大学公共数学系列教材

GAILÜ LUN YU SHULI TONGJI

# 概率论与数理统计

金义明 主 编
李剑秋 卢俊峰 丁嘉华 马 骊 副主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

大学公共数学系列教材

# 概率论与数理统计

主　编　金义明
副主编　李剑秋　卢俊峰
　　　　丁嘉华　马　骊

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计 / 金义明主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2013.6

ISBN 978-7-81140-903-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①概率论—研究生—入学考试—教材②数理统计—研究生—入学考试—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 132266 号

**概率论与数理统计**

金义明 主编

---

**责任编辑** 蒋红群

**封面设计** 王妤驰

**责任印制** 汪 俊

**出版发行** 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail:zjgsupress@163.com)

(网址:http://www.zjgsupress.com)

电话:0571-88904980,88831806(传真)

**排　　版** 杭州朝曦图文设计有限公司

**印　　刷** 杭州杭新印务有限公司

**开　　本** 787mm×960mm 1/16

**印　　张** 15.25

**字　　数** 315 千

**版 印 次** 2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

**书　　号** ISBN 978-7-81140-903-1

**定　　价** 45.00 元

---

# 前　　言

本教材是依据教育部制定的“概率论与数理统计课程”教学基本要求，并参照全国硕士研究生入学统一考试“概率论与数理统计”部分考试大纲编写而成的。本书可作为高等学校非数学专业的理工科和金融经济管理等各专业的概率论与数理统计课程的教材，也可作为报考硕士研究生人员和科研工作者的参考书。

基础科学、应用技术和管理，是现代社会赖以生存的三大支柱。概率论与数理统计的思想和方法，在现代管理和经济领域中得到广泛应用和蓬勃发展，已经成为不可缺少的重要工具。概率论是处理带有随机成分的各类问题或模型的基础，概率论的思维和方法，广泛地应用于自然科学、社会科学、工程技术和管理、军事和工农业生产。

本书的前五章讲概率论的基础知识，包括随机事件及其概率，随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律和中心极限定理；第六、七、八章是数理统计的基础知识，包括抽样分布、参数估计和假设检验。

本教材特别结合独立院校学生特点，立足独立院校培养高级应用型人才的目标，在保留传统的知识体系的前提下，降低理论难度，注重具体和实用，从实例出发引入基本概念，精选了丰富的例题和习题，力求做到由浅入深、深入浅出、化难为易；本教材还特别注重思想方法的介绍。概率统计不仅是一门数学理论，而且还具有世界观的性质。具备正确的概率统计的思想方法是大学生应有的一种基本修养和素质，因此本书特别注重阐释统计的思想、问题的背景和统计方法产生的历史（如极大似然法和显著性检验的思想），以使学生对统计的思想方法有一个系统的了解。

本书由浙江工商大学杭州商学院数学教研部组织编写，大纲和体系由集体讨论而定。第一、二、三章由金义明编写，第四章由李剑秋编写，第五、八章由丁嘉华编写，第六章由马骊编写，第七章由卢俊峰编写，全书由金义明统稿，李剑秋、卢俊峰进行了认真仔细的校对。

讲完本书大约需要51学时。

在编写的过程中，我们参考了较多的文献资料，这些将在书末的参考文献中一一列出。本书的编写得到浙江工商大学出版社和浙江工商大学杭州商学院的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

编　者

2012年10月于杭州

# 目　录

CONTENTS

# 第一章　随机事件及其概率

在自然界与人类社会生活中，存在着两类截然不同的现象. 一类是**确定性现象**. 例如，"早晨太阳必然从东方升起"；"在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾"；"无外力作用或合外力为零的物体，必定保持静止或匀速直线运动状态"……对于这类现象，其特点是：在试验之前就能断定它有一个确定的结果，即**在一定条件下，重复进行试验，其结果必然出现且唯一**.

另一类是**随机现象**. 例如：某地区的年降雨量；打靶射击时，弹着点离靶心的距离；投掷一枚均匀的硬币，可能出现"正面"，也可能出现"反面"，事先无法作出确定的预测. 因此，对于这类现象，其特点是可能的结果不止一个，即**在相同条件下进行重复试验，试验的结果事先不能唯一确定**. 就一次试验而言，时而出现这个结果，时而出现那个结果，呈现出一种偶然性. 这类在个别试验中呈现不确定的结果，而在相同条件下大量重复试验中呈现规律性的现象称之为随机现象或偶然现象，这种规律性称为**统计规律性**. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

## §1.1　随机事件

### 1.1.1　随机试验与样本空间

在一定条件下，对自然与社会现象进行的观察或实验称为随机试验，简称**试验**，并记之以英文字母 $E$. 下面举一些试验的例子.

$E_1$：抛一枚硬币，观察正面"$H$"和反面"$T$"出现的情况；

$E_2$：将一枚硬币连抛三次，考虑正反面出现的情况；

$E_3$：将一枚硬币连抛三次，考虑正面出现的次数；

$E_4$：掷一颗骰子，观察出现的点数；

$E_5$：记录某网站一分钟内受到的点击次数；

$E_6$：在一批灯泡中任取一只，测其寿命；

$E_7$：任选一人，记录他的身高和体重.

上述试验具有以下的共同特点：

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们将试验 $E$ 的每一个结果称为**样本点**，并称全体样本点组成的集合为试验 $E$ 的**样本空间**，记为 $S$.

上面提到的各试验 $E_k$ 的样本空间 $S_k$ 分别为：

$S_1 = \{H,T\}$；

$S_2 = \{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$；

$S_3 = \{0,1,2,3\}$；

$S_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_5 = \{0,1,2,3,\cdots\}$；

$S_6 = \{t \mid t \geqslant 0\}$；

$S_7 = \{(x,\ y) \mid x > 0,\ y > 0\}$.

同样是将硬币抛掷三次，但是 $S_2$ 和 $S_3$ 截然不同. 这说明，试验的目的决定试验所对应的样本空间.

从这些例子可以看出，随着问题的不同，样本空间可以相当简单，也可以相当复杂，在今后的讨论中，都认为样本空间是预先给定的，当然对于一个实际问题或一个随机现象而言，考虑问题的角度不同，样本空间也可能选择得不同.

### 1.1.2 随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征，将这一可观察的特征称为一个随机事件，简称**事件**，通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示. 例如抛掷一颗骰子，若以 $A$ 表示"得到的为偶数点"，则 $A = \{2,\ 4,\ 6\}$；$B$ 表示"得到的点数大于 3"，则 $B = \{4,\ 5,\ 6\}$，这里 $A,B$ 均为随机事件，它们都是由样本空间 $S$ 中若干个样本点构成的.

因此，正确地讲，随机事件是由若干个样本点组成的集合，或说成是样本空间的某个子集. 若某个事件 $A$ 发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点发生.

由单个样本点组成的事件，称为基本事件. 在随机试验中，人们往往关心的是一些较复杂的结果，这些结果包含了多个样本点，相对于基本事件，把它们称为复合事件.

为了讨论问题方便，我们把整个样本空间 $S$ 也作为一个事件，因为在每次试验中 $S$ 必然发生，所以称之为必然事件. 类似地，把空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，称之为不可能事件.

### 1.1.3 事件的关系与运算

由于事件是样本空间的一个子集，因此事件之间的关系与运算就是集合间的关系与

运算,所有符号和运算规律与集合论基本相同,但要注意需要用概率论的语言来解释这里的符号和公式.

**1. 事件的包含与相等**

若事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生,即 $A$ 中的样本点均属于 $B$,称 $B$ 包含 $A$,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

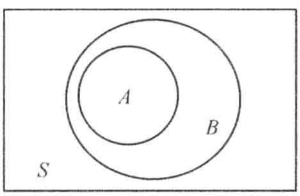
若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 $A$ 与 $B$ 相等,记作 $A = B$.

**2. 事件的和(或并)**

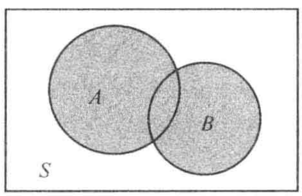
"事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生"这一事件称为 $A$ 与 $B$ 的和(或并),记作 $A \cup B$.一般地,$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,它表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生;$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少有一个发生.

**3. 事件的积(或交)**

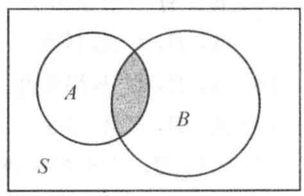
"事件 $A$ 和 $B$ 同时发生"这一事件称为 $A$ 与 $B$ 的积(或交),记作 $A \cap B$,为简便记,常记作 $AB$.一般地,$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,它表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生;$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.




$A \subset B$




$A \cup B$




$A \cap B$

**4. 事件的差**

"事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生"这一事件称为 $A$ 与 $B$ 的差,记作 $A - B$.

**5. 互不相容(互斥)事件**

若事件 $A$ 与 $B$ 不会同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,称事件 $A$ 与 $B$ 是互不相容(互斥)事件.

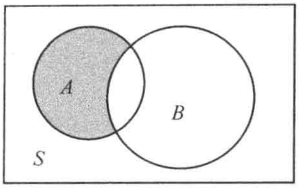
**6. 互逆(对立)事件**

对于事件 $A$ 和 $B$,若 $A \cap B = \varnothing$,且 $A \cup B = S$,称 $A$ 与 $B$ 是互逆(对立)事件,此时称 $B$ 为 $A$ 的逆事件,记作 $\overline{A}$,表示 $A$ 不发生,显然有

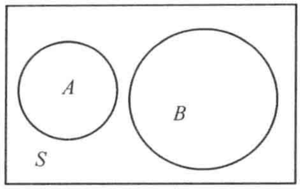
$\overline{\overline{A}} = A$, $A\overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = S$.

与集合的运算类似,事件也有相应的运算规律:

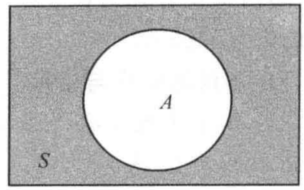
(1)交换律　$A \cup B = B \cup A$;$AB = BA$　　(1.1.1)




$A-B$




$A$与$B$互不相容




$\overline{A}$

(2)结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A(BC) = (AB)C$　　(1.1.2)

(3)分配律　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$；$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$　　(1.1.3)

(4)对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$　　(1.1.4)

**例 1.1.1**　设 $A$, $B$, $C$ 为 $S$ 中的随机事件,试用 $A$, $B$, $C$ 表示下列事件.

(1)$A$ 与 $B$ 发生而 $C$ 不发生；

(2)$A$ 发生,$B$ 与 $C$ 不发生；

(3)恰有一个事件发生；

(4)恰有两个事件发生；

(5)三个事件都发生；

(6)至少有一个事件发生；

(7) $A$, $B$, $C$ 都不发生；

(8) $A$, $B$, $C$ 不都发生；

(9) $A$, $B$, $C$ 不多于一个发生；

(10) $A$, $B$, $C$ 不多于两个发生.

**解**　(1) $AB - C$ 或 $AB\overline{C}$

(2) $A - B - C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}$

(3) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

(4) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

(5) $ABC$

(6) $A \cup B \cup C$

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(8) $\overline{ABC}$

(9) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

(10) $\overline{ABC}$

**例 1.1.2**　掷一颗骰子,观察点数,令 $A$ 表示掷出奇数点,$B$ 表示掷出点数不超过 3,$C$ 表示掷出点数大于 2,$D$ 表示掷出 5 点,则

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$, $D = \{5\}$,

于是 $A \cup B=\{1, 2, 3, 5\}$,$(A \cup B)\ C=\{3, 5\}$,$B \cup C=S$,$AB=\{1, 3\}$,$BD=\varnothing$,$\bar{A}=\{2, 4, 6\}$,$\bar{A}C=\{4, 6\}$,$A-B=\{5\}$,$B-A=\{2\}$.

**例 1.1.3** 某人连续购买体育彩票,令事件 $A$、$B$、$C$ 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖,试用 $A$、$B$、$C$ 及其运算表示下列事件:(1)第三次未中奖;(2)第三次才中奖;(3)恰有一次中奖;(4)至少有一次中奖;(5)不止一次中奖;(6)至多中奖两次.

**解** (1) $\bar{C}$ (2) $\bar{A}\bar{B}C$ (3) $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$ (4) $A \cup B \cup C$

(5) $AB \cup AC \cup BC$ 或 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$ (6) $\overline{ABC}$

**例 1.1.4** 设有 100 件产品,其中 5 件产品为次品,从中任取 50 件产品. 记 $A$={50 件产品中至少有一件次品},则 $\bar{A}$ ={50 件产品中没有次品}={50 件产品全是正品}.

由此说明,若事件 $A$ 比较复杂,往往它的对立事件比较简单,因此我们在求复杂事件的概率时,往往可以转化为求它的对立事件的概率.

# §1.2 频率与概率

## 1.2.1 频率

对于随机试验中的随机事件(除必然事件和不可能事件)来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在某次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如,为了确定防洪坝的高度,就要了解河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度的可能性大小. 我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此,首先引入频率这一概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小数——概率.

**定义 1.2.1** 在相同条件下,进行了 $n$ 次试验,在这 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的次数 $n_A$ 称为事件 $A$ 的频数,比值 $n_A/n$ 称为事件 $A$ 发生的**频率**,并记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(\mathrm{A})=\frac{n_A}{n} \tag{1.2.1}$$

**例 1.2.1** 为验证频率的稳定性,历史上有许多统计学家做过掷硬币的试验,列出了几个掷硬币的结果.

**表 1-1**

| 试验者 | 抛掷次数 $n$ | 出现正面的次数 $m$ | 出现正面的频率 $m/n$ |
|---|---|---|---|
| 德·摩根 | 2048 | 1061 | 0.518 |
| 蒲 丰 | 4040 | 2048 | 0.506 9 |

续表

| 试验者 | 抛掷次数 $n$ | 出现正面的次数 $m$ | 出现正面的频率 $m/n$ |
|---|---|---|---|
| 皮尔逊 | 12 000 | 6019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |
| 罗曼诺夫斯基 | 80 640 | 40 941 | 0.507 7 |

从表①中可以看出，当试验次数很大时，出现"正面向上"的频率稳定在 0.5 这个数值附近.

**例 1.2.2** 在众多英文小说中，从表面上看，小说内容，作家个性，使 26 个英文字符的出现是随机的，但是，人们通过大量的实证研究，发现 26 个英文字符，在众多小说中，出现的频率是稳定的.

**表 1-2**

| 字母 | 空格 | E | T | O | A | N | I | R | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 频率 | 0.2 | 0.105 | 0.072 | 0.065 4 | 0.063 | 0.059 | 0.055 | 0.054 | 0.052 |
| 字母 | H | D | L | C | F | U | M | P | Y |
| 频率 | 0.047 | 0.035 | 0.029 | 0.023 | 0.022 5 | 0.022 5 | 0.021 | 0.017 5 | 0.012 |
| 字母 | W | G | B | V | K | X | J | Q | Z |
| 频率 | 0.012 | 0.011 | 0.010 5 | 0.008 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |

数据引自 L. Brillouin, *Science and Information Theory*, New York, 1956.

类似的例子可以举出很多，这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性——频率的稳定性，因为它是通过大量统计显示出来的，所以称为统计规律性.

从上面例子可以看出，频率具有如下特点：

(1)频率的大小能体现事件发生可能性的大小，频率大则发生的可能性也应该大；反之，频率小则发生的可能性也小. 事实上，在很多实际问题中我们就是用频率来衡量事件发生可能性大小的，比如体育比赛中，体育评论员常用"投篮命中率""射门命中率"等来表示运动员在某一时段的水平.

(2)频率有一定的随机波动性. 比如在表 1-1 中我们看到，当抛投硬币的次数不同时得到的频率常常会不一样，事实上，有时甚至投同样多次硬币由于抛投的时间地点不同可能也会得到不同的频率，这样就使频率缺乏科学度量单位所具有的客观性.

① 德・摩根(De. Morgan, 1806—1871)英国逻辑学家；蒲丰(Buffon, 1707—1788)英国博物学家；皮尔逊(Pearson, 1857—1936)英国统计学家，现代统计学的创始人之一；罗曼诺夫斯基(Romanovski, 1879—1954)乌兹别克统计学家.

(3)但是,另一方面,当试验的次数逐渐增多时,频率又具有稳定性.从表1-1中我们可以看出,随着 $n$ 的增大,频率稳定在0.5左右.

经过归纳总结,可以得到频率的如下三条最基本的性质,即

(1)**非负性** 任意事件 $A$ 的频率非负:$f_n(A) \geqslant 0$

(2)**规范性** 必然事件 $S$ 的频率为1:$f_n(S) = 1$

(3)**有限可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是一组两两不相容的事件,则有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

上面的三条性质可直接由频率的定义来证明,请读者完成该证明.

虽然频率反映了概率的特征,但用它来作概率的定义显然是不合适的,因为在实际问题中不可能做大量的试验.概率论的历史上,有过各种各样的概率定义,如古典定义、几何定义等,但都局限于某一类随机现象.那么如何给出适合于一切随机现象的概率定义呢?1933年,苏联数学家柯尔莫哥洛夫首次提出了概率的公理化定义.这一公理化体系迅速得到公认,是概率论发展史上的一个里程碑.

### 1.2.2 概率的定义及其性质

**定义1.2.2** 设 $E$ 为随机试验,$S$ 为相应的样本空间,对于 $E$ 的每一个事件 $A$ 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 $A$ 的**概率**,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1)**非负性** 对于每一个事件 $A$, $P(A) \geqslant 0$ (1.2.2)

(2)**规范性** $P(S) = 1$ (1.2.3)

(3)**可列可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一组两两不相容的事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.2.4}$$

由概率的定义,我们可以得到概率的下列重要性质.

**性质1** $P(\varnothing) = 0$

**证** 因 $S = S \cup \varnothing \cup \cdots$,由概率的可列可加性(1.2.4),有

$$P(S) = P(S) + P(\varnothing) + \cdots$$

由规范性(1.2.3),有

$$1 = 1 + P(\varnothing) + \cdots$$

再由概率的非负性(1.2.2),可得 $P(\varnothing) = 0$.

**性质2(有限可加性)** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 是一组两两不相容的事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

**证** $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$,

利用可列可加性及性质 1,即可推得结论.

**性质 3(减法公式)** 对于任意两个事件 $A$, $B$, 有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB) \tag{1.2.5}$$

**证** 注意到 $B=(B-A)\cup AB$, 而 $B-A$ 与 $AB$ 互斥,由可加性得

$P(B)=P(B-A)+P(AB)$,

移项即得结论.

**推论 1** 若 $A\subset B$, 则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

**推论 2** 若 $A\subset B$, 则有 $P(A)\leqslant P(B)$.

**证** 由 $P(B)-P(A)=P(B-A)\geqslant 0$, 可得结论.

**推论 3** 对任意事件 $A$,有 $P(A)\leqslant 1$.

**证** 因为 $A\subset S$, 由推论 2,有 $P(A)\leqslant P(S)=1$.

**注:**以下公式是常用的, $P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

**性质 4** $P(\bar{A})=1-P(A)$ (1.2.6)

**证** 由于 $\bar{A}\cup A=S$, $A\bar{A}=\varnothing$, 再由概率的规范性和有限可加性,得

$$1=P(S)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),$$

移项后即证.

**性质 5(加法公式)** 对于任意两个事件 $A$, $B$, 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.7}$$

**证** 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$, $A(B-AB)=\varnothing$,

由可加性,有 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB),$$

由性质 3,有 $$P(B-AB)=P(B)-P(AB),$$

所以 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

**推论** 对于任意三个事件 $A$, $B$, $C$, 有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC) \tag{1.2.8}$$

**证** 
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A\cup(B\cup C))\\&=P(A)+P(B\cup C)-P(A(B\cup C))\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-[P(AB)+P(AC)-P(ABC)]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

该性质可推广到多个事件的和:

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned}$$

上式可由归纳法证得.

**例 1.2.3** 上城区的居民中有 20%订阅都市快报，16%订阅钱江晚报，8%两报都订阅. 在这些居民中随机选一人，问此人至少订阅都市快报与钱江晚报两报之一的概率为多少？

**解** 记 $A$=“订阅都市快报”，$B$=“订阅钱江晚报”，则问题的解是

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.16 - 0.08 = 0.28.$$

**例 1.2.4** 设 $P(A) = \frac{1}{3}$，$P(B) = \frac{1}{2}$，(1)若 $AB = \varnothing$，求 $P(B\overline{A})$；(2)若 $A \subset B$，求 $P(B\overline{A})$；(3)若 $P(AB) = \frac{1}{8}$，求 $P(B\overline{A})$.

**解** (1)因为 $AB = \varnothing$，$P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = P(B) = \frac{1}{2}$.

(2)因为 $A \subset B$，所以 $AB = A$，故

$$P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(3) $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

**例 1.2.5** 已知 $P(A) = 0.5$，$P(\overline{A}B) = 0.2$，$P(B) = 0.4$，求：(1) $P(AB)$；(2) $P(A \cup B)$；(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

**解** (1) $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$，所以

$P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$；

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$；

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$.

**例 1.2.6** 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = 0$，$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{9}$，求事件 $A$、$B$、$C$ 全不发生的概率.

**解** $ABC \subseteq AB$，$P(AB) = 0$，所以 $P(ABC) = 0$，

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2}{9} = \frac{19}{36}, \end{aligned}$$

所以 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \frac{17}{36}$.

## §1.3 古典概型和几何概型

### 1.3.1 古典概型

概率的公理化定义给出了概率严格的数学定义，但在处理实际问题时，按照此定义