



“十二五”国家重点图书

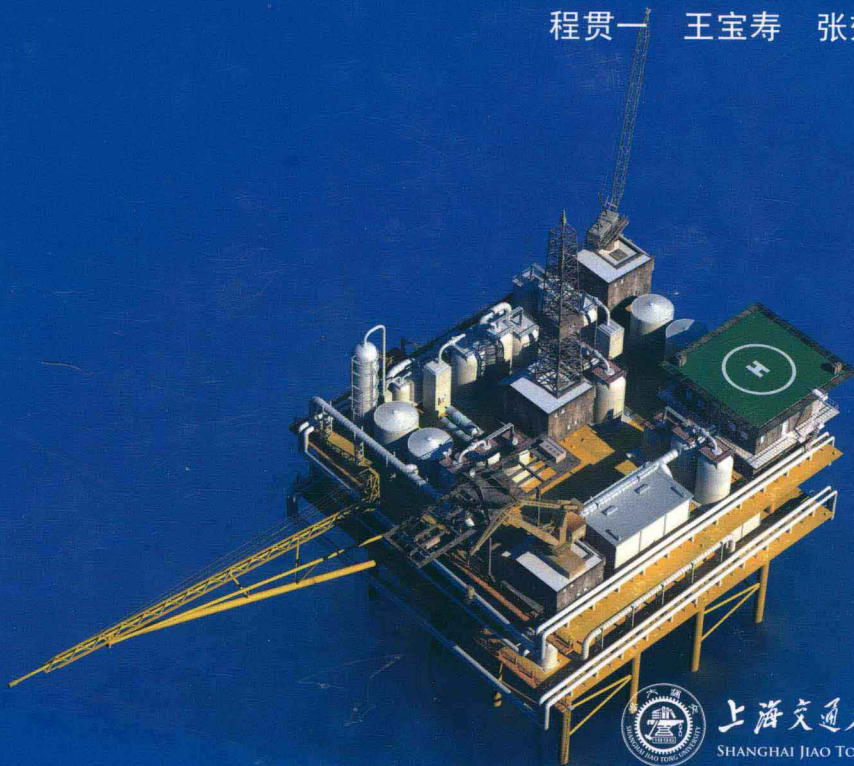
— 上海科技专著出版资金资助

# 水弹性力学

## ——基本原理与工程应用

HYDROELASTICITY —— THE BASICS WITH APPLICATIONS

程贯一 王宝寿 张效慈 编著



上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

国家十二·五重点图书

上海科技专著出版资金资助

# 水弹性力学： 基本原理与工程应用

---

HYDROELASTICITY: THE BASICS WITH APPLICATIONS

程贯一 王宝寿 张效慈 编著



上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

## 内 容 摘 要

本书从水弹性力学基本理论和运动方程式推导出发,阐述了梁、杆、板壳的水弹性力学问题;讨论了板、壳振动辐射噪声问题;水中兵器发射时的水弹性响应;石油工业中输液管道和深海采油立管的涡激振动;极大型浮体在海浪和海流联合作用下的水弹性响应,是一本从基本理论到各个工程领域应用内容较为丰富的专著。

本书适用于船舶、水中兵器、石油管道等工程领域的本科生、研究生以及从事水弹性力学研究的工作者。

### 图书在版编目(CIP)数据

水弹性力学/程贯一,王宝寿,张效慈编著. —上海:上海交通大学出版社, 2013  
ISBN 978 - 7 - 313 - 08451 - 4

I. ①水… II. ①程…②王…③张… III. ①水弹性力学 IV. ①TV131.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 087800 号

## 水 弹 性 力 学

程贯一 王宝寿 张效慈 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

浙江云广印业有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787 mm×1092 mm 1/16 印张: 24.25 字数: 469 千字

2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 313 - 08451 - 4/TV 定价: 68.00 元

---

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0573 - 86577317

# 前言

将水弹性力学与弹性力学耦合起来,便形成水弹性力学,它能够更深入地揭示结构物在水中运动时所发生的物理现象。中船重工第七〇二研究所在培养研究生时,设置了《水弹性力学》课程,在长期的教学中形成了一份水弹性力学讲义。这份讲义曾在工程兵舟桥研究所讲授水弹性力学课程时使用过。华中科技大学郑际嘉教授闻知这份讲义,便来信索取,作为教学参考教材。本书编撰即是在这份讲义的基础上进行的,并结合我们多年来所做的研究工作,进行了扩充修改,形成现在内容较为广泛的《水弹性力学》一书。

崔维成教授认真审阅了本书,支持该书的出版,并建议增加平板大挠度的变分原理和涡激振动的最新进展。我们感谢崔维成教授对本书出版的支持。在书中增加了第 3.6 节平板大挠度的水弹性振动和第 7.5 节有内部液体流动的大柔性立管涡激振动的计算。

船舶在高海情波浪中的航行,水中兵器在波浪中的发射等诸多水弹性响应问题,正在从线性响应过程的频域研究转向非线性响应过程的时域研究。本书内容仅是阶段性研究工作的部分成果,随着试验技术和计算技术的进展,水弹性力学必将向更深层次进一步发展。

本书可供船舶、水工、水中兵器、石油管道等各种工程领域的大学生、研究生使用,也可供设计院、研究院从事水弹性力学的专业工作者参考使用。

编著者

2012 年 3 月

# 目 录

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 绪论 .....                          | 001 |
| 参考文献 .....                        | 002 |
| <br>第 1 章 水弹性力学问题的微分方程和变分原理 ..... | 003 |
| 1.1 水弹性力学问题的微分方程 .....            | 003 |
| 1.2 质点系运动的变分原理——哈密顿原理 .....       | 005 |
| 1.3 水弹性力学的变分原理 .....              | 008 |
| 1.4 弹性体与流体耦合系统的拉格朗日方程式 .....      | 015 |
| 1.5 水面弹性体和流体耦合振动的变分原理 .....       | 017 |
| 1.6 带有自由面的流体运动的变分原理 .....         | 022 |
| 1.7 有限水深中结构振动的变分原理 .....          | 025 |
| 1.8 无界流体中的声弹性变分原理 .....           | 027 |
| 参考文献 .....                        | 029 |
| <br>第 2 章 梁的水弹性振动 .....           | 031 |
| 2.1 梁振动的微分方程 .....                | 031 |
| 2.2 水中悬臂圆柱体的自由振动 .....            | 036 |
| 2.3 用变分法的离散化近似计算梁的振动问题 .....      | 044 |
| 2.4 用变分法的离散化近似计算梁在液体中的振动问题 .....  | 051 |
| 2.5 水中圆柱体在地震波作用下的响应 .....         | 055 |
| 2.6 用边界积分方程方法求解水弹性振动的平面问题 .....   | 065 |
| 参考文献 .....                        | 072 |

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 第3章 水面平板的水弹性振动 .....                   | 074 |
| 3.1 平板运动的微分方程和边界条件 .....               | 074 |
| 3.2 水面矩形平板水弹性振动的数值解法 .....             | 077 |
| 3.3 阻尼平板的振动及其变分原理 .....                | 085 |
| 3.4 阻尼平板在声介质中的耦合振动及其变分原理 .....         | 087 |
| 3.5 水中弹性平板在声波作用下的振动 .....              | 090 |
| 3.6 平板大挠度的水弹性振动 .....                  | 098 |
| 参考文献 .....                             | 099 |
| 第4章 任意形状壳体水弹性振动的计算方法 .....             | 100 |
| 4.1 壳体的基本方程 .....                      | 100 |
| 4.2 壳体的有限元方法 .....                     | 102 |
| 4.3 应变能和动能的计算 .....                    | 104 |
| 4.4 流体动能计算中的赫斯-斯密斯(Hess-Smith)方法 ..... | 107 |
| 4.5 水弹性振动问题的求解 .....                   | 110 |
| 4.6 复合壳体系统的水弹性振动 .....                 | 113 |
| 参考文献 .....                             | 136 |
| 第5章 考虑空化效应的流体-结构系统的非线性动力响应 .....       | 137 |
| 5.1 流体的运动方程 .....                      | 138 |
| 5.2 包含空化的状态方程 .....                    | 139 |
| 5.3 有限元方法 .....                        | 140 |
| 5.4 流体与结构的耦合 .....                     | 143 |
| 5.5 应用 .....                           | 146 |
| 参考文献 .....                             | 150 |
| 第6章 声弹性振动 .....                        | 151 |
| 6.1 线性声波方程 .....                       | 151 |
| 6.2 任意形状壳体在声介质中的耦合振动 .....             | 156 |
| 6.3 声场积分方程的离散化 .....                   | 162 |
| 6.4 流体与结构相互作用的耦合方程 .....               | 166 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 6.5 瞬态过程问题 .....               | 166 |
| 6.6 无界流中等航速物体的声弹性振动 .....      | 167 |
| 6.7 浮体的声弹性振动 .....             | 176 |
| 6.8 无界流中变航速运动物体的声弹性振动 .....    | 185 |
| 参考文献 .....                     | 190 |
| <br>第7章 涡激振动 .....             | 191 |
| 7.1 卡门涡街的水动力计算 .....           | 191 |
| 7.2 涡激振动的基本现象 .....            | 200 |
| 7.3 涡激振动的计算 .....              | 201 |
| 7.4 一般随机涡激振动问题的计算 .....        | 204 |
| 7.5 有内部液体流动的大柔性立管涡激振动的计算 ..... | 207 |
| 参考文献 .....                     | 211 |
| <br>第8章 水翼、舵等平板类物体的颤振 .....    | 213 |
| 8.1 引言 .....                   | 213 |
| 8.2 水翼的水弹性振动 .....             | 214 |
| 8.3 水翼的线性颤振 .....              | 220 |
| 8.4 水翼的非线性颤振 .....             | 226 |
| 8.5 水中平板的颤振 .....              | 227 |
| 8.6 用有限元法解平板的非线性颤振问题 .....     | 234 |
| 参考文献 .....                     | 247 |
| <br>第9章 物体入水的水弹性力学问题 .....     | 251 |
| 9.1 弹性圆筒势能的计算 .....            | 251 |
| 9.2 弹性圆筒动能的计算 .....            | 257 |
| 9.3 流体动能的计算 .....              | 258 |
| 9.4 运动方程式 .....                | 264 |
| 9.5 鱼雷形状壳体入水撞击的水弹性力学理论 .....   | 267 |
| 参考文献 .....                     | 282 |

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 第 10 章 输液管道的水弹性振动 .....                            | 284 |
| 10.1 引言 .....                                      | 284 |
| 10.2 用动量定理推导输液管道的运动方程 .....                        | 285 |
| 10.3 用哈密顿原理推导输液管道的运动方程 .....                       | 288 |
| 10.4 定常流输液管道的运动 .....                              | 292 |
| 10.5 输运振荡流体的管道振动 .....                             | 299 |
| 10.6 弯曲输液管道的自由振动 .....                             | 309 |
| 10.7 作为圆柱壳体的输液管道的颤振 .....                          | 321 |
| 参考文献 .....                                         | 328 |
| 第 11 章 极大型浮体在海浪和海流联合作用下的水弹性响应 .....                | 332 |
| 11.1 引言 .....                                      | 332 |
| 11.2 基本方程 .....                                    | 332 |
| 11.3 频率为 $\omega$ 的脉动压力点在水面上以速度 $U$ 航行时的波面运动 ..... | 333 |
| 11.4 求解在板与水面交界面上压力分布的积分方程 .....                    | 336 |
| 11.5 浮动板的自由振动 .....                                | 337 |
| 11.6 积分方程的求解方法 .....                               | 338 |
| 11.7 板结构的运动方程 .....                                | 340 |
| 11.8 计算结构及讨论 .....                                 | 342 |
| 参考文献 .....                                         | 343 |
| 第 12 章 物体的出水水弹性响应 .....                            | 344 |
| 12.1 引言 .....                                      | 344 |
| 12.2 刚体运动方程的推导 .....                               | 344 |
| 12.3 在波浪中扰动力的计算 .....                              | 349 |
| 12.4 带翼回转体在波浪场中的运动方程式 .....                        | 354 |
| 12.5 算例 .....                                      | 358 |
| 12.6 物体出水水弹性响应问题的分析 .....                          | 363 |
| 12.7 物体出水水弹性响应的计算 .....                            | 366 |
| 12.8 回转体出水有攻角有空泡时的结构响应时域过程 .....                   | 368 |
| 参考文献 .....                                         | 377 |



# 绪 论



水弹性力学是研究液体和固体相互作用的一门力学学科。在各种工程领域中,水弹性力学有着广泛的应用。水翼的颤振问题;潜望镜和雷达天线的水弹性振动问题;水中声波、激波与壳体结构的相互作用问题,等等。在水弹性力学中,要考虑水动力、弹性力和惯性力三种力的耦合作用,把水动力学的方程和弹性力学的方程耦合起来进行求解,因此,这方面的问题要比水动力学和弹性力学方面的问题难一些。作为液体的水,通常可以按不可压缩的流体进行处理,但在有些情况下,也要考虑到它的压缩性,如水声和水中激波的传播问题,固体则按弹性体或塑性体处理。

水弹性力学中有各种类型的振动问题,当物体在液体中受到激振源的作用时,会产生自由振动和强迫振动,激振源可以是航行体中的动力机械、螺旋桨等,也可以是流体中的脉动,如湍流、波浪等。当激振源的频率与物体-流体系统的固有频率相同时,便会产生共振现象,引起振幅的急剧增长,物体-流体系统的固有频率(或自振频率)与单独物体(或处在空气中,流体的影响可忽略)的固有频率是不相同的,液体耦合作用的影响不可忽略。当物体有航速时,由于弹性力、惯性力和水动力的耦合作用,其振动现象较为复杂,存在有一个临界航速,当物体达到临界航速时,会产生颤振现象(flutter),它是一种中性稳定的振动状态;当物体的航速大于临界值时,便产生动力失稳现象,振幅愈振愈大,称为疾振现象(galloping),对于非圆截面的结构,往往会产生疾振。习惯上,颤振是指结构物具有两个自由度以上的以同一频率耦合起来的振动现象。当自然流中有湍流,或一物体处于另一物体的尾流之中,则由于湍流脉动力引起物体的振动现象,称为抖振(buffeting)。

圆柱杆在流体中运动时,由于尾流中旋涡的形成,对圆柱杆产生周期性的脉动力作用,由此引起的振动称为涡激振动,在垂直于运动的方向,其振动比较显著,如高空输电线在风中会产生很大音响的振动,螺旋桨在一定条件下会产生唱音,均属于涡激振动的例子。

本书中讨论梁、杆、板、壳一类物体的水弹性力学问题,对于水介质,则不可压缩和可压缩的情形都要讨论到。书中对于哈密顿原理的应用给予充分的重视,它

为复杂系统的动态过程分析提供了一个进行近似计算的有力工具。

我国已故老科学家徐芝纶院士在《弹性力学》一书<sup>[1]</sup>中详细叙述了各种弹性构件变形的理论计算公式;已故科学家钱伟长院士在《变分方法与有限元》<sup>[2]</sup>中详细叙述了弹性构件的有限元计算方法及力学系统的变分原理。本书中的多处内容就是根据上述著作将其推广应用到相应的水弹性力学问题中来的。

在 20 世纪 50 年代,我国已有一些水弹力学的论文发表,如郑哲敏院士等的论文“悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由振动”<sup>[3]</sup>,开创了我国水弹力学的工作,到 20 世纪 80 年代,吴有生院士完成了水面浮体的三维水弹性力学理论计算<sup>[4,5]</sup>,开拓了水弹性力学的三维理论。

本书从水弹性力学的基本问题开始,可提供给初学者学习,也描述了国内外水弹性力学较广泛范围内的工作,可提供给大学学生及有兴趣于该领域工作者们的参考。

#### 参考文献

- [1] 徐芝伦. 弹性力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1983.
- [2] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
- [3] 郑哲敏, 马宗魁. 悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由振动[J]. 力学学报, 1959, 3(2): 111 - 119.
- [4] Wu Y S. Three Dimensional Hydroelastic Theory of a Floating Body [D]. Ph. D Thesis 1984.
- [5] Bishop R E D, W. G. Price F R S and Wu Yousheng. A General Linear Hydroelasticity Theory of Floating Structures Moving in a Seaway [J]. Phil Trans R. Soc Lond, 1986, A316: 375 - 426.

# 第 1 章 水弹性力学问题的微分方程和变分原理



## 1.1 水弹性力学问题的微分方程

考虑一个弹性体,其区域为  $V_S$ ,外面包围着液体,其区域为  $V_L$ ,弹性体表面  $S_p$ ,弹性体和流体的交界面  $S$ ,弹性体表面  $S_p$  上的分布力为  $\bar{P}$ (见图 1.1),设弹性体是各向同性的,它产生的位移是小的,液体则按理想流体来处理,弹性体运动的微分方程为

$$\rho_s \frac{D^2 u_i}{Dt^2} = \sigma_{ij,j} + F_i \quad (1.1)$$

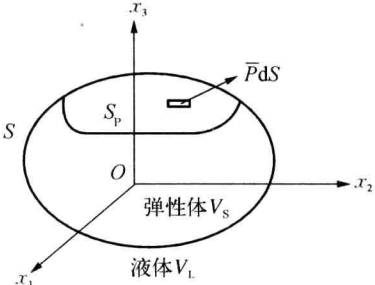


图 1.1 弹性体液体耦合图

式中:  $\rho_s$  为弹性体的密度,下标  $S$  表示弹性体;  $u_i$  为弹性体质点沿  $x_i$  方向的位移;  $F_i$  为作用于弹性体上的体积力;  $\sigma_{ij}$  为应力,  $\sigma_{ij,j}$  表示  $\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$ ;  $t$  为时间。

应变-位移关系为

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

式中:  $e_{i,j}$  为 6 个应变分量,即  $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12} = e_{21}, e_{23} = e_{32}, e_{31} = e_{13}$ 。

各向同性弹性体的应力-应变关系为

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.3)$$

式中:  $\lambda, \mu$  为拉梅常数,它们和杨氏系数  $E$ ,泊松比  $\nu$  的关系为

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.4)$$

式中:  $e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  为体积膨胀应变,  $k$  为哑标。

在弹性体的  $S_p$  部分表面上, 外力  $F$  是已知的。

对于理想流体部分的区域  $V_L$ , 其运动微分方程的欧拉形式为

$$\rho_L \frac{D^2 u_i}{Dt^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i \quad (1.5)$$

式中:  $\rho_L$  为流体的密度;  $\frac{D^2 u_i}{Dt^2}$  为流体质点的加速度;  $p$  为压强;  $F_i$  为体积力。

连续方程为

$$\frac{D\rho_L}{Dt} + \rho_L \dot{u}_{i,i} = 0 \quad (1.6)$$

对于不可压缩的液体, 其状态方程可取

$$\rho_L = \text{常数} \quad (1.7)$$

考虑到压缩性, 对于纯液体, 其压强与密度间的关系可由下列半经验的公式给出:

$$\left( \frac{p+B}{p_0+B} \right)^{\frac{1}{A}} = \frac{\rho_L}{\rho_{L_0}} \quad (1.8)$$

式中:  $A, B$  为与液体性质有关的常数, 对于水  $A=7, B=3000$  大气压, 下标 0 表示未经扰动时的量。

若考虑水的微量可压缩性, 则有

$$p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0 \quad (1.9)$$

式中:  $K$  为体积弹性系数,  $\Delta p = K \frac{\Delta \rho}{\rho}$ ,  $K = \rho \frac{dp}{d\rho}$ 。

对于水在  $15^\circ\text{C}$  时, 有

$$K = 2.045 \times 10^{10} \text{ dyn/dm}^2 (1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N})$$

还要求给出相应的初始条件、边界条件以及无穷远处的条件, 在弹性体和流体的交界面  $S$  上应满足压强相等和法向速度相等的条件:

$$(\dot{u}_i n_i)_S = (\dot{u}_i n_i)_L \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (1.10)$$

式中:  $n_i$  为  $S$  面上单位矢沿  $x_i$  方向的分量, 指向弹性体的外部为正。

$$p = -\sigma_{ij} n_i n_j \quad \text{在 } S - S_p \text{ 上} \quad (1.11)$$

其中的负号是由于弹性体中应力  $\sigma_{ij}$  的方向规定与流体中压强方向相反。

$$\bar{P}_i = \sigma_{ij}n_j + pn_i \quad \text{在 } S_p \text{ 上} \quad (1.12)$$

式中:  $\bar{P}_i$  是弹性体表面  $S_p$  上的分布力。

从以上的方程中分析,对于弹性体,其未知量有 3 个位移分量  $u_i$ , 6 个应变分量  $e_{ij}$ , 6 个应力分量  $\sigma_{ij}$ , 从式(1.1)~式(1.3)共有 15 个方程式,对于理想流体,其未知量有 3 个速度分量  $\dot{u}_i$ , 压强  $p$  和密度  $\rho$  各一个量,从式(1.5)~式(1.7)共有 5 个方程式,在满足初始条件和边界连续性条件下,耦合求解上述方程组,可以求得各种具体问题的解,在现代电子计算机高度发展的情况下,可以用各种数值方法求解各种相当广泛的水弹性力学问题。

## 1.2 质点系运动的变分原理

### ——哈密顿原理<sup>[1]</sup>

设质点系的质量为  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ , 在第  $i$  个质点上的作用力为  $F_i$ , 它有势函数  $U$ ,  $U$  只依赖于质点的坐标, 即

$$U = U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n) \quad (1.13)$$

故作用力  $F_i$  为保守力场, 具有关系

$$F_{x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, F_{y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, F_{z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.14)$$

现在讨论质点系从时间  $t = t_1$  到  $t = t_2$  之间的运动, 设起始位置  $[x_i(t_1), y_i(t_1), z_i(t_1)]$  和终了位置  $[x_i(t_2), y_i(t_2), z_i(t_2)]$  是已知的, 那么质点系在已知外力作用下从  $t_1$  到  $t_2$  必有一条真实发生的运动路径  $[x_i(t), y_i(t), z_i(t)]$ , 称之为实路径, 也可以设想有许多偏离实路径的路径  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{y}_i(t), \tilde{z}_i(t)]$ , 称之为虚路径, 则哈密顿原理为:

质点系从已知的起始位置运动到已知的终了位置之间的实路径, 必须使作用量

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \quad (1.15)$$

成驻值, 其中  $T, U$  为质点系的动能和势能。

又有

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (1.16)$$

即要求

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (1.17)$$

可以从质点系的牛顿运动方程出发,推导出这一结果,前者为

$$m_i \ddot{x}_i = F_{x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.18)$$

把它们写成平衡力系的形式(达朗贝尔原理)

$$m_i \ddot{x}_i - F_{x_i} = 0, \quad m_i \ddot{y}_i - F_{y_i} = 0, \quad m_i \ddot{z}_i - F_{z_i} = 0 \quad (1.19)$$

我们把虚路径与实路径之间的差异,称为虚位移,用  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  表示:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \tilde{x}_i(t) - x_i(t) \\ \delta y_i &= \tilde{y}_i(t) - y_i(t) \\ \delta z_i &= \tilde{z}_i(t) - z_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

利用虚功原理,可得

$$\sum_{i=1}^n \{ (m_i \ddot{x}_i - F_{x_i}) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - F_{y_i}) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - F_{z_i}) \delta z_i \} = 0 \quad (1.21)$$

对时间  $t$  进行积分,得

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \{ (m_i \ddot{x}_i - F_{x_i}) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - F_{y_i}) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - F_{z_i}) \delta z_i \} dt = 0$$

利用分部积分公式

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m_i \ddot{x}_i \delta x_i dt &= m_i \dot{x}_i \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) dt = - \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) dt \end{aligned} \quad (1.22)$$

利用力的势函数  $U$ , 有

$$\int_{t_1}^{t_2} -F_{x_i} \delta x_i = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i \quad (1.23)$$

综合起来,使得

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i - \delta \left[ \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \right\} dt &= 0 \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

即得式(1.17),上面完成了从牛顿运动方程到哈密顿原理的推导,反过来,也可以从哈密顿原理推导得出牛顿运动方程,这两者是等价的,但作为哈密顿原理的变分原理比运动方程的适用范围更广泛,它在量子力学中进一步得到了发展,还有,利用变分原理较易于求得某些问题的近似解。

如果几个质点的运动不是完全自由的,而是受到有  $m$  个条件的约束

$$\phi_j(t, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m; m < 3n) \quad (1.25)$$

则独立的变量只剩下  $3n - m$  个,如果用  $3n - m$  个新的独立变量(或称广义坐标)

$$q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}$$

来表示质点系的位置,即

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.26)$$

由势能和动能的表示式为

$$\left. \begin{aligned} U &= U(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t) \\ T &= T(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3n-m}, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

于是变分原理成为

$$\delta \Pi = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n-m} \left\{ \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right\} dt = 0 \quad (1.28)$$

进行分部积分后,得

$$\delta \Pi = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n-m} \left\{ \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt = 0 \quad (1.29)$$

由于变分  $\delta q_i$ (虚位移)是任意的,可得

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n-m) \quad (1.30)$$

长期以来,人们把

$$L = T - U \quad (1.31)$$

称为拉格朗日函数,把式(1.30)写成

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n-m) \quad (1.32)$$

式(1.32)称为保守系统的拉格朗日方程式。

对于非保守系统的情形,即力系没有一个势函数  $U$ , 可以通过做功的形式写出表达式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{3n-m} \left( F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{3n-m} Q_k \delta q_k \end{aligned} \quad (1.33)$$

其中利用了

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{3n-m} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{3n-m} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta z_i = \sum_{k=1}^{3n-m} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.34)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \left( F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.35)$$

式(1.35)即相应于广义坐标  $q_k$  的广义力。

变分原理可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{k=1}^{3n-m} Q_k \delta q_k \right) dt = 0 \quad (1.36)$$

换成

$$\sum_{k=1}^{3n-m} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k dt = 0$$

于是非保守力系的拉格朗日方程式为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, 3n-m) \quad (1.37)$$

### 1.3 水弹性力学的变分原理

设有一弹性体,其区域为  $V_s$ ,在其表面  $S_p$  上,作用有已知的外力分布  $\bar{P}$ ,弹性



体周围与流体接触,流体的外界面为  $S$ , 设  $S$  为固定的。

弹性体和流体耦合系统的变分原理为:

满足运动方程(1.1), 方程(1.5), 在  $t = t_1$  和  $t = t_2$  时的位移  $u_i$  给定, 并在应变、位移关系式(1.2), 应力、应变关系式(1.3), 连续方程式(1.6), 状态方程式(1.8)或方程式(1.9), 以及相应边界条件的约束下, 问题的正确解可使下列泛函取驻值而求得:

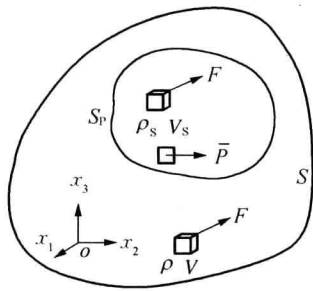


图 1.2 弹性体和流体耦合系统

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{V_s} \left[ \frac{1}{2} \rho_s \dot{u}_i \dot{u}_i - A(e_{ij}) + F_i u_i \right] dv + \int_{S_p} \bar{P}_i u_i ds + \right. \\ \left. \int_{V_L} \left[ \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} p u_{i,i} + F_i u_i \right] dv \right\} dt \end{aligned} \quad (1.38)$$

式中:  $A(e_{ij})$  为弹性体的应变能密度;  $-p u_{i,i}$  为流体受压后的势能密度。

$$A = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda e_{kk} e_{ll} + 2\mu e_{ij} e_{ij}) \quad (1.39)$$

如果把这个系统的总势能定义为

$$U = \int_{V_s} [A(e_{ij}) - F_i u_i] dv - \int_{S_p} \bar{P}_i u_i ds + \int_{V_L} \left[ -\frac{p u_{i,i}}{2} - F_i u_i \right] dv \quad (1.40)$$

总动能定义为

$$T = \int_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \dot{u}_i \dot{u}_i dv + \int_{V_L} \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv \quad (1.41)$$

则变分原理可写成标准的形式

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (1.42)$$

我们将流体作为具有微量压缩性的声介质来考虑, 其压强  $p$  与散度  $\text{div } \mathbf{u} = u_{i,i}$  之间有如下关系:

$$p = -\rho c^2 \text{div } \mathbf{u} \quad (1.43)$$

式中:  $c$  为介质的声速。

泛函方程(1.38)可写成