随机过程及应用

Stochastic Processes With Its Applications

徐全智　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013052408

0211.6
60

随机过程及应用

SUIJI GUOCHENG JI YINGYONG

Stochastic Processes With Its Applications

徐全智　主编

北京航空航天大学
藏书
图书馆

0211.6
60

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

北航　C1656219

内容提要

本书是在作者多年讲授随机过程课程的基础上，按照注重数学理论，重视工程背景及应用、强调分析方法的原则编写而成的。全书共分五章，主要内容包括随机过程基本概念、几种重要随机过程、均方微积分、平稳过程和马尔可夫过程，书后附阅读本书所需预备知识介绍。

本书可作为工科及其他非数学类专业高年级本科生和研究生随机过程课程的教材，也可供相关工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程及应用/徐全智主编．—北京：高等教育出版社，2013.6

ISBN 978－7－04－037348－6

Ⅰ.①随…　Ⅱ.①徐…　Ⅲ.①随机过程－研究生－教材　Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 096973 号

策划编辑　兰莹莹　　责任编辑　张晓丽　　封面设计　李卫青　　版式设计　童　丹

插图绘制　郝　林　　责任校对　张小镝　　责任印制　赵义民

出版发行　高等教育出版社

社　　址　北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码　100120

印　　刷　北京印刷一厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　16.25

字　　数　290 千字

购书热线　010-58581118

咨询电话　400-810-0598

网　　址　http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

网上订购　http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn

版　　次　2013 年 6 月第 1 版

印　　次　2013 年 6 月第 1 次印刷

定　　价　28.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物 料 号　37348－00

前　言

本书是以高等学校非数学类专业高年级本科生与研究生随机过程课程教学大纲为依据，广泛参考国内外优秀教材，并结合编者多年讲授该课程的教学经验与体会编写而成。

本书突出随机过程的基本理论、基本思想和基本方法，注重数学理论的系统性，着重揭示概念与理论的来源与背景，给出典型随机模型的建立过程，展示从实际随机问题提取数学结构并加以描述及处理的过程。

本书叙述清晰，详略得当，难易适度，具有较强适用性。书中配有较多的例题，部分例题与电子工程、通信、管理等专业紧密结合，使学生掌握与本专业方向相关的随机分析思想与方法。成稿后又经两次试用，进行修改与完善，使其便于教师教与学生学。

本书是应用随机过程的入门篇，仅以初等概率论及微积分、线性代数作为理论基础，可作为高年级本科生及研究生的教材，也可作为相关工程技术人员的参考书。

本书编写过程中得到了电子科技大学数学科学学院、研究生院和课程组全体老师的支持与帮助，在此，一并向曾参与本书编写工作的全体教师及试用期间提出宝贵意见的同学们表示衷心的感谢。

本书由徐全智主编并负责统稿，龚丽莎编写第一章及第五章，王志勇编写第二章及第三章，覃思义编写第四章。由于编者水平所限，缺点和不当之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

编　者

2012 年 10 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010) 58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010) 82086060
反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn
通信地址　北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

第一章　随机过程基本概念

1.1　随机过程的定义及分布

1.1.1　随机过程的直观背景

在概率论中，研究随机现象是指在特定时间点上对研究对象进行观察及分析，因此可用一个随机变量或有限维随机向量来描述随机的数量现象，而不考虑时间变量或其他变量．在自然科学、社会科学和工程技术的各类问题中，人们更关注具有随机性的研究对象随时间推移的演变过程以及演变规律．

例 1.1.1　图 1.1 是记录的地球 1960—2008 年的气温数据，需要探究在气温周期变化规律下，随着时间的推移，地球是否有变暖的趋势．

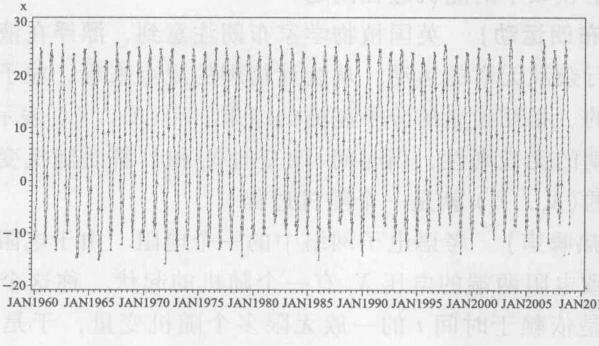

图 1.1　地球 1960—2008 年各月气温数据图

例 1.1.2　汶川大地震后地震局记录了各类数据，如图 1.2 所示：

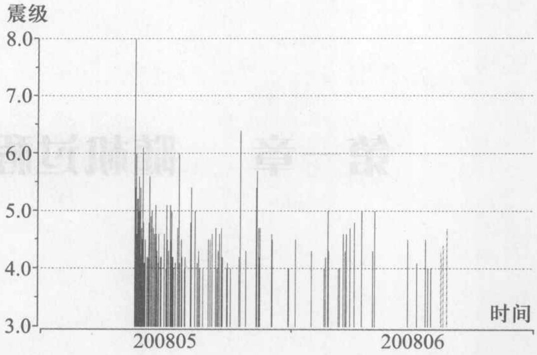

图 1.2　余震序列图

2008.5.12(2：28) ~ 2008.7.8(8：00)

人们希望从中得到一些有用的信息，对地震现象有更深刻的了解，降低灾害程度.

地球从 1960 年到 2008 年的各月气温都是随机变量，大地震后余震的震级、地点等也是一族随机变量. 这样无限多个的一族随时间或地点变化的随机变量，有自身的统计规律，而且变量间有着内在的相互关联关系. 直观地称这一族随机变量为随机过程，随机过程理论即研究和描述随机现象随时间演变的统计规律，揭示随机过程的整体或局部统计规律性.

随机过程理论产生于 20 世纪的初期，起源于统计物理学领域，由于物理学、生物学、通信与控制、管理科学等方面的需要而逐步发展起来. 随机过程理论已成为近代数学的重要组成部分，应用广泛，实际工程背景强. 以下例子简要说明在各个领域中的随机过程问题.

例 1.1.3(布朗运动)　英国植物学家布朗注意到，漂浮在液体面上的微小粒子，不断进行杂乱无章的运动. 从统计物理的观点来看，粒子的这种运动是由于大量随机的、相互独立的分子碰撞的结果. 用(X_t, Y_t)表示 t 时刻粒子的位置，由于运动的无规则性，当时间 t 改变时 X_t 和 Y_t 都是随机变量，于是描述粒子运动位置的(X_t, Y_t)就是一个随机过程.

例 1.1.4(热噪声)　考虑电子网络中的一个电阻. 由于电阻中自由电子的随机运动，导致电阻两端的电压 X_t 有一个随机的起伏. 称这个起伏的电压为热噪声，它也是依赖于时间 t 的一族无限多个随机变量，于是它是一个随机过程.

例 1.1.5(雷达信号干扰)　一个雷达站在 t 时刻发出一个信号 S_t，遇到障碍物后又反射回来，接受到的发射信号为 $A\cdot S_{t-\tau}$，其中 A 反映信号经发射后的能量损失，τ 则反映了雷达站与障碍物间距离. 由于各种随机干扰的存在，雷

达实际接收到的信号是

$$X_t = A \cdot S_{t-\tau} + N_t,\ t \geqslant 0,$$

其中 N_t 反映了各种随机干扰的效应，它是一个随机过程. 抗干扰的重点是对反映干扰的这一随机过程 N_t 特性的研究.

例 1.1.6(存储控制) 对某种货物的存储控制需解决两个问题：何时开始订货；每次订货的量以多大为宜. 这两个问题与该货物的销售速度以及从订货到接受货物所需时间等变量有关，而由于各种复杂因素的影响，这些变量显然都不是确定的. 用 X_t 表示在时间段 $[0, t]$ 的销售量，Y_t 表示 t 时刻发出订货到接收到货物的时间，则它们都是随机过程. 由此可见，对随机过程的研究将为进行最优存储控制提供依据.

1.1.2 概率空间与随机向量

为引进随机过程，首先回顾下概率论中的几个基本概念和部分内容.

将一个随机试验的基本事件的对应元素全体所组成的集合称为该试验的**样本空间**，记为 Ω，Ω 中的元素称为**样本点**.

例如考察地震震源时，将样本点取为 (x, y, z)，其中 x 代表震源的经度，y 表示纬度，z 表示深度，则样本空间是三维实数空间中的某一区域.

进行两个试验，第一个试验 E_1 是抛掷一个骰子，其样本空间为 $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，1，2，…，6 代表抛掷骰子的点数. 第二个试验 E_2 是投掷一枚硬币，其样本空间是 $\Omega_2 = \{T, H\}$，其中 H 和 T 分别代表硬币的正反面.

现将两个试验合并为一个试验，可记为 $E = E_1 \times E_2$，称为联合实验，则其样本空间是 Ω_1 与 Ω_2 的**笛卡儿积集**

$$\begin{aligned}\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 &= \{(\omega_1, \omega_2): \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\} \\ &= \{(1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H), \\ &\quad (1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)\}.\end{aligned}$$

假设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若将 E 重复进行 n 次的试验记为 $E \times E \times \cdots \times E = E^n$，其样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega_n &= \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n): \omega_i \in \Omega,\ i = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega = \Omega^n,\end{aligned}$$

称为 Ω 的 n 维乘积空间.

定义 1.1.1 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集组成的集族，满足

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A_i \in \mathscr{F}$, $(i=1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

称 $\mathscr{F}$ 为 σ – 代数或随机事件域，$\mathscr{F}$ 中的任意元素称为随机事件.

即 σ – 代数 $\mathscr{F}$ 作为集合对余运算、可列并运算封闭，可以证明 $\mathscr{F}$ 对可列交运算、有限并运算、有限交运算、差运算等均封闭，而且 $\varnothing \in \mathscr{F}$.

例如，随机试验 E 的样本空间为 Ω，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的全体子集组成的集族（含 Ω 和 $\varnothing$），可证明 $\mathscr{F}$ 是一个 σ – 代数.

又如，设 $A \subset \Omega$，令 $\mathscr{F} = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$，则 $\mathscr{F}$ 也是一个 σ – 代数.

样本空间 Ω 和 σ – 代数 $\mathscr{F}$ 的二元体 $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为**可测空间**.

定义 1.1.2　设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是一可测空间，对定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数 $P(A)$，$A \in \mathscr{F}$，若满足

(1) 非负性：对任意 $A \in \mathscr{F}$，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3) 完全可加性：$\forall A_i \in \mathscr{F}$，$i = 1, 2, \cdots$，$A_i \cap A_j = \varnothing$，$i \neq j$，等式

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

成立.

则称 P 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率（测度），$P(A)$ 是事件 A 的概率. 称三元体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为**概率空间**.

例 1.1.7　抛一枚均匀硬币，观察正面 (H)，反面 (T) 出现情况，此试验的样本空间为 $\Omega = \{T, H\}$，记 $A = \{H\}$，$\bar{A} = \{T\}$，$\mathscr{F} = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$ 是一个 σ – 代数，在 $\mathscr{F}$ 上定义概率 $P(B) = \dfrac{k}{2}$，其中 $B \in \mathscr{F}$，k 为事件 B 包含的样本点数. 显然构造的 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间.

例 1.1.8　为研究某路口到达的车辆的统计分布规律，对此试验构造概率空间.

解　若到达路口的车辆数为 m，可设基本事件为 $\{m\}$，则样本空间为 $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$，令 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的一切子集组成的集族，$\mathscr{F}$ 是一个 σ – 代数.

定义 $P(\varnothing) = 0$，并对 $A \in \mathscr{F}$　令

$$P(A) = \sum_{k \in A} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0,$$

有

$$(1) P(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1;$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(2) 因为 $\lambda > 0$，对 $\forall k$ 有 $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \geqslant 0$，从而 $0 \leqslant P(A) = \sum\limits_{k\in A} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \leqslant \sum\limits_{k\in\Omega} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = 1$；

(3) $\forall A_i \in \mathscr{F}$，$i = 1, 2, \cdots$，$A_i \cap A_j = \varnothing$，$i \neq j$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k\in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k\in A_i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

即集函数 P 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率（测度），从而 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间.

此例实际上是假定到达路口的车辆数 X 服从参数为 λ 的泊松分布.

定义 1.1.3　设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，$X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，若对于任意实数 $x \in \mathbf{R}$，有 $\{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，则称 $X(\omega)$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的**随机变量**.

其中，条件 $\{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，保证了 $P\{X \leqslant x\}$ 总有意义. 通常 $\mathscr{F}$ 是包含全体 $\{X \leqslant x\}$ 的最小代数，而且有

$$\{X > x\} = \Omega - \{X \leqslant x\} \in \mathscr{F},$$

$$\{X = x\} = \{X \leqslant x\} - \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{X \leqslant x - \frac{1}{k}\right\} \in \mathscr{F},$$

$$\{X < x\} = \{X \leqslant x\} - \{X = x\} \in \mathscr{F}.$$

以及 $\{X \geqslant x\}$，$\{x_1 < X < x_2\}$，$\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$ 等都属于 $\mathscr{F}$，从而均可以求其概率测度.

定义 1.1.4　设 $X(\omega)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量，x 是任意实数，称函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \tag{1.1.1}$$

为随机变量 X 的**分布函数**，也记为 $F_X(x)$.

若 X 为离散型随机变量，则其分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P\{X = x_i\}; \tag{1.1.2}$$

若 X 为连续型随机变量，其概率密度是 $f(x)$，则分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{1.1.3}$$

定理 1.1.1　随机变量的分布函数具有以下性质：

(1) $F(x)$ 是有界函数，有 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$；

(2) $F(x)$ 是单调不减函数，即对任意的 $x_1 < x_2$，有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$；

(3) $F(x)$ 是右连续函数，即对任意的 $x \in \mathbf{R}$，$F(x + 0) = F(x)$.

此定理的逆定理也成立，即若函数 $F(x)$，$x \in \mathbf{R}$ 满足性质(1) ~ (3)，则一定存在一个概率空间上的随机变量 X 以 $F(x)$ 为分布函数.

定义 1.1.5　如果 X 和 Y 是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的两个随机变量，称(X, Y) 为二维随机变量(向量).

因 X 和 Y 都是定义在 Ω 上的随机变量，故对任意 $x \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 有

$$\{X \leqslant x\} \in \mathscr{F} \text{且} \{Y \leqslant y\} \in \mathscr{F},$$

则其分布函数分别为

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\},\ F_Y(x) = P\{Y \leqslant y\},$$

并称它们分别为二维随机变量$(X\quad Y)$ 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数. 进一步根据 σ - 代数的性质，$\mathscr{F}$对有限交运算封闭，故对任意$(x, y) \in \mathbf{R}^2$，有

$$\{\omega: X(\omega) \leqslant x,\ Y(\omega) \leqslant y\} = \{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega: Y(\omega) \leqslant y\} \in \mathscr{F}.$$

定义 1.1.6　对任意实数对$(x, y) \in \mathbf{R}^2$，称二元函数

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x,\ Y \leqslant y\}$$

为随机变量(X, Y) 的**联合分布函数**.

定理 1.1.2　设 $F(x, y)$ 是二维随机变量(X, Y) 的联合分布函数，则

(1) $F(x, y)$ 分别对 x, y 单调不降，即当 $x_1 < x_2$，对任意的 $y \in \mathbf{R}$ 均有 $F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y)$，当 $y_1 < y_2$，对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 均有 $F(x, y_1) \leqslant F(x, y_2)$；

(2) $F(x, y)$ 分别关于 x 或 y 右连续，即有

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y),\ \lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0);$$

(3) $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$，且 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$，$\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$，$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$；

(4) 对任意 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geqslant 0.$$

类似于一维随机变量的情形，定理 1.1.2 的逆定理也成立. 如果二元函数 $F(x, y)$ 满足定理 1.1.2 的 4 条性质，则在某一特定概率空间上，必存在一个二维随机变量(X, Y) 以 $F(x, y)$ 为联合分布函数.

可将二维随机变量的概念及理论推广到任意有限维随机变量.

定义 1.1.7　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 n 个随机变量，则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机变量(向量).

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1,\ X_2 \leqslant x_2,\ \cdots,\ X_n \leqslant x_n\},$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

n 维联合分布函数满足以下性质：

(1) 对每一变量 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 非负、不降、且右连续；

(2) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = 0$，$(i=1, 2, \cdots, n)$ $\lim\limits_{\substack{x_i \to +\infty \\ i=1,2,\cdots,n}} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1$；

(3) 若 $x_i \leqslant y_i (i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$F(y_1, y_2, \cdots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} F(y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \cdots, y_n)$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F(y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \cdots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \cdots y_n)$$

$$- \cdots + (-1)^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0.$$

类似于二维联合分布函数，可以由 n 维联合分布函数确定 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的任意子向量的联合分布函数. 如

一维边缘分布函数 $F_{X_j}(x_j) = \lim\limits_{\substack{x_i \to +\infty \\ i \neq j}} F(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$，$j=1, 2, \cdots, n$；

二维边缘分布函数 $F_{X_jX_k}(x_j, x_k) = \lim\limits_{\substack{x_i \to +\infty \\ i \neq j,k}} F(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_k, \cdots, x_n)$，$j \neq k$，$j, k = 1, 2, \cdots, n$.

1.1.3 随机过程定义

如前所述，实际问题中不仅要求研究一个或有限多个随机变量，常常需要研究由无限多个随机变量构成的随机过程.

下面给出随机过程的定义：

定义 1.1.8 设给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 和指标集 T，若对每个 $t \in T$，有定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量 $X_t(\omega)$，$\omega \in \Omega$ 与之对应. 称依赖于 t 的随机变量族 X_t 为**随机过程**(随机函数)，记为 $\{X_t(\omega), t \in T\}$，或记为 $\{X_t, t \in T\}$ 及 $\{X(t), t \in T\}$. 其中指标 t 称为参数或时间，指标集 T 称为参数集.

当参数集 $T=(1, 2, \cdots, n)$，则 $\{X_t, t \in T\} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$，即 n 维随机向量；

当参数集 $T=(1, 2, \cdots, n, \cdots)$，则 $\{X_t, t \in T\} = (X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots)$，称为时间序列.

参数 t 不一定是时间变量或一维实数，如海平面上波浪的浪高随地点和时间的改变而变化，因此为描述一个区域内浪高 H 的变化，需要用到三维参数

(x, y, t) 构成的参数集

$$T=\{(x, y, t): a<x<b, c<y<d, t \geqslant 0\}.$$

参数集是多维指标集的随机过程称为**随机场**或**多维指标集随机过程**.

直观地可以将随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 设想为随机质点 M 的运动变化过程，以 X_t 代表质点 M 在时刻 t 时所处的位置，于是随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 描述了质点 M 随时间推移所作的随机运动变化过程．故可称事件"$X_t=x$"为在时刻 t 时随机过程 X_t 处于状态 x，将随机过程 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 可能取值的全体构成的集合(所有状态构成的集合)称为**状态空间**，记为 E，即

$$E=\{x: X_t(\omega)=x, t \in T\}.$$

随机过程在时刻 t 的状态不完全由 t 来确定，它还会受到随机因素 ω 的影响.

例 1.1.9(质点布朗运动)　设在直线上的质点连续地经受无穷次随机碰撞，每次碰撞后各以 1/2 的概率向左或向右移动.

若记事件 $\{\omega_1^{(t)}\}=\{$第 t 次碰撞后向左移动$\}$，$\{\omega_2^{(t)}\}=\{$第 t 次碰撞后向右移动$\}$，令

$$X_t(\omega)=\begin{cases}-1, & \omega=\omega_1^{(t)}, \\ 1, & \omega=\omega_2^{(t)},\end{cases} \quad t=1, 2, \cdots,$$

随机过程 $\{X_t(\omega): t=1, 2, \cdots\}$ 描述了随机质点的运动．此过程的参数集为 $T=\{1, 2, \cdots\}$，状态空间则为 $E=\{-1, 1\}$.

按状态空间和参数集的不同情况，可将随机过程分为四类，列入表 1.1 中.

表 1.1　过 程 分 类

		参数集 T	
		离散	连续
状态空间 E	离散	(离散参数)链	(连续参数)链
	非离散	随机序列	随机过程

定义指标集 T 与样本空间 Ω 的积集为

$$T \times \Omega=\{(t, \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}.$$

随机过程 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 是定义在笛卡儿积集 $T \times \Omega$ 上的二元函数．由随机过程的定义可知，一方面当固定 $t \in T$ 时，$X_t(\omega)$ 是一个定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量．另一方面，当固定 $\omega_0 \in \Omega$(即对于特定的试验结果)，作为 t 的函数 $x_t(\omega_0)$ 是一个定义在指标集 T 上的普通函数，可以是实函数或复函数，也可以是实向量或复向量．故常将随机过程 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 视为参数 t

和样本点 ω 的二元函数.

定义 1.1.9 对每一固定 $\omega \in \Omega$，称 $x_t(\omega)$ 是随机过程 $\{X_t(\omega),\ t \in T\}$ 相应于 ω 的**样本函数**(或轨道，路径，现实).

显然，一条样本函数可看成是在特定条件下对随机过程的一次观察结果.

例 1.1.10 随机相位正弦波

$$X_t(\omega) = \alpha\cos(\beta t + \Theta),\ t \in \mathbf{R},$$

其中 α 和 β 是正常数，Θ 是在 $[0,\ 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量.

当固定 t 时，$X_t(\omega)$ 是一个随机变量，当 t 变化时，$\{X_t(\omega),\ t \in T\}$ 是一族随机变量，构成一个随机过程，且其样本空间是 $\Omega = \{\omega:\ \omega = \theta \in [0,\ 2\pi]\}$.

对固定 θ 值(如图 1.3)，则得到初始相位角为 θ 的三角函数波

$$X_t(\omega) = \alpha\cos(\beta t + \theta),\ t \in \mathbf{R}.$$

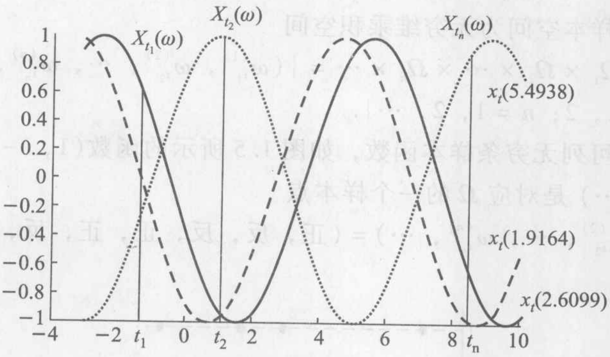

图 1.3 $\alpha = 1$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$，当 $\theta_1 = 5.4938$，$\theta_2 = 1.9164$，$\theta_3 = 2.6099$ 时的样本函数

例 1.1.11 随机开关系统如图 1.4 所示

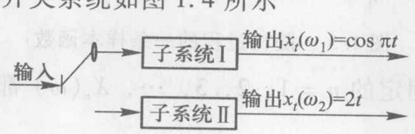

图 1.4 随机开关系统

系统开始运行时，随机开关以概率 p 接通子系统 Ⅰ，以概率 $1 - p$ 接通子系统 Ⅱ. 定义了如下随机过程：

$$X_t(\omega) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{接通子系统 Ⅰ}, \\ 2t, & \text{接通子系统 Ⅱ}, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

写出 $X_t(\omega)$ 的所有样本函数.

若用样本点 ω_1 表示接通子系统 Ⅰ，ω_2 表示接通子系统 Ⅱ，此随机过程仅

有两条样本函数为

$$x_t(\omega_1) = \cos \pi t,\ x_t(\omega_2) = 2t,\ t \geqslant 0.$$

例 1.1.12　假定独立重复抛掷一个均匀硬币，则根据例1.1.9中直线上的质点布朗运动，定义

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次出现正面}, \\ -1, & \text{第 } n \text{ 次出现反面}. \end{cases}$$

分析确定该随机过程的样本空间及样本函数.

解　将抛第 n 次硬币的试验记为 E_n，试验过程为无穷维积集

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \times \cdots,$$

记 $\{\omega_1^{(n)}\} = \{$第 n 次出现正面$\}$，$\{\omega_2^{(n)}\} = \{$第 n 次出现反面$\}$，则第 n 次试验对应的样本空间是

$$\Omega_n = \{\omega_1^{(n)},\ \omega_2^{(n)}\},\ n = 1,\ 2,\ \cdots,$$

该随机过程的样本空间为无穷维乘积空间

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \times \cdots = \{(\omega_{i_1}^{(1)},\ \omega_{i_2}^{(2)},\ \cdots,\ \omega_{i_n}^{(n)},\ \cdots):\ i_n = 1,\ 2;\ n = 1,\ 2,\ \cdots\}.$$

该过程有可列无穷条样本函数，如图 1.5 所示的函数(1，-1，-1，1，1，-1，1，…) 是对应 Ω 的一个样本点

$$(\omega_{i_1}^{(1)},\ \omega_{i_2}^{(2)},\ \cdots,\ \omega_{i_n}^{(n)},\ \cdots) = (\text{正，反，反，正，正，反，正，}\cdots)$$

的样本函数.

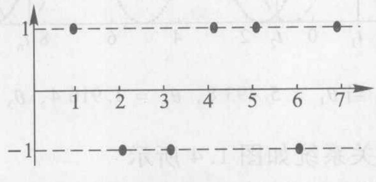

图 1.5　随机过程的一条样本函数

事实上，对所有固定的 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ X_n(\omega)$ 都是随机变量，其分布律均为

$X_n(\omega)$	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

1.1.4　随机过程的分布

对任意 $t \in T$，$X_t(\omega)$ 是一个定义在概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上随机变量，因此可以定义其分布函数.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com