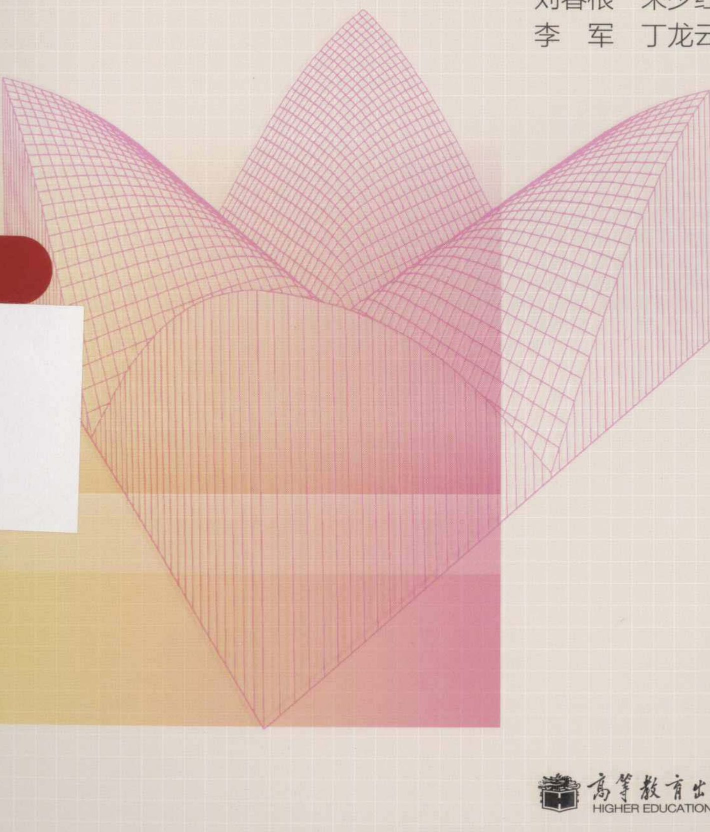
高　等　学　校　教　材

数学分析

Mathematical Analysis　（上册）

南开大学数学科学学院
刘春根　朱少红
李　军　丁龙云　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数 学 分 析

Shuxue Fenxi

（上册）

南开大学数学科学学院

刘春根　朱少红　李　军　丁龙云　主编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是南开大学数学科学学院数学分析课程组的老师在多年教学实践的基础上编写而成的。全书分上、中、下三册，介绍数学分析的基本内容。上册主要包括实数与函数、极限、连续函数、导数及其应用、实数理论及其应用、不定积分、定积分及其应用，中册主要包括多元函数的极限与连续性、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分，下册主要包括数项级数、广义积分、一致收敛、幂级数、傅里叶分析、含参变量积分。本书有丰富的习题，这些习题分为三个层次。每节之后的"练习"比较容易，是供学习者理解本节知识的一类基本题；每章之后的"习题"分为A、B两组，其中A组题是供学习者理解本章知识的一类题，B组题有一部分是配给本章选学内容的，还有一部分是用来提高能力的，有一定难度。

本书可作为高等学校数学类专业的教材，也可供数学教学和科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析．上册/刘春根等主编．--北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-038122-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第169169号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 兰莹莹　特约编辑 孔令才　封面设计 赵 阳
版式设计 杜微言　插图绘制 尹 莉　责任校对 刘 莉　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印 张	10.5	版 次	2013年8月第1版
字 数	260千字	印 次	2013年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	16.00元

物 料 号 38122-00

前　言

数学分析是数学学科各专业最重要的课程,它内容丰富,题材浩瀚,所涉及的内容通常有实数理论、极限理论、一元函数和多元函数的微分学和积分学、级数理论、广义积分、傅里叶分析、含参变量积分等。现阶段各大学数学系通常开设三个学期的数学分析课程,相对20世纪七八十年代,课时都有所压缩。随着时代的进步和科学技术的发展,传统数学分析教材的某些内容显得比较陈旧,因此教材改革的必要性和迫切性就显露出来了。我们写这套教材的初衷就是想在这个方面做一点尝试。

我们数学分析课程组的几位教师,结合长期的课程教学经验,写了这套数学分析教材。本套教材的系统充分尊重学生的认知规律,教材内容遵循分散难点、先易后难、螺旋式上升的原则。在大块内容的安排上,我们先讨论一元函数,再讨论多元函数,最后回到一元函数。把级数、广义积分、含参变量积分这些相对较难的教学内容,放在重积分与曲面积分之后,学生在受到较多训练之后,学习这部分内容,难度会相对小些。这样安排,也有利于介绍进一步的广义重积分以及二重级数等内容。在讨论一元函数时,我们把实数的完备性理论,上、下极限理论等比较抽象的内容移到微分理论之后、积分理论之前,主要是考虑学生在掌握了一定的基础知识并且经过一定的逻辑思维训练之后,接受起来相对容易些,也有利于他们理解这些基础理论的意义和作用。这套教材在具体内容的选择上,难易程度跨度较大,既有传统的基本内容,又有一些选学内容(教材中用星号标注),跳过这些选学内容不影响其他内容的学习。之所以这样处理,在于我们力争满足各个层次学生的学习所用。相对于国内现行的数学分析教材而言,这套教材在对具体内容的处理方面,进行了一些新的尝试。为了衔接现行的中学数学的教学内容,作为全书的基础,本着简明而实用的原则,对与数学分析密切相关的初等数学知识进行了简要的罗列。作为数学分析

的开篇内容, 在讨论极限理论与一元连续函数时, 强调了对充分条件、必要条件和充分必要条件的辨识, 增加了对定义的否定、重要定理的逆否命题进行数学描述及其应用的内容。这样对于专业人士而言也许是多余的, 但对于初学者训练逻辑思维能力是必要的。对于多元函数的处理, 我们强调化归为一元函数的思想方法, 并注重前后思想方法的继承性。例如, 对于一元函数带佩亚诺余项的局部泰勒公式, 除了采用其他教材通行的证明之外, 还给出了一个数学归纳法证明, 这个证明的思想方法可以用来证明多元函数的局部泰勒公式, 使得前后从思想方法来看是一脉相承的。 在讨论多元函数(包括向量值函数)的微分时, 为了加强与后续偏微分方程等课程的联系, 强调了用矩阵来参与表示多元函数的微分(包括梯度、高阶微分和泰勒公式等), 这样对于处理隐函数定理、 逆映射定理等就比较自然和方便一些。

本套教材的习题分为三个层次。每节之后的“练习”为基本题目, 有些比较容易, 有些是结论比较重要, 是供学生进一步理解本节知识、掌握基本方法的一类题目。每章之后的“习题”分为A、B两组, 其中A组题目主要以本章知识为背景, 中等难度题目居多, 旨在帮助学生综合掌握本章的知识和方法; B组题目有一部分是配给本章选学内容的, 还有一部分是用来提高能力的, 有较强的技巧性和较大的难度。 一般来说, 能够独立完成这些具有挑战性的习题, 是能力较强的体现。这些题目供一些对数学分析特别有兴趣的学生选做, 或者作为讨论式学习小组的选用题。

这套教材是南开大学数学科学学院数学分析课程组成员合作的成果。第一章、第六章、第十六章、第十七章、第十八章、 第十九章由丁龙云教授执笔, 第二章、第三章、第十二章、第十三章由朱少红教授执笔, 第四章、第五章、 第十四章、第十五章由李军副教授执笔, 第七章、第八章、第九章、第十章、第十一章由刘春根教授执笔。 我们从2008年着手编写这套教材, 2009年开始在南开大学数学科学学院基地班和普通班同时试用。从试用的效果来

看, 我们认为这套教材作为各类大学数学专业本科生的教学用书是合适的。这套教材在交付出版之前, 经过多年试用, 发现了一些不足之处, 我们已经对这套教材的初稿进行了多次讨论和修改, 把一些错误和不足之处改正了。但是由于水平所限, 问题和不足之处还会存在, 欢迎大家批评指正。

李成章、黄玉民两位教授所编著的数学分析教材在20世纪90年代由科学出版社出版, 并于2004年出版了第二版。这套教材在南开大学数学基地班使用了十来年的时间, 为南开大学数学基地班的教学发挥了很重要的作用, 在全国同类教材中也产生了积极的影响。现在这套教材是在上述教材的基础上写成的, 当然也融合了编者多年的数学分析教学经验, 并且吸收了国内外同类教材的一些优点。

本套教材的编写得到了南开大学教材建设项目的支持, 并且作为南开大学精品示范课建设的一部分工作, 得到了南开大学课程建设项目的支持, 在此我们表示衷心感谢。在此套教材筹划出版发行的时候, 我们得到了高等教育出版社的领导和老师们的很多帮助, 他们组织人员审订了全书的内容, 提出了很多宝贵的修改意见, 使得这套教材增色不少, 为此我们特别对他们出色的工作和热情的帮助表示由衷的谢意。

刘春根　朱少红　李　军　丁龙云

2013年春于南开大学

目　　录

第一章 预备知识

本章内容是中学数学课程与“数学分析”这门课程之间的衔接部分. 在回顾部分中学内容的同时, 将介绍一些相关概念和预备知识, 并对一些常用记号作出统一的规定.

1.1 实数、集合和函数

一、实数

“数学分析”的研究对象是实函数, 即自变量和函数值都是实数的函数. 在中学阶段, 我们已经知道, 实数包括有理数和无理数. 其中, 有理数的构成较为简单: 如果两个整数p,q的最大公因数是1, 我们称p,q是互质或互素的; 有理数则是形如$\dfrac{p}{q}$的实数, 其中p,q是两个互素的整数, 且$q>0$. 我们知道一些无理数的例子, 如 $\sqrt{2},\pi$等. 关于实数的更严密的理论, 在这里不详述, 留到第六章再进行深入讨论. 这里只强调与实数密切相关的数轴和稠密性:

(1) 数轴: 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴或实数轴. 今后我们经常把实数轴上的点和实数等同起来, 不加区分.

(2) 稠密性: 有理数和无理数在实数中都是稠密的, 也就是说, 在任何两个不同的实数之间一定存在一个有理数, 也一定存在一个

无理数. 关于有理数的稠密性, 我们将来主要按以下两种方式来理解(无理数稠密性的理解方式是类似的):

① 对任意实数a,b, 如果$a < b$, 则必定存在一个有理数r, 使得$a < r < b$;

② 对任意实数a和任意$\varepsilon > 0$, 都必定存在一个有理数r, 使得$|a-r| < \varepsilon$.

二、集合

集合的概念也是中学熟悉的. 在讨论多元函数之前, 我们涉及的集合主要是实数集的子集, 简称为数集. 比如: 实数集$\mathbb{R}$, 有理数集$\mathbb{Q}$, 整数集$\mathbb{Z}$, 自然数集$\mathbb{N}$, 正整数集$\mathbb{N}^*$.

一种常见的数集是区间. 设a, b是两个实数且$a < b$, 集合$\{x|a < x < b\}, \{x|a \leqslant x < b\}, \{x|a < x \leqslant b\}, \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$分别记为$(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$. 其中$(a,b)$称为开区间, $[a,b]$称为闭区间, $[a,b)$和$(a,b]$称为半开半闭区间.

在本课程中, 有一个和区间相关的极其重要的概念, 称为**邻域**. 设x_0是一个实数, $\delta > 0$, 我们称开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$为x_0的δ邻域, 记为$B_\delta(x_0)$; 有时候, 我们不强调δ的大小, 就简称为x_0的邻域, 记为$B(x_0)$; 如果从x_0的邻域中去掉x_0自身, 得到集合$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$, 则称为$x_0$的空心邻域, 记为$\overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$.

我们用记号$-\infty$和$+\infty$分别表示负无穷大和正无穷大. 要强调的是, $-\infty$和$+\infty$都只是记号, 不能把它们看成实数. 我们可以把前面的区间概念推广到无界区间$(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$和$(-\infty, +\infty)$, 分别表示集合$\{x|x < b\}, \{x|x \leqslant b\}, \{x|x > a\}, \{x|x \geqslant a\}$和实数集$\mathbb{R}$.

另外, 还有一个记号是∞. 这个记号有时是$+\infty$的简写, 有时表示不区分正负的无穷大, 需要从上下文来判定它的确切含义.

下面介绍两个今后经常用到的符号. 如果一个数集S有最小值m或最大值M, 则它们分别记为

$$m = \min S, \quad M = \max S.$$

其中 max 是 maximum 的简写, 而 min 是 minimum 的简写. 例如, $\min\{1,2,3\} = 1$, $\max\{1,2,3\} = 3$; $\min \mathbb{N} = 0, \max(0,1] = 1$, 而$\max \mathbb{N}$和$\min(0,1]$不存在.

设S是一个数集, 如果有一个实数M, 使得对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant M$, 则称S是**有上界**的, 并称M是S的一个**上界**. 反之, 如果这样的M不存在, 我们就称S是**无上界**的.

例如区间$(0,1)$是有上界的, 1就是它的一个上界; 而区间$[1,+\infty)$是无上界的, 自然数集$\mathbb{N}$也是无上界的. 显然, 如果M是集合S的一个上界, 那么任何一个大于M的数也都是S的上界.

同理, 如果存在实数m, 使得对任意$x \in S$, 都成立$x \geqslant m$, 则称S是**有下界**的, 并称m是S的一个**下界**. 此外, 如果S既有上界, 又有下界, 则称S是**有界集**. 反之, 如果S没有上界或者没有下界, 称S是**无界集**.

我们给出如下一组简单的性质, 证明留给读者.

性质 1 设S是一个数集, 则

(1) S无上界的充分必要条件是: 对任意实数M, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 > M$;

(2) S无下界的充分必要条件是: 对任意实数m, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 < m$;

(3) S是无界集的充分必要条件是: 对任意实数M, 都存在$x_0 \in S$, 使得$|x_0| > M$.

现在我们引进差集的概念和记号. 设A, B是两个集合, 我们定义A与B的差集$A \setminus B$如下:

$$x \in A \setminus B \text{ 当且仅当 } x \in A \text{ 但 } x \notin B.$$

注意到在上面的定义中并不要求B是A的子集. 例如, $\mathbb{Z}\setminus(-\infty,0]=\mathbb{N}^*$. 集合$E\subseteq\mathbb{R}$的补集定义为$\mathbb{R}\setminus E$. 例如, $(0,1)$在$\mathbb{R}$中的补集为$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

我们有时用逻辑符号“$\forall$”表示“任意”, 用“$\exists$”表示“存在”.

三、函数

一个自变量的函数称为一元函数, 具有两个及两个以上自变量的函数称为多元函数. 一元函数是中学阶段重点学习的内容, 我们在这里简明扼要地回顾一下它的定义和一些相关的概念. 关于多元函数的概念, 这里暂不涉及.

定义 1 设X是一个非空数集, 对任意$x\in X$, 按照确定的法则f, 都有唯一确定的实数y与它对应, 则该对应关系叫作集合X上的一个函数. 记作

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中x称为自变量, 数集X称为该函数的定义域. 而所有函数值构成的集合

$$\{f(x)|x\in X\}$$

称为该函数的值域, 记为$f(X)$.

我们在这里简单地罗列几个关于函数的常用概念:

1. **单射** 设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个不同的数x_1,x_2, 都成立$f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称函数f在X上是一个单射.

2. **单调函数** 设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个数x_1,x_2, 当$x_1<x_2$时, 总成立

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在数集X上是递增函数(递减函数). 假如在上式中严格不等式总成立, 即$f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$, 则称$f(x)$在数集X上是严格递增函数(严格递减函数).

递增函数和递减函数统称为单调函数, 严格递增函数和严格递减函数统称为严格单调函数.

大多数时候, 我们只在区间上讨论函数的单调性. 我们容易知道, 区间I上的严格单调函数是I上的单射. 但反过来不一定成立. 请读者自行举例.

例如$\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增函数, 在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上是严格递减函数. 而常数函数$f(x)=1$在$(-\infty,+\infty)$上既是递增函数, 也是递减函数, 但不是严格递增或严格递减函数.

3. **奇函数与偶函数**　如果函数$f(x)$的定义域是关于原点对称的区间, 或是关于原点对称的更一般的数集X, 且对任意$x\in X$, 都成立

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称$f(x)$是奇(偶)函数. 易见, 奇函数的图像关于原点中心对称, 而偶函数的图像关于y轴对称.

对于自然数n, 函数$y=x^n$在n是奇数时是奇函数, 在n是偶数时是偶函数. 这正是奇函数和偶函数的名称来源. 三角函数$y=\sin x$和$y=\tan x$都是奇函数, 而$y=\cos x$是偶函数.

4. **周期函数**　对于函数$f(x)$, 如果能找到非零实数T, 满足: 当函数在点x有定义时, 一定在$x\pm T$也有定义, 并且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$是一个周期函数, 并称T是$f(x)$的一个周期. 如果$f(x)$的所有正周期中有最小值T_0, 我们称T_0为$f(x)$的**最小正周期**.

我们熟悉的周期函数如$y=\sin x$和$y=\cos x$, 对任意非零整数k, $2k\pi$是它们的周期, 而2π是它们的最小正周期. $y=\tan x, y=\cot x$也是周期函数, 它们的最小正周期是π. 常数函数$f(x)=1$也是周期函数, 任何非零实数都是它的周期, 但它没有最小正周期.

5. **有界函数与无界函数**　如果函数$f(x)$的值域有上界(下界), 则称函数$f(x)$有上界(下界). 如果函数$f(x)$的值域是有界集, 则称

函数$f(x)$为有界函数; 反过来, 如果函数$f(x)$的值域是无界集, 则称$f(x)$为无界函数.

由性质1知, 函数$f(x)$为X上的有界函数的充分必要条件是: 存在$M>0$, 使得对任意$x\in X$, 都成立$|f(x)|\leqslant M$. 此时称M是$f(x)$的一个界.

例如, 三角函数$y=\sin x$和$y=\cos x$都是有界函数; 幂函数$y=x^2$是无界函数, 但它是有下界的函数; 对数函数$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$是无界函数, 它既没有上界, 也没有下界.

6. **反函数** 设函数$y=f(x)$的定义域是X, 值域是Y, 并且$f(x)$是X上的单射. 于是, 对任意$y\in Y$, 有唯一的$x\in X$与它对应. 在这样的情形下, 我们称f是从X到Y的一个**一一对应**. 此时, 我们可以定义一个从Y到X的函数f^{-1}为: 对任意$y\in Y$,

$$x=f^{-1}(y) \iff y=f(x).$$

我们称f^{-1}是f的反函数. 显然, f也是f^{-1}的反函数, 或者说, f和f^{-1}互为反函数. 为方便起见, 我们交换x与y, 写成$y=f^{-1}(x)$, $x\in Y$.

例如, 对数函数$y=\log_a x$与指数函数$y=a^x$互为反函数. 我们不难知道, 如果$y=f(x)$和$y=g(x)$互为反函数, 那么它们的图像关于直线$y=x$对称. 需要强调的是, $y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$在同一个坐标系中的图像其实是重合的.

假如$y=f(x)$是定义在区间I上的严格单调函数, 那么它在I上是单射. 如果记$f(x)$的值域为Y, 则f是从I到Y的一一对应, 因此存在它的反函数$y=f^{-1}(x)$ $(x\in Y)$.

7. **复合函数** 设函数$y=f(u)$的定义域是U, 函数$u=g(x)$的定义域是X, 对于任意$x\in X$, 如果$u=g(x)\in U$, 我们可以按如下对应法则确定唯一的实数y:

$$y=f(g(x)).$$

我们称$y=f(g(x))$是$y=f(u)$和$u=g(x)$的**复合函数**, 记为$f\circ g$. 复合函数$(f\circ g)(x)$的定义域是$\{x\in X|g(x)\in U\}$.

可见, $f\circ g$的定义域是g的定义域的一个子集, 并且只有在$\{x\in X|g(x)\in U\}$是非空集合的情况下, $f\circ g$才有意义.

例 1 设$f(x)=1-x^2, g(x)=\log_2 x$, 则

$$(f\circ g)(x)=1-(\log_2 x)^2,\quad \forall x\in(0,\infty);$$
$$(g\circ f)(x)=\log_2(1-x^2),\quad \forall x\in(-1,1).$$

从这个例子看到, 一般来讲, 复合函数$f\circ g$和$g\circ f$是两个不同的函数.

例 2 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}, g(x)=1-\dfrac{1}{x}$. 显然$f(x)$的定义域是$\{x|x\neq 1\}$, 而$g(x)$的定义域是$\{x|x\neq 0\}$. 两个复合函数为

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x\quad (x\neq 0),$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1-\frac{1}{\dfrac{1}{1-x}}=x\quad (x\neq 1).$$

两个复合函数的表达式相同, 但它们的定义域不同, 因此仍然是两个不同的函数. 这里, 我们还可以看到$f(x)$和$g(x)$互为反函数.

更一般地, 如果$f(x)$是从X到Y的一一对应, 那么

$$(f\circ f^{-1})(y)=y\quad (y\in Y),$$
$$(f^{-1}\circ f)(x)=x\quad (x\in X).$$

我们可以按两种不同的方式把复合函数的定义推广到三个以上函数的情形. 设有三个函数$y=f(u)(u\in U)$, $u=g(v)(v\in V)$和$v=h(x)$ $(x\in X)$, 则

$$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x))),$$
$$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x))).$$