全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

随机过程及其应用

Random Processes and Their Applications

葛余博 葛菱南 编著

Ge Yubo Ge Lingnan

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

全国　　　　　　　　　　　　指导委员会推荐教材

随机过程及其应用

Random Processes and Their Applications

葛余博　葛菱南　编著

Ge Yubo　Ge Lingnan

清华大学出版社

北京

内容简介

本书主要作为工程硕士研究生"随机过程及其应用"课程的教材，因此本书努力做到科学性强、理论严谨并与实际结合，注重启发式教学与对学生创新能力的培养，以符合工程硕士生在有一定专业工作经验之后进一步提升专业水平和深入研究的需要。本书内容丰富、知识面广、可选自由度大，能适合不同专业、不同水平层次的需要。部分理工科、经济金融及师范院校学生学习应用随机过程，也可选用。书中用"*"标出的内容，供要求较高的专业学习用，一般或初学者可略过。

本书共8章，介绍概率论基础、数理统计基础及随机过程（第3～8章）的一般内容，重点是随机过程。前两章是一般理工科和师范院校"概率论与数理统计"教材的浓缩，也是学习随机过程的基础。通过本书学习，能理解处理和研究随机现象的主要思想和方法，掌握一些重要的随机规律，既为进一步学习随机数学和有关专业的学习，也为实际应用和研究奠定坚实的基础。由于概率论是新兴学科，利用概率论的眼光和手段去分析处理专业中的问题，"点石成金"，取得新发展和新突破！

图书在版编目（CIP）数据

随机过程及其应用/葛余博，葛菱南编著.--北京：清华大学出版社，2013
全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材
ISBN 978-7-302-29869-4

Ⅰ.①随… Ⅱ.①葛… ②葛… Ⅲ.①随机过程－研究生－教材 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 197678 号

责任编辑：盛东亮
封面设计：常雪影
责任校对：李建庄
责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm 印 张：27.5 字 数：685千字
版 次：2013年6月第1版 印 次：2013年6月第1次印刷
印 数：1～2000
定 价：49.00元

产品编号：023069-01

前言

本书主要作为工程硕士研究生“随机过程及其应用”的教材；由于内容丰富、知识面广、可选自由度大，适合不同专业、不同水平和需求，因此也适合部分理工科及金融精算、管理决策和风险分析等专业的学习需要。本教材努力做到科学性强、理论严谨，同时理论与实际结合，也考虑工程硕士生们在有一定专业工作经验之后进一步提升专业水平和深入研究的需要。

随机过程是概率论三部分的最高学科，它需要概率论基础和数理统计的知识作为起步。考虑到不少研究生对后两门学科没有学过、或者虽然学过但已隔以时日生疏了，本教材特别组织了前两章作为预备，浓缩了一般概率论基础和数理统计的内容，使得概率论三部分的学习一气呵成，这是国内外都有的需求。预备篇还注重事件与分布概念的融合，居高临下去理解事件、条件概率（条件分布）和独立性概念；注重重要分布的产生背景，不仅便于理解和掌握它们的性质和关系，包括数字特征的性质和关系，而且提高了应用能力，有助于创新能力培养；对于概率论基础的极限定理的内容，合并到第 4 章，利于比较概率论的几种主要收敛性。对于学过概率论基础的学生，可以重点复习和选学；对于没有学过的学生，也可作初学的教材。数理统计的学习是为实际分析和解决问题的需要。本书基本不涉及过程统计。

其后 6 章讨论对随机现象中一些特征性变量随时间发展和演化过程的规律。对二阶矩过程、平稳过程、时间序列、马尔可夫链和马尔可夫过程等重要过程的性质和研究的主要思想方法，分门别类地学习，以期掌握重要且应用广泛的几类随机过程的概念、性质及重要结论，努力培养学习和研究的思想方法，培养解决实际问题的能力，为工程硕士的学习，特别是电子通信、网络和控制、信号处理、生物工程与遗传等专业的学习和进入相关领域的研究奠定重要基础。

本教材有“ * ”标出的内容，表示供要求较高的专业学习用，一般要求者或初学者可以滑过。

“天有不测风云，人有旦夕祸福”，随机现象无处不在，因此随机现象的研究便因普遍而重要。随着科学研究的深入、生产与技术的飞速发展、经济活动与金融管理的普遍而活跃，特别是计算机与网络的出现，人们对随机数学的需要日见迫切。

Foreword

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支，作为新兴学科，从上个世纪40年代以来突飞猛进，还催生了“随机模拟”和“概率统计计算”研究方向；与其他数学学科结合，出现了“随机微分方程”、“随机运筹学”、“随机分析”、“随机服务系统”等数学新分支；与其他学科门类结合，遍地开花，出现“统计物理”、“生物统计”、“随机信号处理”、“随机控制”……使得利用概率论的眼光和手段去分析处理你专业中的问题，一定会“点石成金”，有新发展和新突破！

记号

<table>
<tr><td>~ 服从(分布)</td><td>$iid(=i.i.d.)$ 独立同分布</td></tr>
<tr><td>:= 记为</td><td>$ae(=a.e.)$ 几乎处处</td></tr>
<tr><td>$df(=d.f.)$ 分布函数</td><td>$pdf(=p.d.f.)$ 概率密度函数</td></tr>
<tr><td>$rv(=r.v.)$ 随机变量</td><td>$cf(=c.f.)$ 特征函数</td></tr>
<tr><td>$r\vec{v}$ 随机向量</td><td>$rp(=sp)$ 随机过程</td></tr>
<tr><td>$B(n,p)$ 二项分布</td><td>$P(\lambda)$ Poisson 分布</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Ge}(p)$ 几何分布</td><td>$Ex(\lambda)$ 指数分布</td></tr>
<tr><td>$N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布</td><td>$U_{(a,b)}(=U(a,b))$ 均匀分布</td></tr>
<tr><td>BM 布朗运动</td><td>MC Markov 链=马氏链</td></tr>
<tr><td>$l.i.m.$ 均方极限</td><td>MP Markov 过程=马氏过程</td></tr>
<tr><td>$\xrightarrow{d.}$ 以分布收敛</td><td>|EMBED Equation 3|£ 均方收敛</td></tr>
</table>

目录

Contents

第 1 章

概率论基础

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支，它包含三部分：概率论基础、数理统计和随机过程。本章主要介绍概率论基础的主要内容：事件、概率、随机变量和分布的基本概念，重要的概率分布规律，它们之间关系，包括条件概率（条件分布）和独立性，以及应用中十分重要的数字特征。通过本章学习，建立概率论基础的基本概念、理解处理和研究随机现象的主要思想，初步掌握主要的方法，并掌握一些重要的概率规律。

本章内容安排的特点是：注重事件与分布概念的融合，居高临下，有助于理解基本概念，包括条件概率（条件分布）和独立性；注重重要分布的产生背景，不仅便于理解它们、掌握它们的性质和关系，包括数字特征的性质和关系，而且利于提高应用能力和创新能力培养；对于概率论基础的极限定理的内容，合并到第 4 章，利于比较概率论的几种主要收敛性。

本章及第 2 章内容安排主要是为随机过程的学习作准备，对于学过概率论基础的学生，可以重点复习和选学；对于没有学过的学生，也可作为初学。

1.1 概率空间与随机变量分布的概念

1.1.1 概率论的研究对象、任务和内容

【对象与任务】

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支。

随机现象是指一个随机的、偶然的自然现象或社会现象，它和必然现象是相对的。北京地区冬季一定下雪，是必然现象，但降雪量多少，却是随机的；一个计算机网络上有各种信息传输是必然现象，而信息传输数量和门类、网络上访问某网站的次数以及访问遇到阻塞的

次数等也都是随机的。

“天有不测风云，人有旦夕祸福”，概述了随机现象无处不在，因此对随机现象的研究便因普遍而变得重要。

既然是随机的、偶然的，有客观的数量规律么？看一个著名的 Galton 钉板实验。如图 1.1.1 在平滑木板上均匀钉上几排钉子，两侧有护栏，下方打上隔板，从左向右依次编号。将此板倾斜，使上置小球滚下。假设小球质量均匀，钉子光滑，且钉子间距离和护栏的位置，使得小球从上端落下或从上一排钉子间落下后必然碰到下一排钉子中的某一个。显然小球最终落入哪个格子都是可能的，结果是偶然的、随机的，事先不能肯定。

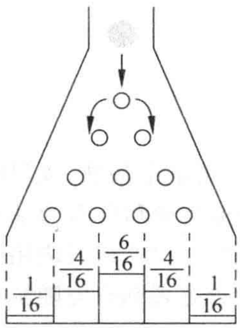

图 1.1.1 Galton 钉板实验

理想情况下，设小球中心和钉子中心的连线近于垂直，则每次碰撞后小球向右方和向左方落下的可能性应一样，各为 1/2。假如小球第一次碰钉后向右落下(其可能性为 1/2)，那么第二次碰钉(第二排右方钉子)后仍然向右落下，从而两次都向右落下的可能性便是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，类似地，两次碰钉都向左落下的可能性也是 1/4。而小球两次碰钉后从第二排中间空档落下的可能性则是$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。仿上，第三次碰钉后从第 3 排的 4 个空档落下的可能性，则从左到右分别为 1/8，3/8，3/8，1/8。四排钉子时则落入 5 个格子的可能性依次为 1/16，4/16，6/16，4/16 和 1/16。可见确有规律。

如果试验并非这种理想情况，小球未必均匀、钉子未必光滑、钉子排列也杂乱无章，仍然有规律吗？能找出这个规律吗？回答是肯定的。将 Galton 钉板实验重复进行 100 次，小球落入第 2 格可能有 27 次记录，其频率 f 为 27/100。重复进行 1 千次、1 万次，……，这个与试验次数 n 有关的频率 $f(n)$ 会越来越靠近一个常数，也即当 n 趋于无穷时 $f(n)$ 有极限值，这个值就反映了小球落入第 2 盒潜在的可能性大小(概率)。这个极限存在表明频率收敛到概率，称为**频率的稳定性**，在 4.2 节有严格证明。

可见，表面看来是偶然性起作用的地方，确实有内在的数量规律可循。

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的；因此可以对它进行量度。量度的数量指标就是概率。概率论的任务就是研究和发现各种随机现象中的客观规律，并掌握它们为经济建设、社会与生产管理，以及科学研究服务。

随着生产和社会经济的发展，科学研究的深入，概率论的理论和方法的研究与应用大步向前。这些进步有力地推动工农业生产、经济和金融管理、科学技术以及军事理论和技术等的发展，同时概率论自身也在日益丰富和深入。概率论的理论和方法还向各个基础学科渗透，出现随机分析、随机微分方程、随机运筹和随机服务系统等新兴学科，并且随机模拟和概率统计计算也应运而生。概率论的理论与方法不断地向其他学科渗透，出现随机信号处理、

随机振动分析、生物统计、统计物理等边缘学科。它也是人工智能、信息论、控制论、随机服务系统(排队论)、可靠性理论、金融和风险分析与决策等学科的基础。

1.1.2 事件与概率

1. 事件

所谓(随机)事件,可粗略理解为随机试验的结果。

Galton 钉板实验是一个随机试验。抛一枚硬币看它落地时是否正面朝上,在一批产品中随机抽取十个产品时抽到正品的次数,考察某厂流水线上电视机的寿命,都是在做随机试验。一个试验,如果在一定条件下可重复、试验的结果不止一个、并且每次试验时,不能肯定是哪个结果出现,这样的试验称为**随机试验**。随机试验里最基本的不能再分解的结果叫基本结果,也叫**基本事件**。由若干基本结果组成的,称为**复合事件**。基本事件和复合事件,泛称**事件**。特别地,由所有基本结果组成的,称为**必然事件**。其反面,也认为是一事件:**不可能事件**。粗略地称所有事件的全体为**事件体**。必然事件、不可能事件及事件体分别记为 Ω、ϕ 及 $\mathcal{F}$。

例 1.1.1 在有两排钉子的 Galton 钉板实验中基本结果只有三个:小球落入第 1 格、第 2 格及第 3 格。它们都是基本事件。但像"小球落入前两格"、"小球落入第奇数格"就是复合事件。特别地,事件"小球落入第 1 至 3 格"是必然事件。而"小球不落入第 1 至 3 格"就是不可能事件。

如果用 $\{\omega_i\}$ 表示事件"小球落入第 i 格",$i=1,2,3$。那么此例中基本事件为 $\{\omega_1\}$,$\{\omega_2\}$,$\{\omega_3\}$,而必然事件就是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$。"小球落入前两格"这一事件现在可写为 $\{\omega_1,\omega_2\}$,此时事件体为

$$\mathcal{F}:=\{\Omega,\phi,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3\},\{\omega_2,\omega_3\}\} \tag{1.1.1}$$

可见 Ω 是一个非空点集,事件是 Ω 的一个子集,事件体是由 Ω 子集组成,是集合的集合。并且可利用集合间的关系和运算,来刻画事件间的关系和运算。

上例中 Ω 是一个有限的点集,事件体可以全部列出来。而在考察电视机寿命时,Ω 就是一个无限的点集了,它常是一个实数区间。这时事件和事件体 $\mathcal{F}$ 如何表示呢?

利用抽象的集合论的概念,严格定义一般的事件和事件体 $\mathcal{F}$ 如下:

定义 1.1.1* 设 $\mathcal{F}$ 是一个抽象的非空点集 Ω 的一些子集组成的集合,满足

(F_1) $\Omega\in\mathcal{F}$;

(F_2) 如 $A\in\mathcal{F}$,则 $\overline{A}:=\Omega-A\in\mathcal{F}$;

(F_3) 可列并封闭,即如 $A_i\in\mathcal{F}$,$i=1,2,\cdots$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$;

* 文中标"*"的内容供要求较高的专业学习使用,一般要求者或初学者可以略去不学。——作者注

称$\mathcal{F}$**事件体**。称$\mathcal{F}$中的每一元素(点)为**事件**,Ω 为**必然事件**,事件 $\overline{A}$ 为 A 的**逆事件**。空集合ϕ也为事件,称为**不可能事件**。

一般用大写英文字母表示事件。注意:事件是 Ω(也称为样本空间)的子集而是事件体的元素(点),因此对任一事件 A,有 $A\subset\Omega$,而 $A\in\mathcal{F}$。由下面关于事件体性质的定理,说明如上定义的事件体$\mathcal{F}$,对有限次和可列(无穷)多次(这两种情况常合称为"**至多可列次**")的集合的并、交及求余运算是封闭的。所谓可列无穷多是指能像正整数那样可以依某种规则一个个列出的无穷多,或者说能与正整数集可以建立一一对应的集合称为**无穷可列的**。可以证明有理数是可列的、而无理数从而实数是不可列的。

定理 1.1.1 (1) $\phi\in\mathcal{F}$。

(2) 有限并封闭:如 $A_i\in\mathcal{F},i=1,2,\cdots,n$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$。

(3) 如至多可列个 $A_i\in\mathcal{F},i=1,2,\cdots,(n)$,则至多可列次的交集 $\bigcap\limits_{i}A_i\in\mathcal{F}$。

(4) 如 $A,B\in\mathcal{F}$,则 $A-B:=A\cap\overline{B}\in\mathcal{F}$。

证明 由定义 1.1.1 之(F_1)及(F_2)知$\phi=\overline{\Omega}\in\mathcal{F}$,即(1)真。令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$,则由($F_3$)可推出(2)。下证(3)。由($F_2$) 知 $\overline{A}_i\in\mathcal{F}$,由可列并的封闭性($F_3$)或有限多次并的封闭性(2),知 $\bigcup\limits_{i}\overline{A}_i\in\mathcal{F}$,且再由($F_2$),其逆也为事件。从而由集合运算的对偶原理,

$$\bigcap_i A_i=\bigcap_i \overline{\overline{A}}_i=\overline{\left(\bigcup_i \overline{A}_i\right)}\in\mathcal{F}$$

从而证得(3)。由(F_2)及(3),立得(4)。

由事件体的定义和本定理可知:事件体对至多可列次的集合运算(并、交和求余)都是封闭的。

注 1* 在集合论中,由集合组成的集合,叫类,满足条件(F_1)~(F_3)的类叫做**σ-代数**。因此事件体$\mathcal{F}$是 Ω 上的一个 σ-代数。当 $\Omega=R_1:=(-\infty,\infty)$时,如果定义类$\mathcal{L}=\{(-\infty,x]:x\in R_1\}$,并将$\mathcal{L}$中所有元(它是一个半开闭的无限区间)经过至多可列次并、交、求余所得到的全部集合记为新的类$\mathcal{B}$。容易验证它是一个 σ-代数,也说它是由$\mathcal{L}$产生的 σ-代数,并特别称为**波雷尔(Borel)集类**,记为$\mathcal{B}$。如果用 **O** 表 R_1 中所有开区间全体,**F** 表 R_1 中所有闭区间全体,则可以证明,**O** 或 **F** 产生的 σ-代数也是$\mathcal{B}$,详证请见参考书[16]或[17]。

例 1.1.1 中取 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$,取事件体$\mathcal{F}$为(1.1.1),就包容了这个试验中的所有事件。注意定义 1.1.1 之(F_3)中的 A_i没有规定彼此必须不同,例如 $A_1=\{\omega_1\}$,$A_2=\{\omega_2\}$,则取$\phi=A_3=A_4=\cdots$,于是$\{\omega_1,\omega_2\}=A_1\cup A_2=A_1\cup A_2\cup\phi\cup\phi\cup\cdots=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$。因此容易验证式(1.1.1)的$\mathcal{F}$确实为事件体。

如果在例 1.1.1 的试验中我们只关注小球是否落入中间一格,那么此时取

$$\mathcal{F}_1:=\{\Omega,\phi,\{\omega_2\},\overline{\{\omega_2\}}\}\tag{1.1.2}$$

则$\mathcal{F}_1$也是一个事件体。对同一个样本空间 Ω 事件体可以有不同的取法，以适应实际问题的不同需要。

在考察电视机寿命时，可取 $\Omega=[0,\infty)$，事件“寿命超过 400 小时而不超过 900 小时”如记为 A，则可写 $A=(400,900]$。而事件“寿命超过 1000 小时”则可写 $B=(1000,\infty)$ 等等(取小时为单位)。一般地，它是一个实数区间。事件体$\mathcal{F}$应该包括所有的非负的实数区间，以及包括由这些实数区间作至多可列次的集合运算(并、交及求余)所得到的集合。

用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算。A、B 集合求交的运算常略$\cap$不写，即 $AB:=A\cap B$。在例 1.1.1 中，如果事件 A=“小球落入前两格”，B=“小球落入偶数格”。那么当小球落入第 1 格，我们就可以说事件 A 出现了，而事件 B 未出现，用集合论中的表示法分别记为 $\omega_1\in A$ 和 $\omega_1\notin B$。当然也有 $\omega_1\in A\bar{B}=A-B$。而如果落下的小球进入第 2 格，则 $\omega_2\in A\cap B=AB$，此时事件 A 和 B 同时发生了。这样我们可以在集合间的关系和运算与事件间的关系和运算之间建立对应，列为表 1.1.1。

表 1.1.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega\in A$	事件 A 发生
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 必发生
$A\cup B$ 或 $A+B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$\bigcup_i A_i$	事件 A_i 中至少有一个发生
$A\cap B$ 或 AB	事件 A 与事件 B 同时发生
$\bigcap_i A_i$	所有事件 A_i 都同时发生
$A\backslash B$ 或 $A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生

常称 $A\cup B$(简写 $A+B$)为 A 与 B 的**和事件**，而称 AB 为**积事件**。如果 $AB=\phi$则称事件 A 与 B **互斥**，或**不相容**，有时也说**不相交**。如 $A_iA_j=\phi,\ \forall i\neq j$ 则说诸事件 A_i **两两不交**，此时将 $\bigcup_i A_i$ 专记为 $\sum_i A_i$。

至此，利用集合论，给出概率论中事件的严谨定义。所谓事件体是空间有一定条件的某些子集之集，它对至多可列次的集合运算(并、交和求余)都是封闭的。此外还利用集合论中集合间的关系和运算来刻画概率论中事件间的关系和运算。于是事件间的运算有结合律、交换律和分布律。也有对偶原理：

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \bar{A}_i$$

例 1.1.2 设 $\Omega=\{\omega:0\leqslant\omega\leqslant2\}$，$A=\left\{\omega:\frac{1}{2}<\omega\leqslant1\right\}$，$B=\left\{\omega:\frac{1}{4}\leqslant\omega<\frac{3}{2}\right\}$，试具体写出下列各事件：$\bar{A}B$，$\bar{A}\cup B$ 及 $A\cup\bar{B}$。

解 注意本题的空间 Ω 实际上为实数区间 $[0,2]$，且有 $A\subset B$。

$$\overline{A}B=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right],\quad \overline{A}\cup B=\Omega=[0,2]$$

由对偶原理可知

$$A\cup\overline{B}=\overline{\overline{A}B}=\Omega-\overline{A}B=\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\cup\left(\frac{3}{2},2\right]$$

2. 概率

我们常说"这事有百分之百把握"、"有七成把握"等等，都是用 0～1 之间的一个实数来表示事件发生的可能性大小的。因此事件的概率值可以看成以事件为自变量的一个函数值，它们在 $[0,1]$ 之中。严格的定义如下。

定义 1.1.2 设 P 是在事件体 $\mathcal{F}$ 上定义的实值集函数，满足

(P_1) 非负性：$P(A)\geqslant 0,\forall A\in\mathcal{F}$；

(P_2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(P_3) 可列可加性：若 $A_i\in\mathcal{F},i=1,2,\cdots$，且两两不交即 $A_iA_j=\phi,i\neq j$，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 P 为定义在事件体 $\mathcal{F}$ 上的**概率测度**，简称**概率**。称 $P(A)$ 是**事件 A 的概率**。

如 $P(A)=0$，称 A 为几乎不可能事件；如 $P(A)=1$，称 A 为几乎必然事件。由于我们关心的是概率，因此今后对几乎必然事件与 Ω，对几乎不可能事件与 ϕ 都不作区分。

注 2 从熟知的"长度"的概念来认识"可列可加性"。一个实数点的集合 A 的"长度"是非负的，用 $L(A)$ 表示。令 $\Omega=[0,1),A_1=[0,1/2)$，对 $n>1,A_n=[1-1/2^{n-1},1-1/2^n)$。易知 $L(A_n)=1/2^n$，注意诸 A_n 不交，且 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n=[0,1)$。又

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1=L[0,1)$$

因此 $L\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)$，这就是可列可加性。可见作为一个量度的尺度的概念，应该有可列可加性。更一般地，一个 σ-代数上的"测度"定义为非负的有可列可加性的集函数。从而 $\Omega=[0,1]$ 上的长度（一个点的长度为 0，因此 $[0,1)$ 和 $[0,1]$ 在讨论长度时不作区别），也就可看成规范化 $(L(\Omega)=1)$ 的测度，从而 $[0,1]$ 上的长度测度也可视为 $\Omega=[0,1]$ 上的概率测度。

注 3* 一个长度为 0 的集合的任何子集，也可认为都有长度 0。由于这些子集不一定是波雷尔集，这样我们把在 Borel 集类 $\mathcal{B}$（参看注 1）上定义的长度测度扩展了。扩展了的长度测度叫做勒贝格（Lebesque）测度，这种办法叫测度扩张，也叫测度的完备化。概率测度也常仿此扩张而为完备化测度，详见参考书[16]或[17]。