GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编 张颖 许伯生

東華大學出版社

概率论与数理统计

主编 张 颖 许伯生
编者 李铭明 李鸿燕 刘瑞娟 肖 翔
王宝存 周 雷 滕晓燕

東華大學出版社

内容提要

本书根据高等学校工科类以及经济管理类各专业概率论与数理统计课程的教学基本要求编写而成.

主要内容包括:随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.

本书可作为高等院校工科类以及经济管理类各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供有关专业技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张颖,许伯生主编.—上海:东华大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-5669-0324-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… ②许… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 166867 号

责任编辑:杜亚玲
文字编辑:汪 燕
封面设计:潘志远

概率论与数理统计

主编 张 颖 许伯生

出　　版:东华大学出版社(上海市延安西路 1882 号,200051)
本社网址:http://www.dhupress.net
天猫旗舰店:http://dhdx.tmall.com
营销中心:021-62193056 62373056 62379558
印　　刷:苏州望电印刷有限公司
开　　本:710 mm×1 000 mm 1/16
印　　张:15
字　　数:300 千字
版　　次:2013 年 7 月第 1 版
印　　次:2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5669-0324-2/O·016
定　　价:32.00 元

前　言

《概率论与数理统计》是高等院校理工科、经济管理学科各专业的重要基础课. 作为数学的一个重要分支，概率统计在许多领域中有着广泛的应用. 本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会颁布的《本科数学基础课程教学基本要求》编写而成.

在内容上，本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，突出概率统计的基本思想和应用背景，注意培养学生的基本运算能力、分析问题和解决问题的能力. 概念或理论的引入大多从具体问题入手，力求深入浅出，循序渐进，清晰易读，既便于教学又方便读者自学.

全书共分九章，主要内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等. 书中配备了较丰富的例题与习题，习题按节配置，除了基本类型题外，还适当配置一些富于启发性的应用性习题.

本书可作为高等院校工科、经济管理学科各专业概率论与数理统计课程的教材，也可供有关专业技术人员参考.

本书由张颖和许伯生策划并组织编写，张颖负责统稿、定稿. 全书共九章，参加编写的人员有：第一章周雷；第二章李鸿燕；第三章李铭明；第四章滕晓燕；第五章张颖；第六章许伯生；第七章刘瑞娟；第八章王宝存；第九章肖翔.

本书是上海工程技术大学学科建设项目“建设与培养高素质应用型人才相适应的基础学科基地”的成果之一，在编写过程中得到了上海工程技术大学教务处、基础教学学院和数学教学部教师的大力支持，张子厚教授就本书的编写提出了指导性的意见，编者在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 6 月

目　录

第一章　随机事件及其概率 …… 1
　第一节　基本概念 …… 1
　第二节　事件的概率 …… 6
　第三节　等可能概型 …… 11
　第四节　条件概率与全概率公式 …… 16
　第五节　事件的独立性　贝努利概型 …… 24

第二章　随机变量及其分布 …… 30
　第一节　随机变量 …… 30
　第二节　离散型随机变量的概率分布 …… 32
　第三节　随机变量的分布函数 …… 37
　第四节　连续型随机变量的概率分布 …… 42
　第五节　随机变量函数的分布 …… 53

第三章　多维随机变量及其分布 …… 60
　第一节　二维随机变量及其分布 …… 60
　第二节　边缘分布 …… 67
　第三节　条件分布 …… 72
　第四节　随机变量的独立性 …… 76
　第五节　两个随机变量的函数的分布 …… 81

第四章　随机变量的数字特征 …… 89
　第一节　随机变量的数学期望 …… 89
　第二节　随机变量的方差 …… 98
　第三节　协方差和相关系数 …… 105
　第四节　矩，协方差矩阵 …… 111

第五章　大数定律与中心极限定理 …… 114
第一节　大数定律 …… 114
第二节　中心极限定理 …… 118

第六章　数理统计的基本概念 …… 124
第一节　总体与样本 …… 124
第二节　统计量与抽样分布 …… 128
附　录　直方图 …… 136

第七章　参数估计 …… 139
第一节　参数估计的意义和种类 …… 139
第二节　点估计的求法 …… 140
第三节　评价估计量优良性的标准 …… 147
第四节　参数的区间估计 …… 151

第八章　假设检验 …… 163
第一节　假设检验的基本概念 …… 163
第二节　正态总体的假设检验 …… 167
第三节　(0—1)分布总体参数 p 的大样本检验 …… 181
第四节　分布函数的拟合优度检验 …… 183

第九章　方差分析和回归分析 …… 187
第一节　单因素方差分析 …… 187
第二节　一元线性回归 …… 198

习题答案 …… 209

附录 …… 219

参考文献 …… 232

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计产生于十七世纪，其伴随保险事业的发展而发展. 数学家们思考概率论中问题的源泉来自于赌博者所提出的各种输赢概率的问题. 荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯于 1657 年写成了《论机会游戏的计算》一书，是最早的概率论著作. 随着时间的推移，概率论与数理统计已经成为数学专业、理、工、农、医、商等各学科的基础课程. 近几十年来，随着科技的蓬勃发展，概率论大量应用到国民经济、工农业生产等领域. 许多兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的.

本章介绍概率论中的基本概念、概率的性质、概率的运算公式、古典概型及贝努利概型等.

第一节　基 本 概 念

自然现象与社会现象是各式各样的，若从结果能否预言的角度出发去划分，可分为两大类，一类是可以预言结果的，即在保持条件不变的前提下，重复试验或观察，结果是确定的，这一类现象称为确定性现象. 例如向上抛一个苹果必然要下落，常温常压下水烧到 100℃必然会沸腾等都是确定性现象. 另一类现象是不可预言结果的，即在保持条件不变的情况下，重复试验或观察，或出现这样的结果，或出现那样的结果，可能出现的全部结果试验前是知道的，仅进行几次试验看不出规律，但通过大量重复的试验其结果会遵循某种规律，这一类现象称为随机现象. 例如抛起一枚硬币观察落地后哪一面向上，掷出一粒骰子观察哪一点向上等都是随机现象. 像上面两个试验，在进行试验之前不确定会出现什么结果，但相同条件下进行大量重复试验结果会呈现某种规律性，这种规律性称为统计规律性. 概率论与数理统计就是揭示这种统计规律性的学科.

为了揭示随机现象的内在规律，必须进行大量的试验，这里所说的试验应该具有以下的特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验出现多种可能结果，且所有可能出现的结果在试验前能预先知道；

(3) 试验前不能确定会出现哪一个结果.

称具有上述三个特点的试验为**随机试验**,简称为试验. 通常记作 E, E_1, E_2, 等. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

例如,

E_1: 掷一骰子,观察出现的点数;

E_2: 上抛硬币两次,观察正反面出现的情况;

E_3: 观察某电话交换台在某段时间内接到的呼唤次数.

一、随机事件

1. 样本空间

由随机试验的概念知道,随机试验的所有可能结果在试验前是已知的. 我们将随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为**样本点**. 通常用 e_1, e_2, e_3 等表示. 样本点全体构成的集合称为**样本空间**,记作 S 或 Ω.

【例 1】 一个盒子中有同样规格的 3 个红球与 5 个白球,从中任意取出一个观察颜色. 在上述试验中,令 e_1 表示取得红球,e_2 表示取得白球,则样本空间可表示为

$$S = \{e_1, e_2\}.$$

【例 2】 掷一枚硬币,观察朝上一面的情况,结果共有两个. 若以"1"表示"正面朝上","0"表示"反面朝上",则样本空间可表示为

$$S = \{0, 1\}.$$

【例 3】 掷一颗骰子,观察出现的点数,若以"i"表示"掷得 i 点"($i = 1, 2, \cdots, 6$),则样本空间为

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

【例 4】 统计某路口一小时内通过的车辆数 n ($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$),则样本空间为

$$S = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

【例 5】 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的使用寿命. 若以"t"表示"灯泡的寿命(单位为小时)",则样本空间为

$$S = \{t \mid t \geqslant 0\}.$$

2. 随机事件

在进行随机试验时,根据需要,我们关心的往往是样本空间中一部分结果出现的规律. 例如,例 4 中,研究"一小时内通过车辆数超过 500 辆";例 5 中,研究"灯泡寿命少于 1 000 小时". 这些都是样本空间的子集,包含了若干样本点.

一般地，样本空间 S 的任一子集称为**随机事件**，简称事件. 事件通常用大写字母 A, B, C, $\cdots$ 表示.

在上面的表述中，“一小时内通过车辆数超过 500 辆”及“灯泡寿命少于 1 000 小时”都是随机事件，可分别用集合表示为

$$A = \{501, 502, 503, 504, \cdots\};$$

$$B = \{t \mid t < 1\,000\}.$$

在每次试验中，当且仅当试验出现的结果为随机事件中的一个元素时，称这一事件发生. 例如例 3 中所述的掷骰子，A 表示出现奇数点，当掷到一点时，可以说事件 A 发生了.

由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 如例 2 中有两个基本事件 $\{0\}$ 和 $\{1\}$；例 3 中有六个基本事件 $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{6\}$.

由于样本空间 S 是它自身的子集，并且包含所有的样本点，每次试验的结果必然出现在 S 中，即 S 必然发生，因此称 S 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，所以也作为一个事件，由于它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件本身并无不确定性，但为今后讨论方便，我们将它们作为随机事件的极端情形.

二、事件间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验往往包含很多随机事件，其中有些比较简单，有些比较复杂. 为了通过较简单的随机事件来揭示较为复杂的随机事件的性质及规律，需要研究随机试验的各随机事件之间的关系及运算.

1. **包含**　若事件 B 的发生必导致事件 A 发生，则称事件 A 包含事件 B，或称 B 是 A 的子事件. 记为 $A \supset B$ 或 $B \subset A$，如图 1-1 所示.

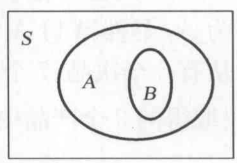

图 1-1　$A \supset B$

例如，在例 3 中，令 A 表示“掷出 2 点”的事件，即 $A = \{2\}$；B 表示“掷出偶数点”的事件，即 $B = \{2, 4, 6\}$，则 $A \subset B$.

2. **相等**　如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 等于事件 B，记为 $A = B$.

例如，从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，令 A 表示“取到至少 3 张红桃”的事件；B 表示“取得至多有一张不是红桃”的事件. 则不难看出 $A = B$.

3. **和**　称事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和事件或并事件，记为 $A \cup B$，如图 1-2 所示.

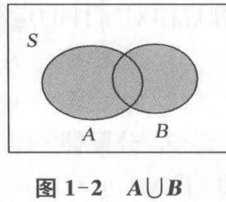

图 1-2　$A \cup B$

例如，甲，乙两人破译同一密码，令 A 表示“甲破译成功”的事件，B 表示“乙破译成功”的事件，则 $A \cup B$ 表示“目标被破译成功”的事件.

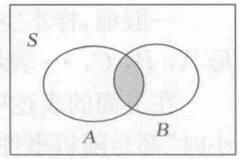

图 1-3　$A \cap B$

两个事件的和可推广到有限个或可列个的情形. 一般用 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；用 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

4. **积**　称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A \cap B$ 或 AB，如图 1-3 所示.

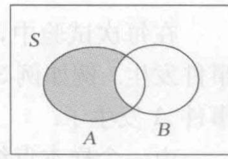

图 1-4　$A-B$

例如，在例 3 中，令 $A=\{$掷到偶数点$\}$，$B=\{$掷到的点数不超过 3 点$\}$，则 $A \cap B=\{$掷到两点$\}$.

类似地，用 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件；用 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

5. **差**　称事件 A 发生但 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，如图 1-4 所示.

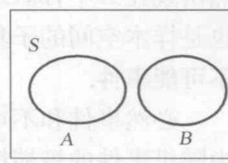

图 1-5　$A \cap B=\varnothing$

例如，测量晶体管的 β 参数值，令 $A=\{$测得 β 值不超过 50$\}$，$B=\{$测得 β 值不超过 100$\}$，则，$A-B=\varnothing$，$B-A=\{$测得 β 值为 $50<\beta \leqslant 100\}$

6. **互不相容**　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的，如图 1-5 所示.

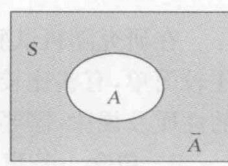

图 1-6　$\overline{A}$

例如，观察某路口在某时刻的红绿灯. 若 $A=\{$红灯亮$\}$，$B=\{$绿灯亮$\}$，则 A 与 B 便是互不相容的.

7. **对立**　称事件 A 不发生的事件为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，显然 $A \cup \overline{A}=S$，$A \cap \overline{A}=\varnothing$，如图 1-6 所示. 例如，从有 3 个次品、7 个正品的 10 个产品中任取 3 个，若令 $A=\{$取得的 3 个产品中至少有一个次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$取得的 3 个产品均为正品$\}$.

三、事件的运算规律

在研究随机事件的概率问题时，经常需要对随机事件进行运算. 清楚事件的运算规律对事件的运算有很大帮助，将其整理如下：

1. **交换律**　$A \cup B=B \cup A$；$A \cap B=B \cap A$
2. **结合律**　$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$
3. **分配律**　$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. **对偶律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律可以推广到有限个事件：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

此外，还有如下一些常用性质：

$A\cup B\supset A$，$A\cup B\supset B$（越求和越大）；

$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$（越求积越小）；

若$A\subset B$，则$A\cup B=B$，$A\cap B=A$；

$$A-B=A-AB=A\overline{B}.$$

【例 6】　从一批产品中每次取一件进行检验，令$A_i=\{$第i次取得合格品$\}$，$i=1,2,3$，试用事件的运算符号表示下列事件：$A=\{$三次都取得合格品$\}$；$B=\{$三次中至少有一次取得合格品$\}$；$C=\{$三次中恰有两次取得合格品$\}$；$D=\{$三次中最多有一次取得合格品$\}$.

解　由于事件作乘积时表示事件都发生，所以$A=A_1A_2A_3$；

事件的和表示事件至少一个发生，所以$B=A_1\cup A_2\cup A_3$；

$A_1A_2\overline{A_3}$表示第一次第二次取得合格品，第三次取得不合格品. $A_1\overline{A_2}A_3$第二次取得不合格品，其余两次取得合格品. $\overline{A_1}A_2A_3$表示第一次取得不合格品，剩下两次取得合格品. 这三种情况都是恰好两次取得合格品. 恰好有两次取得合格品表示以上三个事件至少一个发生，因此$C=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$；

对于事件D，三次中最多有一次取得合格品既可以理解为恰好全是不合格品或恰好只有一件合格品，也可以理解为三次中至少两次取到不合格品，后一种表述方法较为简单，其意思是$\overline{A_1}\,\overline{A_2}$、$\overline{A_1}\,\overline{A_3}$、$\overline{A_2}\,\overline{A_3}$至少一个发生，因此$D=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

由此可以看出，同一事件因理解方法不同而导致表示方法不唯一，如事件B又可表为

$$B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$$

或

$$B=\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}.$$

【例 7】　一名射手连续向某一目标射击三次，令$A_i=\{$第i次射击击中目标$\}$，$i=1,2,3$，试用文字叙述下列事件：$A_1\cup A_2$，$\overline{A_2}$，$A_1A_2A_3$，A_3-A_2，$\overline{A_1\cup A_2}$，$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$.

解　$A_1\cup A_2$表示前两次射击至少一次击中，$\overline{A_2}$表示第二次未射中，$A_1A_2A_3$

表示三次射击都击中目标，$A_3 - A_2$ 表示第三次击中目标但第二次未击中目标，$\overline{A_1 \cup A_2}$ 表示前两次均未击中，$\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ 表示前两次射击至少有一次未击中.

【例 8】 图 1-7 所示的电路中，以 A 表示"灯亮"这一事件，以 B, C, D 分别表示开关Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ闭合，试写出事件 A, B, C, D 之间的关系.

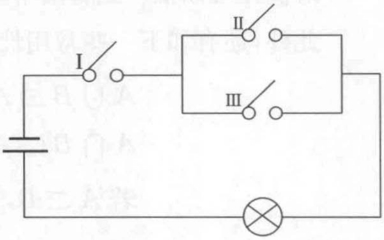

图 1-7　电路图

解　由电路的连接方式可以看出，开关Ⅰ、Ⅱ闭合电灯亮，开关Ⅰ、Ⅲ闭合电灯也亮，换句话说，若要灯亮，事件开关Ⅰ、Ⅱ闭合或事件开关Ⅰ、Ⅲ闭合应至少一个发生，将上面叙述用符号表示为 $BC \subset A$, $BD \subset A$, $BC \cup BD = A$;

反之，开关Ⅰ不闭合灯不亮，开关Ⅱ、Ⅲ同时不闭合灯也不亮，所以 $\overline{B}A = \varnothing$, $\overline{C}\,\overline{D}A = \varnothing$ 等.

习题 1-1

1. 设 A、B、C 表示 3 个随机事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1) A、C 发生，B 不发生；

(2) A, B, C 都发生；

(3) A, B, C 都不发生；

(4) A, B, C 中恰好有 2 个事件发生；

(5) A, B, C 中至少有一个发生；

(6) A, B, C 中至少有 2 个发生；

(7) A, B, C 中至多有一个发生；

(8) A, B, C 中至多有两个发生.

2. 在某系中任选一个学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该学生是三年级学生，事件 C 表示该学生是优秀生. 试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) 选到三年级的优秀男生；

(2) 选到非三年级的优秀女生；

(3) 选到的男生但不是优秀生；

(4) 选到三年级男生或优秀女生.

3. 写出 10 个电子元件(每个元件寿命最长 1 000 小时)的总使用寿命的样本空间.

第二节　事件的概率

对于一个随机试验，人们关心的往往是其中的某种或某些结果发生的可能性

有多大.知道了这种可能性,可以给人们的生活带来指导和帮助.例如,将来某天下雨的可能性,某海域将来某天有大风的可能性等等,知道了这种可能性的大小,对指导人们的生产生活有很大帮助.这种“可能性”的数字度量就是我们即将叙述的概率.

一、概率的定义

1. 概率的统计定义

为探寻统计规律性,需进行同条件下大量重复的随机试验.随着试验次数增加,某随机事件A出现的次数与总试验次数的比值与该事件出现的可能性大小有密切的联系,这个比值就是我们常说的频率.

(1) **频率** 在n次重复试验中,设事件A出现了n_A次,则称$\frac{n_A}{n}$为事件A的频率.记作$f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

由定义可得到频率的以下基本性质.

(ⅰ) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(ⅱ) $f_n(S)=1$;

(ⅲ) 若$A_1, A_2, \cdots A_k$是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

在随机性事件中,如果试验次数较大,某事件发生的频率总具有一定的稳定性.下面例子是一些学者为了验证该结论而进行的抛硬币的试验.具体数据见下表

试验者	抛硬币次数 n	正面 A 出现次数 n_A	正面 A 出现的频率 $f_n(A)$
德·摩尔根	2 048	1 061	0.518 0
浦丰	4 040	2 148	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

频率的稳定性是随机事件统计规律性的典型表现.

(2) **概率的统计定义**

由于抛硬币的试验有两个基本结果,由上表可以看出,当试验次数足够多时,

事件“正面向上”出现的频率在1/2附近摆动.由大量的随机试验来看,这是一个客观存在的现象.由此,我们给出概率的统计性定义.

定义1 在相同条件下,将随机试验重复 n 次,随着重复试验次数 n 的增大,如果事件 A 的频率 $f_n(A)$ 越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作

$$P(A)=p.$$

概率的统计定义只是一种描述性定义,虽然告诉了我们什么是概率,但是还不够严谨,无法具体确定定义中的频率稳定值 p. 只能通过加大试验次数,通过一系列频率值的平均值作为 p 的近似值.为了更加准确地描述概率的本质,我们给出下面的公理化定义.

2. 概率的公理化定义(数学定义)

定义2 设某随机试验的样本空间为 S, 对其中每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$, 如果它满足下列三条公理:

(1) **非负性** 对于每一个事件 A, 有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性** $P(S)=1$;

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n\cdots$, 总成立

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots. \tag{1.2.1}$$

则称 $P(A)$ 为 A 的概率.

该定义称为概率的**公理化定义**,这三条性质是概率的三个基本属性,是研究概率的基础与出发点.但概率的公理化定义并没有将事件的概率和它的频率、频率的稳定性直接结合起来,实际上概率的公理化定义是对概率的统计定义进行科学抽象的结果.理解概率的定义时,不应该将以上两个定义当作等价的定义单独进行理解,而是应该将两者结合起来,才能更好地把握住概率的本质.

由概率公理化定义的三个条件,可以得出以下概率的性质.

3. 概率的性质

性质1 若 $A\subset B$, 则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证 因为 $A\subset B$, 所以 $B=A\cup(B-A)$, (参见图1-8)

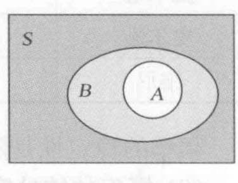

图1-8 $\boldsymbol{B=A\cup(B-A)}$

且 $A\cap(B-A)=\varnothing$.

由概率的可加性得 $P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)$, 即 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

特别地，当 $B=S$ 时，得到如下性质：

性质 2　对任意事件 A，$P(\overline{A})=1-P(A)$.

在性质 2 中，当 $A=S$ 时，结合概率的规范性，可得到如下性质：

性质 3　$P(\varnothing)=0$.

性质 4　若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证　由性质 1 及概率的非负性得 $0\leqslant P(B-A)=P(B)-P(A)$，即 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 5　对任意的事件 A，$P(A)\leqslant 1$

证　由于 $A\subset S$，由性质 4 及概率的规范性可得 $P(A)\leqslant 1$.

性质 6（有限可加性）　对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证　在式(1.2.1)中，令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则 $A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots$ 是一组两两互不相容的事件. 由 $P(\varnothing)=0$，便得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P(\varnothing)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 7（加法公式）　对任意事件 A，B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证　如图 1-9，由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，由概率的可加性及性质 1 得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cup(B-AB))\\&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

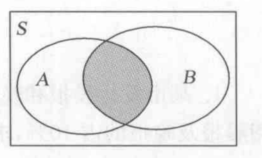

图 1-9　$A\cup B=A\cup(B-AB)$

加法公式可推广到任意 n 个事件. 例如，对任意三个事件 A，B，C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$$

更一般地，对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，用数学归纳法可证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

计算随机事件概率的时候,以上性质起到关键性的作用,读者一定要十分熟练.

【例 1】 在一公交枢纽站内,地铁误点的概率是 0.05,衔接班次的公交车误点的概率是 0.3,都误点的概率为 0.02,问某人乘坐该地铁及公交车时至少有一种交通工具误点的概率.

解 令 $A=\{$地铁误点$\}$,$B=\{$公交车误点$\}$,则 $A\cup B=\{$地铁及公交车至少有一方误点$\}$,$AB=\{$两者都误点$\}$,由概率的加法公式,

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.3+0.05-0.02=0.33.\end{aligned}$$

【例 2】 设 A, B, C 为三个事件,已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=0.1$,求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

解 由事件的加法运算的意义,$A\cup B\cup C=\{A, B, C$ 至少有一个发生$\}$,于是

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-\\P(AC)-P(BC)+P(ABC)\end{aligned}$$

其中,由于 $ABC\subset AB$,故 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,因此 $P(ABC)=0$,所以

$$P(A\cup B\cup C)=0.3+0.3+0.3-0.1-0.1=0.7.$$

习题 1-2

1. 某市发行晨报和晚报.在该市的居民中,订阅晨报的占 45%,订阅晚报的占 35%,同时订阅晨报及晚报的占 10%,求下列事件的概率:

(1) 只订阅晨报的;

(2) 只订阅一种报纸的;

(3) 至少订阅一种报纸的;

(4) 不订阅任何报纸的.

2. 设 A, B, C 是三个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A, B, C 中至少有一个发生的概率.

3. 设事件 A, B 及 $A\cup B$ 的概率分别为 p, q 及 r,求:$P(AB)$, $P(A\overline{B})$, $P(\overline{A}B)$ 及 $P(\overline{AB})$.

4. 设 $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{2}$,试分别在下列三种情况下求 $P(\overline{A}B)$的值:

(1) A, B 互不相容;

(2) $A \subset B$;

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

第三节　等可能概型

求出随机事件发生的概率给人们的生产生活带来很大的方便，但是很多随机试验中随机事件的概率是不容易甚至不可能求出的. 其中较为容易求解的是等可能概型.

一、古典概型

抛一枚硬币考虑正面或反面出现的概率，掷一粒骰子考虑出现各点的概率等，是概率中最古老的问题. 这类问题所代表的随机试验具有以下特征：

(1) 所有基本事件个数是有限个；

(2) 各基本事件发生的可能性相同.

将满足上面两条件的概率试验模型称为**古典概型**.

我们通过掷骰子的问题来看一下如何求解古典概型中的概率问题.

例如，掷一均匀的骰子，则任一点向上的概率都一样. 令 $A=\{$掷出 2 点$\}=\{2\}$，$B=\{$掷出偶数点$\}=\{2, 4, 6\}$. 此试验样本空间为 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，于是，应有

$$P(S)=6P(A)=1, \text{即 } P(A)=\frac{1}{6}.$$

而

$$P(B)=3P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{B\text{ 中基本事件数}}{\text{总基本事件数}}.$$

更一般地，设试验的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}),$$

注意到

$$P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\{e_n\})=P(S)=1,$$

$$P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\{e_n\})=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}),$$

于是