高等院校力学教材

Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学

米海珍　编著

清华大学出版社

高 等 院 校 力 学 教 材
Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学

米海珍 编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书系统全面地介绍了弹性力学的基本理论、基本原理、基本方法及其应用。全书共分9章，前5章全面论述了弹性力学的基本概念、基本定理以及边值问题的提法；第6章至第8章讨论了平面问题、空间问题和薄板小挠度问题(薄板问题是建筑结构方面重要的工程问题)，为了体系完整，最后一章做了数值解法的简要介绍。主要章节后附有小结、思考题与习题(思考题在书内能找到答案，习题答案及提示附在书后)。本书理论框架完整、内容简明清晰、叙述通俗简洁，便于读者更快、更深入地熟悉弹性力学。

本书可以作为高等院校工科有关专业本科生、研究生的弹性力学教材，适合40～60学时的教学。也可供工程技术人员作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/米海珍编著. --北京：清华大学出版社，2013
高等院校力学教材
ISBN 978-7-302-32563-5

Ⅰ. ①弹…　Ⅱ. ①米…　Ⅲ. ①弹性力学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 109907 号

责任编辑：秦　娜　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　**印　　张**：12　**字　　数**：207千字
版　　次：2013年7月第1版　**印　　次**：2013年7月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：25.00元

产品编号：053140-01

前　言

本书是专门为高等工科学院的本科生编写的。弹性力学是一门本科阶段的重要基础课，它的应用非常广泛，对提高工程力学素养必不可少。笔者讲授该课程十余年。此后，笔者讲授过土木工程专业本科生、研究生多门课程，对弹性力学授课有新的感受。基于多年的讲课经验，编写了该教材。本教材理论框架完整、内容简明清晰，主要有以下特点：一是叙述方式尽量通俗简洁，对一些较难理解的地方做了物理解释和数学描述，每章做了尽量简短的小结，章后思考题与习题进一步精简以减轻学习者的负担；二是增加少量例题，帮助读者深入理解弹性力学，熟悉弹性力学的解题方法。

笔者希望这本教材能使教师顺手，使学习者入门快些、掌握起来容易些，尤其是对弹性力学理论的框架有明晰的了解。

本书共有 9 章，其中前 8 章为主要内容。弹性力学的基本理论包括应力分析、应变分析、物理方程等，平面问题的求解是弹性力学的重点内容，空间问题的求解是弹性力学的难点，薄板小挠度问题在土木工程专业有重要的工程应用。第 9 章弹性力学的数值解法，因为已有专门课程讲授，本书为使体系完整，只做简单介绍。每章小结是弹性力学重要内容的总结。章后思考题和习题体现少而精的原则。

本书的文字录入工作由林利利老师和闫幼锋老师完成，书中图片由赵丽峰老师绘制，对于他们不辞辛苦的劳动，笔者在此表示衷心的感谢。

虽然在编写时笔者在诸多方面花了很多心思，但由于水平和经验所限，肯定还会存在不少问题，希望广大读者批评指正。

联系邮箱：huyn@lut.cn。

米海珍

2013 年 5 月

目　　录

第1章 绪论

1.1 弹性力学的发展与应用

弹性力学是固体力学的一个重要分支，它研究弹性物体在外力和外界其他因素作用下产生的变形和内力。**弹性**指物体在外界因素(外荷载、温度变化等)作用下引起变形，在外界因素撤除后，完全恢复其初始的形状和尺寸的性质。弹性力学仅研究变形与外力呈线性关系的弹性物体。一般来说，物体所产生的应力和应变之间的关系是一一对应的，即双方互为单值函数，且呈线性关系。若这种关系是非线性的，则称物体具有**非线性弹性性质**。本书所研究的问题更确切地说叫做**线性弹性力学问题**。

弹性力学是材料力学的延续。材料力学中已用胡克定律讨论过多种简单构件，采用了一系列几何的、物理的简化假定，得到能满足一般工程实用的应力和位移计算公式。弹性力学不使用未加证明的假定，因此能得到更精确的解答。另外，二者的研究对象虽都是弹性体，但材料力学研究单个杆件，弹性力学主要研究块体、板和壳体，对杆件的分析更为精确。

弹性力学的发展约有350多年的历史，这里对此学科的发展作一简略介绍。

由胡克(Hooke R)实验(1660年)起至柯西(Cauchy A L)1820年提出弹性理论的基本问题为止，通常被认为是发展初期阶段。此期间科学家们

提出了许多弹性体受力变形的问题，并且各自分别用自己的理论来解决一些简单构件问题，并无统一的理论和方法。

19 世纪 20 年代至 50 年代，纳维(Navier)和柯西提出弹性力学的基础问题，以及格林(Green G)和汤姆逊(Thomson W)确定了一般弹性材料应力-应变关系的 21 个弹性系数，此阶段是弹性力学问题的理论统一和建立期。

接下来是解决线性问题的发展期，大约为 19 世纪 50 年代至 20 世纪初，以圣维南(St Venant)，1854 年关于柱体扭转和弯曲理论论文的发表为标志，之后他还提出了半数学半物理的联合解法，所得解答与实验极为吻合，为理论的可靠性奠定了基础，由此开辟了弹性力学应用的广阔前景。这期间的重要工作还有艾雷(Airy G B)1862 年提出了应力函数解法，从而解决了平面问题，赫兹(Hertz H)1882 年解决了接触问题，克希霍夫(Kirehhoff G)1850 年解决了平板门的平衡和振动问题。而且很多问题已应用到工程中。

从 20 世纪初开始，随着工业技术的迅猛发展，如机械方面、船舶方面、建筑方面，钢材及其他弹性材料的应用范围不断扩大，弹性力学得到了快速的发展，同时也推动了它与其他科学的结合，不但进一步解决了一些薄板大挠度、大变形和非线性稳定性等问题，同时也形成了一些新的学科领域，至今已有非线性弹性力学、非线性板壳理论、热弹性力学、电磁弹性力学、气动弹性力学和水弹性力学等，应用的工程领域已举不胜举。20 世纪该学科的发展显示了蓬勃旺盛的景象，不少科学家为此作出了贡献，这其中已有中国科学家的工作，值得注意的有：钱学森与卡门(Karman Tvon)提出薄壳的非线性稳定问题；钱伟长参与发展了薄壁杆件理论；胡海昌参与发展了各向异性的弹性力学；以及钱伟长、胡海昌建立了弹性力学的广义变分原理并推广到了塑性力学领域中。

如今，弹性力学在工程上的应用已极为广泛，如道桥工程、房建工程、水利工程、船舶制造工程、机械工程、航天工程等诸多领域，而且已成为解决许多工程问题必不可少的工具。可以预料，弹性力学将会对现代工业技术和自然科学发挥更加重要的作用。

1.2 弹性力学的求解方法

弹性力学的求解通常有实验方法、数学方法及各方法结合的方法。

实验方法是用机械的、电学的、光学的、声学的方法等来测定弹性体在

外力作用下应力和应变的分布规律，如光弹性法、云纹法等。在弹性力学中，许多难于用数学求解的问题往往借助实验方法求解。

数学方法是利用数学分析的方法，对弹性力学边值问题进行求解，由此求得所研究的弹性体的应力场和位移场，该方面的研究成果构成了弹性力学的基本内容。实际上，数学求解时，必须解含有 15 个未知函数的偏微分方程组，只能求得很少特殊问题的解析解，一般问题的求解难度相当大，甚至不可能。因此，发展了一些近似解法。例如逆解法、半逆解法和基于能量原理的变分方法等。

除此之外，数值方法也是一种十分有效的方法，主要有：差分法、有限元法和边界元法。目前在计算机普及的情况下，数值方法已成为一种普遍而实用的方法。

对于较为复杂的弹性结构可结合上述几种方法来求解。

1.3　弹性力学的基本假定和一般原理

自然科学中的各门学科都有自己的前提条件和研究范围，弹性力学亦不例外。在这里，对弹性力学研究的物体给出一个限定范围或前提条件，如果所研究的问题超出该范围，弹性力学的理论将不再适用。这一范围或前提条件即为下面的几个基本假定。

(1) **连续性假定**。物体内部由连续介质组成没有空隙，因而各个力学量，如内力、位移、形变等都是连续的，可以用坐标变量的连续函数表示。另外，物体在变形过程中保持连续，原来相邻的任意两个点变形后仍是相邻点，不会出现**开裂**或**重叠**现象，因而可利用微积分知识处理问题。严格地说，物体是由分子组成的，分子和分子相互之间存在着间隙。现在考虑的是物体的宏观力学过程，物体的宏观尺寸远大于分子之间的相对距离，故此假定是成立的，且这一假定已被实验证实是合理的。

(2) **线性完全弹性假定**。弹性从数学角度看，即应力与应变之间互为单值函数，且与变形过程无关。同时还假定物体变形服从胡克定律，即应力与应变成正比。满足弹性和应力-应变成正比的线性关系的物体即为**线弹性物体**。当外力未超过某一限度时，大多数固体材料都具有这种属性。另外，假定物体是完全弹性的，弹性常数与应力和应变的大小无关。线性完全弹性的假设使物理方程(弹性力学中的基本方程之一)成为线性方程，数学处理简单。少数材料具有非线性弹性，这会导致变形与荷载的非线性关系，称为

材料非线性效应。

(3) **均匀性假定**。物体是由同一种材料组成,其弹性性质不随点而变,任何一点的弹性性质可代表整个物体的弹性性质,即弹性常数与位置(坐标)无关;或者物体由多种材料组成,但每一种材料的颗粒远小于物体尺寸且在物体内均匀分布。例如,金属材料可以看做是均匀的,而混凝土、玻璃钢为非均质材料,不细究各组分交界面上的局部应力时,就可用在足够大的材料试件上测得的等效弹性常数来简化成均匀材料。

(4) **各向同性假定**。物体的弹性在所有方向都相同,物体的弹性常数不随方向而变,即弹性常数与坐标轴的方向无关。绝大多数的金属材料是各向同性的,弹性常数只有两个。木材、复合材料、地壳等必须考虑各向异性,弹性常数有 21 个。

(5) **微小变形假定**。在外力或温度变化的作用下,物体变形所产生的位移量与物体本身尺寸相比是微小的,与其本身的几何尺寸相比属于高阶小量,此时问题分析将大为简化。位移是微小的,应变分量和转角远小于 1,其相互乘积及二次以上的量可略去,反映应变与位移关系的**几何方程**(弹性力学中的基本方程之一)是线性方程。大变形情况也会导致变形与荷载的非线性关系,称为几何非线性效应。

由于以上假定使得弹性力学问题的基本方程成为线性方程,故在求解时可以应用叠加原理。

上述基本假定中,第(5)条属于几何假定,其余假定是对材料物性的假定。这些假定是弹性力学的基础和前提条件。以后各章推导的基本公式及各种应用均是在此基础上得出的。

弹性力学中的一般原理主要包括:**圣维南原理**、**叠加原理**和**解的唯一性定理**。

圣维南(Saint-Venant)原理:也称局部性原理。它可表述为:若把作用在物体局部边界上的面力用另一组与它静力等效(即有相同的主矢量和主矩)的力系来代替,则在力系作用区域的附近应力分布将有显著的改变,但在远处所受的影响可以不计。应用圣维南原理可将弹性力学中一些较为复杂的边值问题进行简化处理。

叠加原理:在小变形和线弹性的条件下,作用在物体上的几组荷载所产生的总效应等于每组荷载单独作用效应的总和,即通过叠加同一物体的各组荷载分别作用下的解答得到其荷载共同作用时的解答。但应注意的是,一种荷载作用不会引起另一种荷载作用发生性质的变化,此时才能应用叠加原理。例如,平板状物体受平行于板面的拉力、压力、剪力等作用

力，此时可用叠加原理；相反，细长杆受纵向压缩和横向弯曲时，横向弯曲的荷载作用会引起纵向压缩作用的性质变化，且变形大，因而不能采用叠加原理。

解的唯一性定理：对于弹性体，在外荷载作用下应力、应变、位移的解答是唯一确定的。

1.4 典型例题

如图 1.1(a)所示，受轴向拉伸的变截面薄板，若采用材料力学的方法计算应力时，所得结果是否总能满足任一横截面(图 1.1(b))和微元体(图 1.1(c))的平衡？若采用弹性力学的方法求解，其结果又将如何？

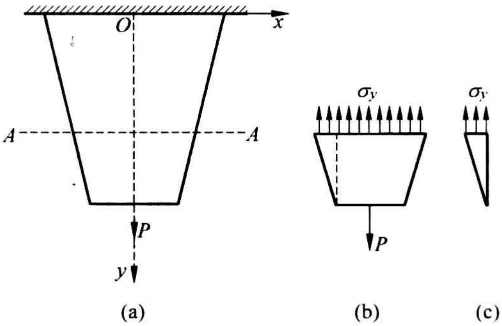

图 1.1

解 按材料力学方法计算：受轴向拉伸变截面薄板，假定横截面上无剪应力，正应力均匀分布，同时假定薄板的纵向纤维互不挤压，即

$$\tau_{yx} = 0, \quad \sigma_y = \frac{P}{A_0}, \quad \sigma_x = 0$$

其中 A_0 为 A—A 处的横截面面积。

若取整个薄板的某一段加以分析，如图 1.1(b)所示，此应力分布能满足任一横截面的平衡条件。

若在薄板的边缘取一微元体，如图 1.1(c)所示，此应力分布显然不能满足平衡条件。因此，该应力场只是近似解答。即满足大部分区域，而在小部分区域上是不正确的。

按弹性力学方法计算：在薄板内任取一微元体，其应力分布如图 1.2 所示。该应力分布能满足任一微元体的平衡条件，因此弹性力学分析的结果

更加精确。

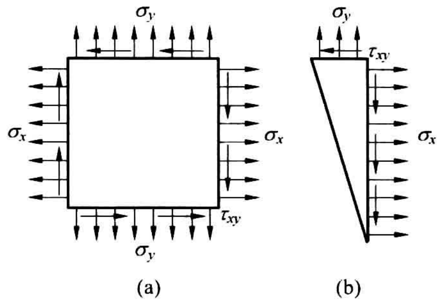

图 1.2

下面介绍几位弹性力学的奠基学者。

柯西(Augustin-Louis Cauchy)1789 年生于法国,1857 年去世。数学家和力学家。他奠定了弹性力学中应力和应变的理论,首先指出了矩形截面杆的扭转与圆截面杆有重大区别,最早研究了板的振动问题,在数学和力学的其他方面也作出很多突出的贡献。

圣维南(Adhèmar Jean Claude Barre de Saint-Venant)1797 年生于法国,1886 年去世。1825 年毕业于巴黎桥梁公路学校,后从事工程设计工作,1837 年回该校任教,1868 年当选为法国科学院院士。在弹性力学、塑性力学、流体力学等方面作出了贡献。他的力作用的局部性思想被称为"圣维南原理"。

杨(Thomas Young)1773 年生于英国,1829 年去世。他是一个多才多艺的学者,曾以物理学及考古学著称,他建立了光的波动理论。在弹性理论方面首先给出了应力-应变之间的定量数值关系,从而使得弹性力学正式成为一门科学。他还是首先考虑剪切弹性变形的科学家。

泊松(Simeon-Denis Poisson)1781 年生于法国,1840 年去世。他初学医学,后于 1798 年进巴黎综合工科学校改学数学,毕业后在该校任教。著有数学、天文学、电学和力学方面的著作,其代表性力学著作《力学教程》于 1811 年问世,"泊松比"便是以他的名字命名的。

基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff)1824 年生于德国,1887 年去世。曾在海登堡大学和柏林大学任物理学教授,他发现了电学中的"基尔霍夫定律",同时对弹性力学,特别是薄板理论的研究作出了重要贡献。

本章小结

1．弹性力学的 5 个基本假定

物体是连续的，各个力学量是坐标的连续函数；线弹性假设，应力和应变互为单值线性函数，和过程无关，与应力、应变大小无关；均匀性假定，任一点的弹性性质可代表整个物体的弹性性质；各向同性假定，弹性性质与方向无关；微小变形假设，几何方程是线性的，数学分析简单。这些假定限定了线性弹性力学的研究范围，也是其理论成果应用的前提条件。

2．弹性力学的三个一般原理

圣维南原理使复杂边界条件可以简化处理；叠加原理使受力形式复杂的问题简化为几个受力形式简单的、便于分析的问题叠加；解的唯一性定理使得求解方法多样化。

思考题

1-1　弹性力学中的基本假定是什么？

1-2　举例说明均匀性假定和各向同性假定有何区别。

1-3　一般的钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？

1-4　弹性体的应力-应变曲线一定是线性的吗？

第2章 应力分析

2.1 体力、面力及应力

凡能导致物体变形和产生内力的物理因素都可称为**载荷**。荷载分为两大类：一类载荷，如重力、机械力和电磁力，可以简化为作用在物体上的外力，此外力可引起物体的变形和内力；另一类载荷，如温度和中子辐照等物理因素，则直接引起物体变形，仅当这种变形互不协调或受到约束时，物体内才产生内力。

弹性体所受的力可划分为外力和内力两大类。外力是作用于弹性体上的力，它包括体积力和面力。内力为由于外力作用而引起的物体内部各部分之间相互作用的力。现对这几个概念逐一进行介绍。

体积力是作用在物体体积内的力，也称体力，例如重力、惯性力及电磁力等。为标明物体在某点 P 所受体积力的大小和方向，过 P 点(见图 2.1)从物体中取一微小体积 Δv，并设作用其上的体力为 ΔQ，则体力定义为

$$f = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \tag{2.1}$$

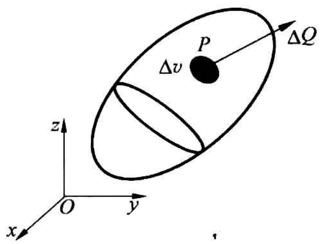

图 2.1

f 的方向为 ΔQ 的极限方向。为了计算方

便,将体力分解到 3 个坐标轴方向,其相应分量记为 f_x、f_y、f_z。一般情况下,物体所受体力各点并不相同,而是坐标的函数。

面力是分布在物体表面上的力,或者说是两物体通过表面的相互作用而产生的力。例如液体或气体的压力、固体间的接触力等。为确定物体表面某点 P 承受面力的大小和方向,过 P 点(见图 2.2)取该表面的一小部分,它包含 P 点,面积为 ΔS,设作用于 ΔS 面积上的面力为 ΔQ,则面力定义为

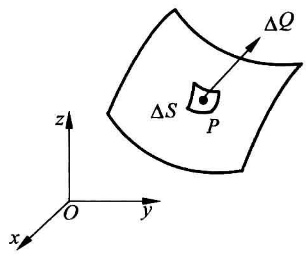

图 2.2

$$F = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.2}$$

其大小为 ΔQ 的极限值,方向为 ΔQ 的极限方向。同样,可将其分解到 3 个坐标轴上,相应分量记为 F_x、F_y、F_z。

内力是物体内一部分对另一部分的作用,通常以应力的形式表示,如材料力学中梁截面上的正应力、剪应力等。

如图 2.3 所示,一弹性体被假想平面截成两部分:A 和 B,那么 B 部分对 A 部分的作用,便可以用 A 部分截面上的应力矢量来代表。

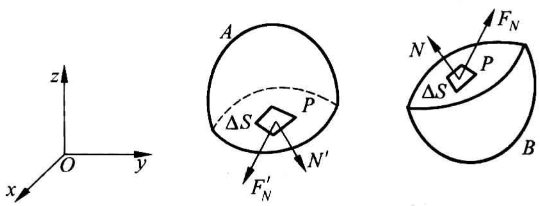

图 2.3

由图 2.3 可知,B 部分截面上任一点 P,P 是包含在微小面积 ΔS 内的,ΔS 面上过 P 点的外法线是 N,令 P 点的面力是 F_N,它是一个矢量,因此称为**应力矢量**。应力矢量表示作用在法向为 N 的微元平面上的单位面积上的力。在直角坐标系中,F_N 分解为坐标分量 F_x、F_y、F_z。特别提醒:应力是坐标的函数。

显然在 A 部分同一点 P 的外法线是 N',它与 N 的方向相反,应力矢量 F'_N 应有如下关系:$F'_N = -F_N$。

从物体中的一点处取出一微元体,这一微元体呈正平行六面体,且各边与坐标轴平行,长度分别为 Δx、Δy、Δz(见图 2.4),将每一平面上的应力分为正应力和剪应力,而剪应力又可分解为两个沿坐标方向的分量。