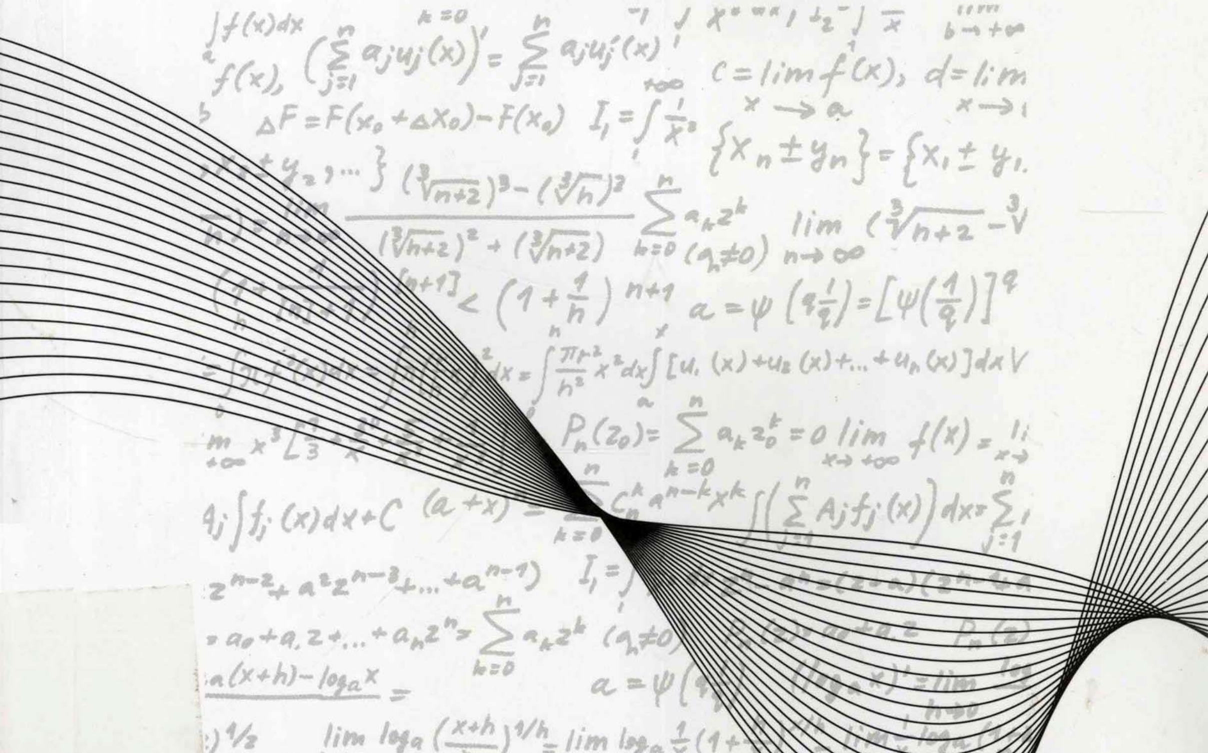
21 世 纪 大 学 数 学 精 品 教 材

高等数学

（下）

尹水仿　张　青　主编



科学出版社

21世纪大学数学精品教材

高等数学

（下）

尹水仿　张　青　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是依照教育部《高等职业技术学院高等数学教学基本要求》以及《专升本考试大纲》来编写的. 全书分为上、下两册. 上册为一元微积分部分;下册包括向量代数与空间解析几何、二元微积分、微分方程和差分方程、无穷级数等. 对基本内容的讲解做到了内容精炼、结构严谨、通俗易懂;例题的选取循序渐进;每章后都配备有适量的习题,书末配有习题答案与提示.

本书可以作为普通高等专科学校或高等职业技术学院理工类、经管类专业高等数学课程的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/尹水仿,张青主编. —北京:科学出版社,2012.8

21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-035413-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.①尹…　②张…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第200413号

责任编辑:吉正霞/责任校对:蔡　莹

责任印制:彭　超/封面设计:苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本:B5(720×1000)

2012年8月第 一 版　印张:12 1/4

2012年8月第一次印刷　字数:246 000

定价:22.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学》(下)编委会

主　编　尹水仿　张　青

副主编　蒋　君　王　芬　张艳红　胡　松

编　委　(按姓氏笔画排序)

丁咏梅　王　芬　尹水仿　李琳娜

余胜春　张　青　张平芳　张学英

张青桥　张艳红　胡　松　蒋　君

前　　言

为了适应新时代的要求,我们组织了一批具有丰富的教学经验、长期教授高等数学的教师,共同研讨了教育部《高等职业技术学院高等数学教学基本要求》以及《专升本考试大纲》,结合当前教学实际,编写了这套教材.

本书力求对高等数学基本内容的讲解做到内容精炼、结构严谨、通俗易懂.

为了使学生更好地掌握所学知识,提高应用能力,在例题的选取上循序渐进,并在每章后都配备适量的习题,包括计算、求解、证明和应用等几个方面,主要加强学生对基本概念、基本知识的理解和掌握,书末配有习题答案与提示.

为了扩大学生视野,使学生了解高等数学创立、发展的背景,提高学生对数学文化、数学思维的基本了解,在每章后对高等数学的创立、发展做出过伟大贡献的著名数学家做了简介,如高斯、牛顿、莱布尼茨等.

全书分为上、下两册.上册为一元微积分部分;下册包括向量代数与空间解析几何、二元微积分、微分方程和差分方程、无穷级数等内容.

上册由余胜春、张平芳任主编,张青桥、李琳娜、张学英、丁咏梅任副主编;下册由尹水仿、张青任主编,蒋君、王芬、张艳红、胡松任副主编.全书在编写过程中,由尹水仿、余胜春提出编写思路、编写提纲,由编写人员共同研究讨论确定编写方案.全书由尹水仿、余胜春统稿、定稿.

由于编者水平有限,本书存在的不妥之处,恳请广大读者和同行提出批评、建议,以使其逐步完善.

编　者

2012 年 5 月

目　录

第七章

向量代数与空间解析几何

平面解析几何是将平面中的点与坐标对应,将平面中的图形和函数对应,从而将两个研究对象通过"数"和"形"统一起来.

空间解析几何是对平面解析几何在空间中的进一步延伸,通过向量这一工具,建立空间直角坐标系,将空间的点用坐标表示,从而使空间几何图形的性质可以通过点坐标之间的代数关系进行讨论、研究.用代数方法来研究几何问题,在数学史上具有非常重要的地位.

本章首先介绍空间直角坐标系、向量及其线性运算,数量积与向量积,然后讨论空间的平面和空间直线方程,最后介绍常见的曲面和空间曲线方程.

第一节　空间直角坐标系、向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

为了将空间的点与有序数组对应起来,我们用类似于平面解析几何的方法,通过引进空间直角坐标系来实现这种对应,具体如下.

过空间中的一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点且一般都有相同的长度单位.这三条轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴.x 轴、y 轴、z 轴的正向通常符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 7-1-1 所示.这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$

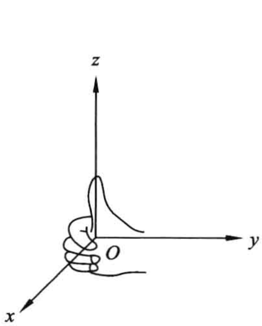


图 7-1-1

坐标系，定点 O 叫做坐标原点（或原点）.

三条坐标轴的任意两条可以确定一个平面，我们称之为坐标面. x 轴与 y 轴所确定的平面称为 xOy 面，y 轴与 z 轴和 z 轴与 x 轴所确定的平面，分别称为 yOz 面和在 zOx 面，习惯上将 xOy 面放在水平位置. 三个坐标面将整个空间分成 8 个部分，每一个部分叫做卦限，8 个卦限分别用 I，II，III，IV，V，VI，VII，VIII 表示，如图 7-1-2 所示.

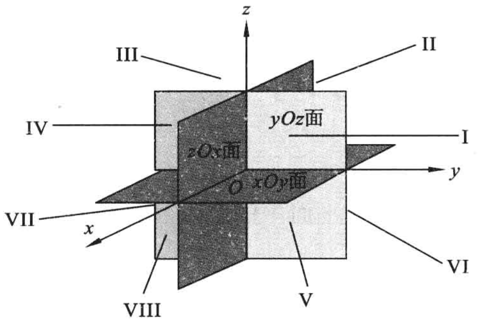


图 7-1-2

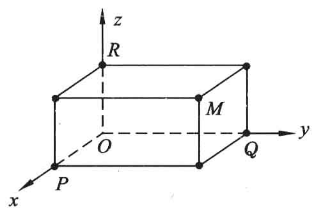


图 7-1-3

有了空间直角坐标系，就可以建立空间中的点和有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，交点分别为 P,Q,R. 如图 7-1-3 所示，设这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上坐标分别为 x，y，z，则点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (x,y,z). 反过来，给定了一个三元有序数组 (x,y,z)，则可以分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标依次为 x,y,z 的三个点 P,Q,R，然后过这三个点分别作一个与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，这三个平面有唯一的交点，设为 M，则一个三元有序数组 (x,y,z) 唯一地确定了空间一点 M. 这样，(x,y,z) 与 M 建立了一一对应的关系. 称这个三元有序数组 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，坐标为 (x,y,z) 的点 M，记为 $M(x,y,z)$.

显然，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴和 z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；xOy 坐标面、yOz 坐标面和 zOx 坐标面上的点的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

我们知道，一维数轴上两点 $M_1(x_1)$ 与 $M_2(x_2)$ 的距离为

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|.$$

二维平面内两点 $M_1(x_1,y_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2)$ 的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{7-1-1}$$

下面考虑三维空间中两点的距离，设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点. 过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这 6 个平面构成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 7-1-4 所示.

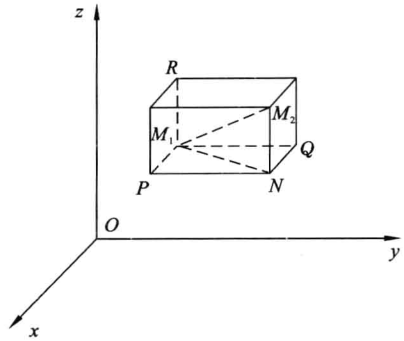


图 7-1-4

因此，空间两点间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{7-1-2}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 O 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1　求 z 轴上与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　设所求的 z 轴上的点为 $M(0,0,z)$，由已知条件可得

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2},$$

化简后，可得

$$z = \frac{14}{9}.$$

所以 M 点的坐标为 $\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

例 2　证明：以 $M_1(2,1,-1)$，$M_2(5,-1,0)$，$M_3(0,1,12)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　由两点间距离公式计算出

$$|M_1M_2|^2 = 14,$$
$$|M_1M_3|^2 = 173,$$
$$|M_2M_3|^2 = 173,$$

所以

$$|M_1M_3|=|M_2M_3|,$$

即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

二、向量的概念

在实际应用中,常会遇到两类量:一类是只有大小的量,如密度、质量等,这一类量称为数量(或标量);另一类量如位移、速度、力、力矩等,它们既要考虑数值大小,又要考虑其方向,我们称这类既有大小,又有方向的量为向量(或矢量).

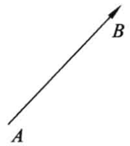


图 7-1-5

向量可以用有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,其方向表示向量的方向,如图 7-1-5 所示. 向量通常用黑体字母表示,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{F}$ 等,也可以用 $\overrightarrow{AB}$ 表示以 A 为始点、以 B 为终点的向量.

在实际问题中,有些向量与它的起点有关,例如,一个力与该力的作用点的位置有关,但也有些向量与其起点无关. 在数学上我们只关心其大小和方向,而不关心其起点位置,我们称这种与其起点无关的向量为自由向量(以后简称向量). 若无特殊说明,本章所研究的向量都是自由向量.

向量的大小称为向量的模,$\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$. 模为 0 的向量称为零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量称为单位向量.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的模相等,方向也相同(即在同一直线上或两平行直线上且指向相同),称为两个向量相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的方向相同或相反,我们称这两个向量平行,记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

三、向量的线性运算

1. 向量的加减法

由物理学中力、速度的合成法,可引出向量加法的定义. 对于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任选一点 A,作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作向量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 7-1-6 所示. 这个相加方法叫做向量相加的三角形法则.

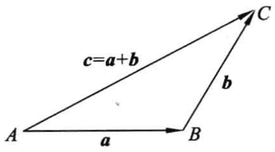


图 7-1-6

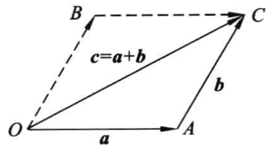


图 7-1-7

同时,从同一始点 O 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以 OA,OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的和(图 7-1-7),这叫做向量加法的平行四边形法则.

向量加法的运算法则:

(i) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(ii) **结合律** $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

同时有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

如果给出 $n(n\geqslant 3)$ 个向量,由向量的加法交换律和结合律,n 个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

按向量加法的三角形法则,可得 n 个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的法则:以前一个向量的终点为后一个向量的起点,接连相继做出向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以首个向量的起点为起点,以最后一个向量的终点作向量,这个向量即为所求的 n 个向量的和.如图 7-1-8 所示,$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_5$.

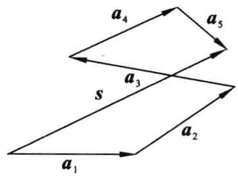


图 7-1-8

下面介绍向量的减法. 规定两个向量 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 的差(图 7-1-9) 为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

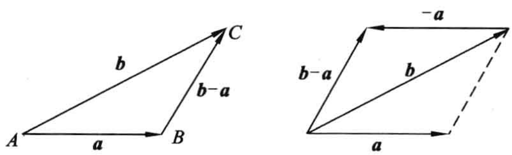


图 7-1-9

根据三角形三条边的关系,很快可以得到

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

这个不等式称为三角形不等式.

2. 向量的数乘

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积(数乘)是一个新的向量,记作$\lambda\boldsymbol{a}$,它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当$\lambda>0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向;当$\lambda<0$,$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向;当$\lambda=0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量.

特别地,当$\lambda=\pm1$时,有

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\qquad(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量的数乘满足如下的运算法则:

对于任意向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$和任意实数λ,μ,总有

(i) **结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(ii) **分配律** $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

根据向量与数的乘法的规定,有

(i) 非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$平行的充要条件是

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\quad(\lambda\neq\boldsymbol{0});$$

(ii) 与非零向量$\boldsymbol{a}$同向的单位向量,记作$\boldsymbol{e}_a$,则$|\boldsymbol{e}_a|=1$,且$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,即

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

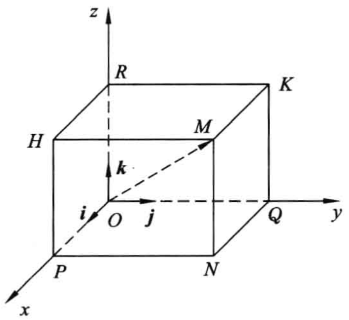


图 7-1-10

3. 利用坐标作向量的线性运算

在空间直角坐标系$Oxyz$中,分别记$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$为x轴、y轴与z轴的正向同方向的单位向量,并称它们为基本单位向量.

如图 7-1-10 所示,以坐标原点O为起点,向点M引向量$\overrightarrow{OM}$,这个向量称为点M对于原点O的向径,记为$r(M)=\overrightarrow{OM}$. P,Q,R的坐标分别为$(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$. 根据向量的加法,有

$$r(M)=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

又由向量与数的乘法知，$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$，所以

$$r(M) = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式. $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量$\overrightarrow{OM}$ 沿三个坐标轴方向的分向量. 并称 x,y,z 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记作 $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$.

利用向量坐标，可得向量的加减以及数乘运算如下：

设 $\boldsymbol{a} = (a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x,b_y,b_z)$，即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

λ 为实数，利用向量的加减和数乘运算法则，有

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k},$$

即

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

利用向量的坐标，很快可以得到如下结论：非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应坐标成比例，即

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

为了整齐易记，我们约定，如果连比式有一个分母等于 0，应理解为它的分子也为零.

例 3　已知向量 $\boldsymbol{a} = (1,0,2)$，$\boldsymbol{b} = (-2,1,1)$，求 $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

解　由题意可得

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= 3(1,0,2) - (-2,1,1) \\ &= (3,0,6) - (-2,1,1) \\ &= (5,-1,5). \end{aligned}$$

例 4　已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，以及实数 $\lambda \neq -1$，在直线

M_1M_2 上求一点 $M(x,y,z)$，使$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$.

解 由题意可得

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

因为 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，因此有

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的 λ 分点. 当 $\lambda=1$ 时，M 为线段 M_1M_2 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

4. 向量的模、方向角、投影

现在我们利用向量的坐标来表示向量的模、方向角以及向量在轴上的投影.

设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

故

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=(a_x,a_y,a_z)$，我们用它与三个坐标轴正向的夹角 α，β，γ 来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向($0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$)，称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

如图 7-1-11 所示，有

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\qquad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\qquad a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$