 } -2 \leq a < 0 \text{ 时, } C = [a^2, 4]$$

由 $C \subseteq B$ 可知:(1)时 $a^2 \leq 2a + 3 \quad \therefore 2 \leq a \leq 3$, (2)时 $\frac{1}{2} \leq a < 2$, (3)时 $4 \leq 2a + 3$ 解得 $a \geq \frac{1}{2}$ 与 $-2 \leq a < 0$ 矛盾.

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } (2, 3) \cup (\frac{1}{2}, 2) = (\frac{1}{2}, 3)$$

说明:(1)二次函数在给定区间上的值域的确定,是一个重要的知识点.(2)在讨论中,要特别注意分类的依据,及是否不重不漏.

例 3 已知集合 $A = \{(x, y) | |x| + |y| = a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) | (|x| - 1)(|y| - 1) = 0\}$. 若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,求 a 的值.

分析: 由已知条件知, $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,故 $A \cap B$ 中有且只有 8 个元素,所要解决的是,当 a 为何值时,这 8 个点恰构成正八边形.

解: $\because |x| + |y| = a$ 及 $(|x| - 1)(|y| - 1) = 0$ 都是绝对值方

程,

\therefore 其图形关于 x 轴、 y 轴、原点均对称.

在第一象限内, A 中点满足 $x + y = a > 0$, B 中点 $x = 1 (y > 0)$ 或 $y = 1, (x > 0)$.

$\therefore A \cap B$ 在第一象限内的元素是 $(1, a - 1)$ 和 $(a - 1, 1)$.

由对称性可知 $A \cap B$ 中 8 个元素在平面上的位置, 如图 1-1.

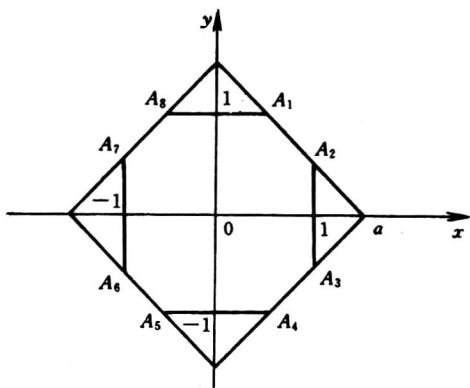


图 1-1

可知当 $|A_1 A_8| = |A_1 A_2|$ 时, 8 个点构成正八边形.

(1) $A_1(1, a - 1)$ 时, $A_2(a - 1, 1)$, $A_8(-1, a - 1)$, 由 $|A_1 A_2| = |A_1 A_8|$ 解得 $a = 2 \pm \sqrt{2}$, 由 $a - 1 > 0$, 舍去 $a = 2 - \sqrt{2}$.

(2) $A_1(a - 1, 1)$ 时, $A_2(1, a - 1)$, $A_8(1 - a, 1)$, 由 $|A_1 A_2| = |A_1 A_8|$, 解得 $a = \pm \sqrt{2}$, 由 $a - 1 > 0$ 知, 舍去 $a = -\sqrt{2}$.

$\therefore a = 2 + \sqrt{2}$ 或 $a = \sqrt{2}$ 时, 符合条件.

说明: 由所给曲(直)线方程, 来研究其性质; 借助几何特征求解代数问题, 使“数”“形”得以有机地结合, 是数学中的常见方法.

例 4 已知集合 $A = \{x | x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$, $B = \{x | x^3 + 2x^2 - c^2x - 2c^2 = 0, c \geq 0\}$.

(1) 求出集合 A 和 B .

(2)以集合 $A \cup B$ 的元素作为二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根,试在 $y = x^2 + px + q$ 的最小值中,求出它最大的和最小的值.

分析: A, B 是一元三次方程,由观察可知 $1 \in A, -2 \in B$,从而化为一元二次方程,可解,而 p, q 是随根的变化而变化的,故可由韦达定理,表示 $y = x^2 + px + q$ 的最小值,再进行讨论.

解: (1) $\because x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ 可分解为 $(x-1)(x-2)(x-4) = 0, \therefore A = \{1, 2, 4\}$.

$$\text{又} \because x^3 + 2x^2 - c^2x - 2c^2 = (x+2)(x+c)(x-c) = 0,$$

$$\therefore B = \{-2, c, -c\}$$

(2)设方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根为 α, β , 则 $y = x^2 + px + q$ 的最小值为 $M = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{4}$.

当 $\alpha = \beta$ 时, $M_{\max} = 0$, M 的最小值当 $|\alpha - \beta|$ 为最大时达到.

$$\therefore A \cup B \text{ 中的元素为 } 1, 2, 4, -2, -c, c,$$

且 $c > 0$,

\therefore (1) $c \geq 4$ 时, 两根中最大值为 c , 最小值为 $-c$, 从而 M 的最小值为 $-c^2$.

(2) $2 < c < 4$ 时, 两根中最大值为 4 , 最小值为 $-c$, 从而 M 的最小值为 $-\frac{(c-4)^2}{4}$.

(3) $0 \leq c \leq 2$ 时, 两根中最大值为 4 , 最小值为 -2 , 从而 M 的最小值为 -9 .

【例 5】 求集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 的所有子集的元素之和的和(规定 Φ 的元素之和为 0).

分析: 利用退回最简原则, 考虑两个元素时, $p = \{1, 2\}$, 其子集为 $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset$, 其中每个元素出现两次. 考虑三个元素时, $Q = \{1, 2, 3\}$, 其子集为 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 其中每个元素出现四次. 依此类推, M 集合共有 2^{100} 个子集, 每个元素出现次数为 $\frac{1}{2} \times 2^{100} = 2^{99}$, 于是 M 中所有子集的元素个数之