编号

线性代数作业集

B

西北工业大学应用数学系线性代数教学组　编

Xianxing Daishu Zuoyeji

姓名______________

班级______________

学号______________

西北工业大学出版社

线性代数作业集

（B）

西北工业大学应用数学系线性代数教学组　编

西北工业大学出版社

第二章　矩阵及其运算

1. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \end{cases},\quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 + 3z_3 \\ y_2 = -z_1 - 2z_2 + 4z_3 \\ y_3 = 5z_2 + z_3 \end{cases}$$

（1）　分别写出它们对应的矩阵；

（2）　求从 z_1 ，z_2 ，z_3 到 x_1 ，x_2 ，x_3 的线性变换.

2. 计算下列乘积：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

（2）$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1 \quad b_2 \quad b_3)$

（4） $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

（5） $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$（其中 k 是正整数）.

4. 求满足 $\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的数 a 及二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$.

5. 求下列方阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$，$(a^2+b^2=2)$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

（5）$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

（6）已知 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} .

6. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$,求 $(A+2E)^{-1}(A^2-3E)$.

7. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad -1 \quad 3)$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. 利用逆矩阵解线性方程组$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=1\\3x_1+x_2+5x_3=0\\3x_1+2x_2+3x_3=1\end{cases}$.

9. 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ ，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&4&3\\0&0&1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&1&0\\1&2&2&4\end{pmatrix}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$（$k$ 为某一正整数），证明 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则下列结论中______正确；试证明你的结论.

(a) $(\boldsymbol{A}^*)^*=(\det\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{A}$　(b) $(\boldsymbol{A}^*)^*=(\det\boldsymbol{A})^{n+1}\boldsymbol{A}$

(c) $(\boldsymbol{A}^*)^*=(\det\boldsymbol{A})^{n-2}\boldsymbol{A}$　(d) $(\boldsymbol{A}^*)^*=(\det\boldsymbol{A})^{n+2}\boldsymbol{A}$

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实方阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ ，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵. 当 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 可逆时，试证 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

14. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$

15. 设 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，且 $a_0\lambda_i^n+a_1\lambda_i^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda_i+a_n=0\ (i=1,2)$，试求 $a_0\boldsymbol{\Lambda}^n+a_1\boldsymbol{\Lambda}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{\Lambda}+a_n\boldsymbol{E}$.

16. 设 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 及 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$

17. 已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足条件：(1) $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；(2) $a_{11}\neq 0$. 计算行列式 $\det\boldsymbol{A}$.

18. 是非题(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵)

(1)　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.　（　）

(2)　若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$,且 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 都是 $n\times m$ 矩阵.　（　）

(3)　若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.　（　）

(4)　若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$.　（　）

(5)　若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.　（　）

(6)　若 $\det\boldsymbol{A}=0$,则 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.　（　）

(7)　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆.　（　）

(8)　若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆且 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$.　（　）

19. 选择、填空题

(1)　已知 $\boldsymbol{B}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{C}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}^n=$ __________.

(2)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\det\boldsymbol{A}=2$,则 $\det\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=$ __________.

(3)　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,则____成立.

(a)　$\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{BA})$　　(b)　$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{A}+\det\boldsymbol{B}$

(c)　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　　(d)　$(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$

(4)　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都可逆,则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=$ ______.

(a)　$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{C}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　(b)　$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$

(c)　$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AC}^{-1}\end{pmatrix}$　　(d)　$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AC}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(5)　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ______________,$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=$ ______________.

(6)　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,则必有______.

(a) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　(b) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　　(c) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　　(d) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

第四章　向量组的线性相关性（一）

1. 已知 $\alpha_1 = (5, -1, 3, 2, 4)$，$3\alpha_1 - 4\alpha_2 = (3, 5, -7, -2, 8)$，试求 $2\alpha_1 - 3\alpha_2$.

2. 将向量 $\alpha = (-1, -9, 2, 6)$ 表示成 $\alpha_1 = (1, -2, 0, 3)$，$\alpha_2 = (2, 3, 0, -1)$，$\alpha_3 = (2, -1, 2, 1)$ 的线性组合.

3. 判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\alpha_1 = (1, 2, -1, 4)$，$\alpha_2 = (9, 100, 10, 4)$，$\alpha_3 = (-2, -4, 2, -8)$

（2）$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

（3） $\gamma_1=(3,1,0,2)$，$\gamma_2=(1,-1,2,-1)$，$\gamma_3=(1,3,-4,1)$．

4. 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，试判断下列向量组的线性相关性：

（1） $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$．

（2） $\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_2-\alpha_3$，$2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$．

5. k 取何值时，向量组 $\alpha_1=(1,k,0)$，$\alpha_2=(0,1,k)$，$\alpha_3=(1,2,1)$ 线性无关.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维向量组，令 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$，证明：

（1）　当 m 为偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关.

（2）　当 m 为奇数时，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.