数学竞赛解题指导

适合初一、初二、初三各年级学生用

历届全国初中数学竞赛经典试题详解

LIJIEQUANGUO CHUZHONGSHUXUEJINGSAI JINGDIANSHITI XIANGJIE

谢树发 编著

农村读物出版社

数学竞赛解题指导

历届全国
初中数学竞赛
经典试题详解

谢树发　编著

农村读物出版社

图书在版编目（CIP）数据

历届全国初中数学竞赛经典试题详解/谢树发编著.
北京：农村读物出版社，2003.2
（数学竞赛解题指导）
ISBN 7-5048-4024-6

Ⅰ.历… Ⅱ.谢… Ⅲ.数学课-初中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 096041 号

出 版 人	傅玉祥
责任编辑	张鸿燕　李红枫
出　　版	农村读物出版社（北京市朝阳区农展馆北路 2 号　100026）
发　　行	新华书店北京发行所
印　　刷	中国农业出版社印刷厂
开　　本	850mm×1168 mm　1/32
印　　张	17.5
字　　数	445 千字
版　　次	2003 年 3 月第 1 版　　2003 年 3 月北京第 1 次印刷
印　　数	1～8 000 册
定　　价	19.80 元

内容提要

《历届全国初中数学竞赛经典试题详解》博采了众家之长，又敢于标新立异。作者精选的历届全国、省、市初中数学竞赛优秀试题，远远突破了1 000道题，所选的每道题都有详细解答，这无疑提升了它的使用价值和权威性，这也是本书有别于其他同类书而独具的特色。书中的三段小插曲，即“解题策略大盘点①②③”将初中数学常用的解题策略和技巧，通过对典型例题精辟的分析和详尽的讲解，系统地介绍给中学生读者，深入浅出，通俗易懂，同学们乐于接受也容易掌握，这是本书的又一大特色。

前 言

历届全国以及省、市的数学竞赛、联赛和各种邀请赛，给我们提供了一个巨大的知识宝库，不论是初中还是高中的数学竞赛，题型多样化，灵活、新颖，具有一定的趣味性，而且涉及的知识全面，深度和难度把握较好。如果我们广大的数学教师，能对各种类别的数学竞赛题，认真地进行研究，去粗取精，加以提炼，选取实用性强，有价值的优秀竞赛题，献给我们的中学生，激发他们对数学学习的兴趣，提高中学数学教育质量，无疑是一项十分有益的工作。

本书不落俗套，它具有鲜明的特点和个性。

1. **侧重于解题指导**。本书选作例题的竞赛题，颇具代表性，或是某种题型的代表，或是某种解题方法的典范，对例题的分析透彻具体，思路清晰，语言简练活泼，解题过程叙述规范，为学生设计的练习所精选的竞赛题，全部给出了详细解答，有些题还给出了精辟的分析。这样，对于提高学生的分析能力、思维能力特别是解题能力大有好处。

2. **与现行新编教材同步**。本书是按初一、初二、初三，三个档次进行编排，各个年级又是按知识结构分章，与课本完全同步，便于同学们循序渐进地学习，逐步提高自己的解题能力。在知识深度上，本书有所拓展。这样，对那些学有余力的数学优等生，如同增加了几道可口的“菜谱”。

3. **具有权威性**。这里的权威不是指本书的作者具有某种权威，而是指本书内容具有权威性，本书所选的每一道题，不管是例题，还是供学生练习而选的竞赛题，都是精心筛选，无可挑剔。经

典且具有较强的实用价值，这是本书最具特色之处。这一点，不会随着时间的推移而改变。

4.适用于不同层次的广大初中生。“面向全体学生”是本书的宗旨，本书每一章所精选的竞赛题分为两大类，第一类实质上属于基础训练，即A级题和B级题，适合于一般水平的学生，而“智能强化训练”题适合于层次较高的数学尖子生。所以本书既可以作为广大初中生的应试参考资料，又可供初中数学竞赛参加者使用，还可作为初中数学教师培训、选拔参赛选手的参考用书。

“智破千题，稳操胜券”，对于积极上进的同学们来讲，决不是梦想。从另一个角度来讲，“智破千题，稳操胜券”，也是本书作者的良好愿望，愿同学们成为国家的栋梁之材。诚然，本书只是座桥梁，本书作者也甘愿作“人梯”，然而，真正能帮助同学“稳操胜券”的是同学们的自信心、勤奋精神和脚踏实地的学习风范。

本书不当之处，望读者批评指正。联系电话：(0734)8400496

谢树发

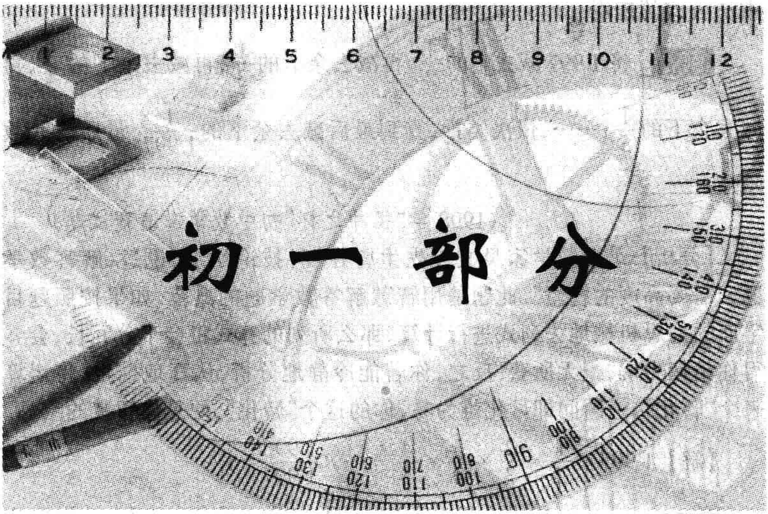
2003年元月于湖南衡阳

目 录

初一部分

初二部分

初三部分



初一部分

第一章 有理数与整式

典型试题解析

[解题指导] 有理数的有关概念和运算，在初中数学、高中数学以及在其他各门学科的学习中，都是离不开的. 数轴是个非常抽象的概念，却又实实在在，它的三个要素缺一不可，数轴是我们研究数学的重要工具. 绝对值是数学中的一个有着深刻内涵的概念，它的几何意义和性质在初中数学中有着广泛的应用. 数学竞赛中的有理数计算，通常都是与推理相结合的，这就要求同学们注意观察题目的结构、运用机智、找出规律、选用巧妙算法. 有理数计算常用的技巧有：倒序相加、裂项相消、字母代换、活用公式.

整式是最基本的代数式，整式的加减实际就是合并同类项，必须熟练掌握去括号、添括号以及合并同类项三个法则. 解代数式的化简与求值问题，关键是对代数式进行变形，常用的方法有“整体代换”、“特殊值法”和

乘法公式的逆用.

例 1 将 1 997 减去它的$\frac{1}{2}$,再减去余下的$\frac{1}{3}$,再减去余下的$\frac{1}{4}$,再减去余下的$\frac{1}{5}$,……,依次类推,直到最后减去余下的$\frac{1}{1\,997}$.最后的答数是________.

(1998 年"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题)

【分析】著名数学家吴文俊先生曾在"科技论坛"上说过,解答数学题,"需要高度的智慧".此题是用智慧解答数学题的典范.如果按照题目字面的意思机械地去列式进行计算,那么所列的算式将会十分冗长,会弄得你精疲力竭,毫无所获.反之,你若能冷静地分析,认真地推敲,将运算来个"转化",一瞬间即可化难为易,你的这个"转化",便是你智慧的结晶.

【解】$1\,997\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{1\,996}{1\,997}=1$

例 2 计算:$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\cdots+\frac{48}{50}+\frac{49}{50}\right)=$________.

(1999 年第十届"希望杯"全国数学邀请赛试题)

【分析】解每一道数学题,都应先从观察入手,边看边想,从观察中找出题目的特点,从观察中发现联系.此题主要考查观察能力和随机应变能力,再运用不完全归纳法,即可求得解答全过程.第一个数是$\frac{1}{2}$,可以写成$\frac{1}{2}\times1$;第二个数是$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)$,它的值是 1,可以写成$\frac{1}{2}\times2$;第三个数是$\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)$,它的值是$\frac{3}{2}$,可以写成$\frac{1}{2}\times3$;……,以此类推,最后一个数是$\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\cdots+\frac{48}{50}+\frac{49}{50}\right)$,可以写成$\frac{1}{2}\times49$.

【解】$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\cdots+\frac{48}{50}+\frac{49}{50}\right)=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{2}\times4+\cdots+\frac{1}{2}\times49=\frac{1}{2}\times(1+2+3+4+\cdots+49)=612.5$

例 3 100个数之和为1 990,把第1个数减1,第2个数加2,第3个数减3,…,第100个数加100,则所得新数之和为________.

(第二届"五羊杯"初中数学竞赛题)

【分析与解】审题是解题的起点,也是解题中最重要的一环,审题时首先要分清题目的已知条件.100个数之和为1 990,这是个定值,不动它,只考虑第1个数减1,第2个数加2;第3个数减3,第4个数加4;……第99个数减99,第100个数加100.这是出题者故意把水搅浑,使你思维理不出头绪,而你如果沉着、冷静,你的解题策略应运而生.我们把减加看做一次运动,运动结果是1,有50次这样的运动,那么就有50个结果,这50个结果的和为50,所以所得新数之和应为1 990+50即2 040.

例 4 若 $x-y=2\quad x^2+y^2=4$,则 $x^{1\,992}+y^{1\,992}$ 的值是( ).

(A) 4 (B) $1\,992^2$ (C) $2^{1\,992}$ (D) $4^{1\,992}$

(第三届"希望杯"全国初中数学邀请赛初一试题)

【分析】在数学解题中,巧用特殊值法求解,可以大大降低解题的难度.该题虽然在条件中没有给出具体的数值,但我们可以根据题目所给条件的特征,对条件中的每一个字母赋予一个特殊的数值,这个特殊的值称为"他山之石",可以攻玉.

【解】取 $x=2,y=0$ 显然满足题设中的条件.

这时,$x^{1\,992}+y^{1\,992}=2^{1\,992}+0=2^{1\,992}$,选(C).

例 5 计算:$(2^1+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$的结果是( ).

(A) $2^{32}-1$ (B) $2^{64}-1$ (C) $2^{128}-1$ (D) 2^{64}

(E)以上答案都不对

(1990年"汉江杯"初中数学竞赛题)

【分析】"1"是个十分奇特的数,虽然简单,内涵却丰富."1"在解答数学题中有许多妙用.这里我们将1写成(2^1-1)的形式,把它写在已知式里作为第一个因式,再反复运用乘法公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

【解】原式 $=(2^1-1)(2^1+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$

$$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$$
$$=2^{128}-1 \qquad \text{故选(C)}.$$

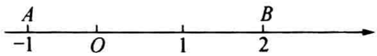
例6 满足$|x-2|+|x+1|=3$的x的个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 多于2个

(1992年山东省初中数学竞赛试题)

【分析】根据绝对值的几何意义,此题就是求数轴上到表示-1和2这两点的距离和等于3的点,故可借助数轴解答.

【解】如图:



在数轴上A、B分别表示数-1和2,$|x-2|+|x+1|=3$中的x,即到A、B距离之间和等于3的点,线段AB上所有点都满足.故满足$|x-2|+|x+1|=3$的x的个数有无数个,故选(D).

例7 计算:$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,997}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,996}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,997}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)=$________.

(1997年"希望杯"邀请赛初一试题)

【分析】数学思想是数学知识的精髓,也是知识转化能力的桥梁,整体思想是数学思想的组成部分.用字母表示数充分体现了整体思想,一个字母不仅代表一个数,而且能代表一系列的数.

【解】令$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,997}$,$b=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,996}$,

则原式$=a(1+b)-(1+a)b=a+ab-b-ab=a-b=\frac{1}{1\,997}$.

例8 如果对于某一特定范围内的x的任一允许值$P=|1-2x|+|1-3x|+|1-4x|+\cdots+|1-9x|+|1-10x|$为定值,则定值为( ).

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(1990年合肥市初中数学竞赛题)

【分析】此题看起来给人一种扑朔迷离的感觉,这时需冷静地对题目再认真地审视一番.既然P为定值,可知与字母x的取值无关,现在的问题是,x为何值时化去所有的绝对值符号,并且使含字母x的项合并后

完全消去.我们注意到 P 的表达式的前六项和后三项,并紧紧盯住 $|1-7x|$ 这一项,于是,我们找到了解题的突破口.

【解】当 $x>0$ 时,由 $1-7x\geqslant 0$ 得:$x\leqslant\frac{1}{7}$,

∴　当 $0<x\leqslant\frac{1}{7}$ 时,

$P=(1-2x)+(1-3x)+\cdots+(1-7x)+(8x-1)+(9x-1)+(10x-1)=(6-3)+(-27x+27x)=3$,故选(B).

例 9　若 $1=\frac{xy}{x+y}$,$2=\frac{yz}{y+z}$,$3=\frac{zx}{z+x}$,则 $x=$________.

(1992 年"东方航空杯"上海市初中数学竞赛题)

【分析】此题利用已知条件直接求 x 的值十分困难,我们可以利用倒数将已知条件变形,并求出 $\frac{1}{x}$ 的值.

【解】由题设,得:$\frac{x+y}{xy}=1$ 即

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \qquad ①$$

$$\frac{y+z}{yz}=\frac{1}{2}\text{ 即}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \qquad ②$$

$$\frac{z+x}{zx}=\frac{1}{3}\text{ 即}$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \qquad ③$$

①+②+③得:$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{11}{6}$

∴
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12} \qquad ④$$

④-②得:$\frac{1}{x}=\frac{5}{12}$,∴ $x=\frac{12}{5}$.

例 10　对于任意有理数 x、y,定义一种运算 $*$,规定 $x*y=ax+by-cxy$,其中的 a、b、c 表示已知数,等式右边是通常的加、减、乘运算,又知道 $1*2=3$,$2*3=4$,$x*m=x(m\neq 0)$,则 m 的数值是________.

（第一届“希望杯”初中数学邀请赛题）

【分析】此题给人一种陌生感，题中的运算符号在教材里未出现过，所以解答此类题时，必须对题中规定的运算定义与已学的加、减、乘、除运算进行联想、类比和转换，才能正确求解.

【解】由已知，得：

$$a+2b-2c=3 \qquad ①$$

$$2a+3b-6c=4 \qquad ②$$

①×2－②得：$b+2c=2$，∴ $c=\dfrac{2-b}{2}$，

①×3－②得：$a+3b=5$，∴ $a=5-3b$，

又由已知得：$x*m=ax+bm-mxc=x$，

因 x、y 为任意有理数，故令 $x=0$ 得：$bm=0$.

令 $x=1$ 得：

$$a+bm-mc=1 \qquad ③$$

将 $a=5-3b$，$bm=0$，$c=\dfrac{2-b}{2}$ 代入③得：

$$5-3b-\frac{2-b}{2}m=1 \qquad ④$$

∵ $m\neq0$，由 $bm=0$ 得 $b=0$，将 $b=0$ 代入④得：$m=4$.

智能提升训练

A 级

[题 1] 设 a、b 是不相等的任意正数，又 $x=\dfrac{b^2+1}{a}$，$y=\dfrac{a^2+1}{b}$，则 x、y 这两个数一定（　　）.

(A) 都不大于 2　　(B) 都不小于 2

(C) 至少有一个大于 2　　(D) 至少有一个小于 2

（2000 年全国初中数学联赛试题）

[题 2] 满足 $|a-b|=|a|+|b|$ 成立的条件是（　　）.

(A) $ab>0$　(B) $ab>1$　(C) $ab\leqslant0$　(D) $ab\leqslant1$