工学硕士入学考试

数学复习指南

SHUXUE
FUXI
ZHINAN

同济大学数学教研室 编

同济大学出版社

工学硕士入学考试

数学复习指南

同济大学数学教研室 编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是为报考工学硕士研究生的学生编写的，全书由高等数学、线性代数和概率论三部分组成．其中前两部分与同济大学数学教研室编写、高等教育出版社出版的《高等数学》上下册和《线性代数》教材紧密配合．书中对各部分的重要概念和基本理论(定理和公式)作了系统的概括，着重讨论基本题型与解题方法，必要时对例题进行了详尽的分析和总结，以扩大学生思路，提高分析问题和解决问题的能力．

全书突出一个宗旨：力求使考生用较少的时间复习掌握好研究生考试大纲所规定的内容，获得较多的解题方法，取得好成绩．本书从历届考题中筛选了近400道典型例题，选辑了100多道习题并附有习题简答，书末还收集了1993—1996年工学硕士入学考试数学参考解答，有助于提高考生的应试水平．

本书也可作为在校的各类工科大学生、工程技术人员和教师的教学参考用书．

责任编辑　李炳钊
封面设计　陈益平

工学硕士入学考试
数学复习指南
同济大学数学教研室编
同济大学出版社出版
(上海市四平路1239号　邮编　200092)
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：16.625　字数：47.4　千字
1996年9月第1版　1996年9月第1次印刷
印数：1—5000　定价：19.50元
ISBN—7-5608-1707-6/O·147

前　言

随着我国高等教育事业的迅速发展,越来越多的人接受了高等教育,他们中的许多人希望获得更高的学历,而我国四个现代化事业的蓬勃发展也需要更多更高层次的人才．正是因为个人的追求与国家的需要相一致,所以近年来报考硕士研究生的人数在逐年增加．对每一个报考研究生的人来讲,最关心的问题便是怎样按照考试大纲进行复习,提高复习效果,从而取得理想的考试成绩．要达到这一点,首先必须了解考试大纲中所规定的内容,分清哪些是主要的,哪些是次要的,这些内容在深度和广度上要求达到什么程度．其次要熟悉试卷中经常出现的题型,一些典型的甚至比较特殊的解题方法,这样,才能通过复习,深刻理解概念,牢固掌握解题方法,并在考试中付诸应用,从而取得好成绩．

我们认真总结了多年来所举办的考研复习辅导班积累的经验和资料,深入研究了历年来的考试题型,认真筛选收集的资料,共同努力,编写了这本书．它不仅对报考研究生的人员是一本有用的辅导材料,对正在本科阶段学习高等数学、线性代数和概率论的学生同样也是一本有价值的参考书．这不仅是因为本书的内容与所选的例题、习题与在普通高校中使用很广的由同济大学数学教研组所编写、高等教育出版社出版的《高等数学》和《线性代数》有很好的衔接,而且因为本书所总结的题型和解题方法对本科生学好高等数学和线性代数以及概率论也大有裨益．

本书的编写突出了一个宗旨:应试针对性强,力求使考生通过较短时间的复习,能达到考试大纲所规定的要求,并掌握一整套常用的基本解题方法．

本书具备以下几个特色:(1) 吸收了历届试卷中经常出现的典型考题,并进行分析解答;(2) 许多章节对基本题型和解题方法

作了总结归纳，便于学生总结提高；(3) 指出解题中容易出错的地方，了解命题意图或考生容易误入的"陷阱"；(4) 高等数学各章均包含一定数量的习题及简答，做好这些习题，有利于提高考生解题的基本功. 此外，各部分最后都安排了一些综合练习题，并附有简答，旨在提高考生的综合解题能力；每章开头有复习要求、基本概念和理论，目的是帮助考生掌握好各章的内容.

本书的复习要求中对理论部分的要求分"知道"和"理解"两档，理解高于知道；对运算部分的要求分"掌握"和"熟练掌握"两档.

书末收集了由高等教育出版社出版的 1993—1996 年中华人民共和国国家教育委员会制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲中的研究生数学入学考题参考答案.

钱仲范、徐建平、应明、李生文、何迎晖、范麟馨参加了本书的编写. 钱仲范对全文进行了总纂.

在编写本书过程中，得到了同济大学应用数学系领导的大力协助，富有教学经验的骆承钦、郭镜明、邱伯驺和潘承毅四位教授仔细审阅了原稿，提出了许多宝贵的意见，同济大学出版社的李炳钊等同志在本书的出版过程中给予了极大的支持，使我们较为顺利地出版了这本书，在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请同行批评指正.

编者

1996.6.16

目　　录

第一部分　高等数学

根据国家教委制定的1996年全国工学研究生入学数学考试大纲，高等数学在数学(试卷一)中约占68%，在数学(试卷二)中约占75%，因此，对于每个考生来说，只有全面地、系统地复习高等数学，才能在数学考试中取得优异的成绩.

然而，高等数学章节多，内容繁杂，要在较短时间内进行全面复习，的确很不容易做到. 为了对考生进行有力指导，我们在认真研究大纲、全面分析1987—1996年全国10年统考考题的基础上，并根据编著者在辅导过程中积累的丰富经验和资料编写了这部分内容.

高等数学部分的主要特色是：精选和归纳了较多的数量的典型例题，并作了详尽的分析和解答. 这些例题充分反映了最近几年来研究生考题的水平和动向，考生只要认真学习该部分内容，注意以微积分为主线，从根本上加强对基本概念和理论的理解，就一定能在解题的思路和技巧上开阔视野，有所启迪，而且通过例题和综合练习，能提高分析问题和解决问题的能力.

第一章　函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象,极限理论是微分学与积分学的基础,因此这一章的内容相当重要. 虽然在历年的试卷中以求极限而单独命题的题型所占比例不大,但在以后各章的内容中都可以揉入极限问题. 因此,我们在介绍求极限的方法时,没有拘泥于课程章节的顺序,而把后几章中有关极限的问题也归纳在这一章.

一、复习要求

(1) 了解函数的概念,其中包括反函数、复合函数、参数方程确定的函数与隐函数,并了解函数的单调性、有界性与周期性.

(2) 把握数列与函数的极限定义,其中包括函数的左、右极限的概念,掌握极限存在的判别准则与充要条件.

(3) 知道无穷小量的概念并掌握无穷小量的阶的比较. 熟练掌握与运用两个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$与$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 把握函数的连续与间断的概念及间断点的分类以及连续函数在有界闭区间上的有界性与介值性.

二、基本概念与理论

1. 函数

(1) 设 D 是一个数集,如果在某种对应法则下使得每个 $x\in D$,有唯一的数 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$或

者 $y=y(x)$. D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

(2) 如果函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_1,其值域为 W_1,且 $W_1\subset D$,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在 D_1 上的由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

(3) 幂函数 x^{μ}、指数函数 $a^x(a>0)$、对数函数 $\ln x$、三角函数 $\sin x$、$\cos x$ 及其反函数是基本初等函数. 由常数与基本初等函数的有限次四则运算或复合运算所构成的并可用一个解析式表达的函数是初等函数.

2. 极限

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,是指对任意给定的正数 ε,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,就有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的近旁有定义,当 x 趋于 a 时,$f(x)$ 的极限为 A,即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,是指对任意给定的正数 ε,存在正数 δ,当 x 满足 $0<|x-a|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $|x|>X_0$ 上有定义,当 x 趋于 ∞ 时,$f(x)$ 的极限为 A,即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,是指对任意给定的正数 ε,存在正数 X $(X>X_0)$,当 x 满足 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左侧邻域内有定义,且当 x 趋于 a 时,$f(x)$ 的极限为 A,就称 A 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左极限,记为

$$f(a-0)=A \qquad \text{或者} \lim_{x\to a-0}f(x)=A$$

类似地有右极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 的概念

下面给出的判别极限存在的充分条件是重要的.

(5) 单调有界准则:

① 若数列 $\{a_n\}$ 自某项起单调增(减),且 a_n 有上界(下界)则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

② 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左(右)邻域内单调且有界,则 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$($\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$)存在.

(6) 夹逼准则:

① 若自某项起有 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

② 若在某个区间内有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$（这里 lim 可以是 $\lim\limits_{x\to a+0}$，$\lim\limits_{x\to a-0}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}$ 等等）.

(7) 极限存在的充要条件，经常用的有以下几个：

① $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$，当且仅当对每一子序列 a_{n_k}，有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

② $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$，或当且仅当每一列 $x_n \to a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

③ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，或当且仅当每一列 $x_n \to \infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

熟记以下极限是很有用的：

① $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；　　② $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\right)$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$（$a>0$ 是定数）；　　④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$；

⑤ $\lim\limits_{x\to0+0} x^x = 1$；　　⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$；

⑦ $\lim\limits_{x\to0+0} x\ln^p x = 0$；　　⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x} = 0$.

(8) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 是 $\underset{(x\to\infty)}{x\to a}$ 时的无穷小量；若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$，则称 $f(x)$ 是 $\underset{(x\to\infty)}{x\to a}$ 时的无穷大量.

若 $\lim\alpha = 0$，$\lim\beta = 0$，当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ 时，则称 β 是 α 的高阶无穷小量，记为 $\beta = o(\alpha)$；当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = c$（$c \neq 0, \infty$）时，称 β 与 α 是同阶的无穷小量，可记为 $\beta = O(\alpha)$；特别 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，就称 β 与 α 是等阶的无穷小量，常记为 $\beta \sim \alpha$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 当且仅当 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中

$\alpha(x)=f(x)-A$ 是 $x\to a$ 时的无穷小量.

等价无穷小量的代换性质:若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 有意义,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

因此,在极限运算中,记住以下等价关系是会带来方便的.

当 $x\to 0$ 时,

$x\sim\sin x\sim \mathrm{tg}x\sim\arcsin x\sim \mathrm{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$;

以及

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};(1+x)^a-1\sim ax;a^x-1\sim x\ln a(a>0,\neq 1).$$

3. 函数的连续性

(1) 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 处连续或 x_0 是 $f(x)$的连续点.

以下 4 款是等价的:

① $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续;

② $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 x 满足:$|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$

③ 当增量 $\Delta x\to 0$ 时,增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$是无穷小量;

④ $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$

(2) 有界闭区间上的连续函数的性质:

① 有界性及最大最小值可达性:若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则存在正数 M,使得$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[a,b]$;且存在 $x_1,x_2\in[a,b]$,使得 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.

② 介值性:若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$x_1,x_2\in[a,b]$,使得 $f(x_1)<f(x_2)$,则对每一个介于$f(x_1)$与$f(x_2)$之间的数 $\mu:f(x_1)<\mu<f(x_2)$,必有介于 x_1 与 x_2 之间的点 ξ,使得 $f(\xi)=\mu$.

零点定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(3) 函数的间断点　若 $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 的连续点，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点. 其中，若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 均存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点，特别地，$f(x_0+0)=f(x_0-0)$ 时，x_0 是可去间断点；$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ 时，x_0 是跳跃间断点. 如 $x=0$ 是 $\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点；$x=n$ 是 $[x]$ 的跳跃间断点.

若 $f(x)$ 的间断点 x_0 不是第一类的，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 特别地，当 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0)=\infty$ 时，x_0 是无穷间断点；当 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0)$ 无确定意义时，x_0 可称为振荡间断点. 如 $x=\frac{\pi}{2}$ 是 $\operatorname{tg}x$ 的无穷间断点；又如 $x=0$ 是 $\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

三、基本题型与解题方法

1. 函数

例 1-1　求复合函数的表达式：

设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f[f(\cdots f(x)]}_{n次}$.

解　用归纳法：$f_2(x)=f[f(x)]$

$$=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

设　$f_{n-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$，

则　$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$