乌成伟　刘春岚　主编

线性代数与概率论

吉林科学技术出版社

线性代数与概率论

乌成伟　刘春岚　主编

吉林科学技术出版社

【吉】新登字 03 号

线性代数与概率论　　乌成伟　刘春岚　主编

责任编辑：高　慧　张允麟　　封面设计：徐　欣

出版发行　吉林科学技术出版社　850×1168 毫米 32 开本　11 印张　273,000 字

1992 年 11 月第 1 版　1992 年 11 月第 1 次印刷

印数：1-3060 册　定价：5.90 元

印刷　吉林省劳动印刷厂　ISBN 7-5384-0338-8/O·20

内 容 简 介

本书分为线性代数与概率论两部分. 线性代数的内容包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、方阵的对角形、实二次型，线性空间与线性变换. 概率论的内容包括随机事件及其概率、条件概率、事件的相互独立性、试验的相互独立性、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理.

本书结构严谨，内容深入浅出、通俗易懂，配有大量例题，特别便于自学. 可作为高等工科院校教材，也可作为工程技术人员自学参考书.

前　　言

本书分为线性代数(第一章至第七章)与概率论(第八章至第十三章)两部分.其中线性代数是按原教育部于1980年颁发的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“线性代数”部分的要求编写的;概率论是根据国家教委1987年批准的《高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求》编写的.在本书的编写过程中,根据我们在教学中积累的有益经验和学科特点,注意说明诸概念的现实背景和实际意义,在叙述上力求通俗易懂,深入浅出.各章均配有习题,并在书后附有全部习题(计算)答案.

线性代数部分由乌成伟、纪耀芝、陈义元和吴绪英参加编写,其中乌成伟任主编;纪耀芝任副主编.第一章和第二章前四节由纪耀芝执笔,第二章第五节由纪耀芝和吴绪英执笔,第三章由乌成伟和吴绪英执笔,第四章由陈义元执笔,第五、六、七章由乌成伟执笔.最后由乌成伟统改定稿.

概率论部分由刘春岚、戚兆德和王承中参加编写,其中刘春岚任主编,戚兆德任副主编.第八、九章由刘春岚执笔,第十、十一章由戚兆德执笔,第十二、十三章由王承中执笔.最后由刘春岚统改定稿.

在此对李炳坤、冷钧和高慧同志深表谢意,由于他们的支持和帮助才使本书得以出版.

由于编者水平所限,本书一定存在不少缺点和错误,殷切期望读者批评指正.

编　者

1992年4月

目　　录

第一章 行 列 式

在初等数学中讨论过二、三阶行列式，并且利用它们来解二、三元线性方程组. 为了研究 n 元线性方程组，需要把行列式推广到 n 阶. 为此，先介绍排列等知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

§1—1 排列的奇偶性

在中学代数中知道，将 n 个数码 $1,2,3,\cdots,n$ 排成一列叫做这 n 个数码的全排列. 这样的**全排列**共有 $n!$ 个. 但其中只有一个是按自然数顺序**排列**的，即排列 $123\cdots n$. 而在其它任一个排列中，一定有大数码排在小数码的前面.

一般来说，在一个排列中，有较大数码排在较小的数码之前，则对这两个数码来说构成一个**逆序**. 在一个排列中，对于数码 i 来说，比 i 大排在 i 前面的数码个数 m_i 叫做由 i 引起的**逆序数**.

定义 1 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中各数码所引起的逆序数的总和称为这个**排列的逆序数**，记 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，在排列 32514 中，排在 1 前面比 1 大的数码有 3,2,5，于是 3 与 1,2 与 1,5 与 1 各构成一个逆序，则由 1 引起的逆序数为 3. 同理，由 2 引起的逆序数为 1，由 3 引起的逆序数为 0，由 4 引起的逆序数为 1，由 5 引起的逆序数为 0，因此 $\tau(32514)=5$

例 1 计算排列 621534 的逆序数

解 $m_1=2, m_2=1, m_3=2, m_4=2, m_5=1, m_6=0$. 于是

$$\tau(621534) = 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 = 8$$

例 2 计算排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ 的逆序数.

解 $m_1=n-1, m_2=n-2, \cdots, m_{n-1}=1, m_n=0$，于是

$$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 2 逆序数为奇数的排列叫**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫**偶排列**.

例如，由于 $\tau(32514)=5$，$\tau(621534)=8$，所以 32514 是奇排列，621534 是偶排列.

在排列中，将任意两个数码 i 与 j 对调，其余数码不动，这种做出新排列的手续叫**对换**，记作 (i,j).

例如，排列 1342756 经过对换 $(3,6)$，得到排列 1642753，而这两个排列的逆序数为

$$\tau(1342756)=4,\quad \tau(1642753)=9$$

可见，排列 1342756 经过一次对换 $(3,6)$ 后，改变了奇偶性. 一般地，有

定理 1 一个排列中的任意两个数码对换，排列改变奇偶性.

证明 1° 先证两个相邻数码对换的情形. 设已知排列为

$$PijQ \tag{1}$$

其中，P 与 Q 代表排列中若干个数码，记 $P=i_1i_2\cdots i_m$，$Q=j_1j_2\cdots j_s$ 施行对换 (i,j) 后得

$$PjiQ \tag{2}$$

比较(1)、(2)两个排列的逆序数，显然属于 P 或 Q 的数码位置没有变动，因此，这些数码引起的逆序数没有变化. 但若 $i>j$，那么经过对换，数码 i 引起的逆序数不变，数码 j 引起的逆序数少 1 个. 若 $i<j$，则经过对换，数码 i 引起的逆序数多 1 个，数码 j 引起的逆序数不变，于是排列(2)的逆序数比排列(1)的逆序数多 1 个. 不论哪种情况，排列的奇偶性总是改变了.

2° 再证一般情形. 设 i 和 j 之间有 S 个数码，这时可设已知排列为

$$Pik_1k_2\cdots k_sjQ \tag{3}$$

经过对换 (i,j) 后，得到排列

$$Pjk_1k_2\cdots k_s iQ \tag{4}$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻数码的对换来实现. 在(3)中，把 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots k_s,j$ 对换，这样经过 $s+1$ 次相邻数码的对换，排列(3)变成了

$$Pk_1k_2\cdots k_s jiQ \tag{5}$$

再从(5)出发，把 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_1$ 对换，经过 s 次相邻数码的对换，排列(5)就变成了排列(4)，这就是说，i 与 j 的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现. $2s+1$ 是奇数，所以排列(3)与(4)的奇偶性相反. 证完.

推论　在 $n(n\geqslant 2)$ 个数码的所有排列中奇排列与偶排列的个数相等，各占 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　设 n 个数码的奇排列共有 P 个，偶排列共有 q 个. 对 P 个奇排列都施行同一对换 (i,j)，于是得到 P 个偶排列，由于这 P 个偶排列，再施行对换 (i,j)，又回到原来的 P 个奇排列，所以这 P 个偶排列两两不同. 但一共只有 q 个偶排列，所以 $P\leqslant q$. 同理可得 $q\leqslant P$，故 $P=q$. 由于 n 个数码的全排列共 $n!$ 个. 而 $P+q=n!$，所以 $P=q=\frac{n!}{2}$.

例如，由 1,2,3 组成的所有排列为

123,231,312

132,213,321

上面一排为偶排列，下面一排为奇排列，各占一半.

§1—2　n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，我们先研究三阶行列式的展开式的结构规律，从而利用这些规律去定义 n 阶行列式. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$代表三阶行列式中第 i 行第 j 列元素. 容易看出：

(1)三阶行列式是一个含有 6=3！项的代数和；

(2)每一项都是三个元素的乘积，而这三个元素即位于不同行又位于不同列，并且所有位于不同行不同列的三个元素的乘积(共有 3！=6 项)都在三阶行列式中出现，于是任一项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列.

(3)每一项三个元素的第一个下标(**行标**)排成自然顺序，这时第二个下标(**列标**)构成三个数码 1,2,3 的一切排列：123,231,312,321,132,213,前三个是偶排列，与它们对应的项都取正号，后三个是奇排列，与它们对应的项都取负号.

故三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列取和.

以上我们找出了三阶行列式的构造规律，即它所含的项数，项的构成以及每项所取的符号. 根据这一规律，我们来定义 n 阶行列式.

定义 3　用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n **阶行列式**等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots$

a_{nj_n}，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时取负号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum$ 表示对列标的所有 n 级(元)排列求和.

这个定义表明，n 阶行列式正是二、三阶行列式的推广，特别是，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|$ 就是数 a(此处 $|a|$ 不是 a 的绝对值). 计算 n 阶行列式，首先必须作出所有可能的位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，把这些乘积的元素的行标按自然顺序排列，然后看列标排列的奇偶性来决定这一项的符号.

例 3　用行列式定义计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式主对角线下侧元素全为 0，称为**上三角行列式**.(与此类似，主对角线上侧元素全为 0 的行列式叫**下三角行列式**.)

解　这是一个 n 阶行列式，在展开式中应有 $n!$ 项. 但由于主对角线下方元素全为 0，因此不等于 0 的项大大减少了.

由定义知，D 的一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

因为在 D 的第 n 行上除 a_{nn} 外其余元素全为 0，所以只要考虑 $j_n=n$ 即可. 在第 $n-1$ 行上，除 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其余元素全为 0. 因此 j_{n-1} 只有 $n-1$，n 这两个可能. 但由于 $j_n=n$，所以 j_{n-1} 不能取 n，只有 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步取下去，易知 D 的展开式中不等于 0 的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，而这一项的列标排列 $12\cdots n$ 是偶排列，所以这

一项带正号，即

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角行列式等于主对角线上 n 个元素的乘积，类似可以证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

作为特殊情形有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

这种行列式称为**对角行列式**.

例 4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 同例 3，除去 0 的项外，只有唯一一项 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$，其列标排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

特别地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

在行列式定义中，还可以把每项的 n 个元素的列标按自然顺序排列，而由行标排列的奇偶性来决定该项的符号，因此有下面的定理.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中 $\sum$ 是对行标的所有 n 级排列求和.

证明 由于数的乘法满足交换律，因此 n 个元素的次序可以是任意的. 一般地，n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 可以证明(1)的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \tag{2}$$

事实上，把(1)的 n 个元素按行标是自然顺序重新排列，也就是排成

$$a_{1 j_1'} a_{2 j_2'} \cdots a_{n j_n'} \tag{3}$$

它的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} \tag{4}$$

现在来证明(2)和(4)是相等的. 因为由(1)变到(3)可以经过一系列元素的对换来实现，每作一次对换，元素的行标与列标所成的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都同时作一次对换，也就是 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，所以这两个排列的逆序数之和 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性不变. 也就是说，对(1)作一次元素对换

不改变(2)的值，于是经过一系列对换之后，有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

所以

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

当我们把每一项的列标按自然顺序排列时，有

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}=(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{P_11}a_{P_22}\cdots a_{P_nn}$$

于是 n 阶行列式又可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{P_11}a_{P_22}\cdots a_{P_nn}$$

例如 $a_{35}a_{23}a_{51}a_{14}a_{42}$ 是五阶行列式中的一项. $\tau(32514)=5$, $\tau(53142)=7$. 于是这一项的符号是$(-1)^{5+7}=1$.

若把这一项的行标按自然顺序排列，有 $a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51}$，这时列标排列的逆序数为 $\tau(43521)=8$，同样得到这一项的符号为 $(-1)^8=1$

§1—3 行列式的性质

定义 4 把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次变成相应的列，所得的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式转置后其值不变，即 $D=D'$.

证明 将 D' 记为