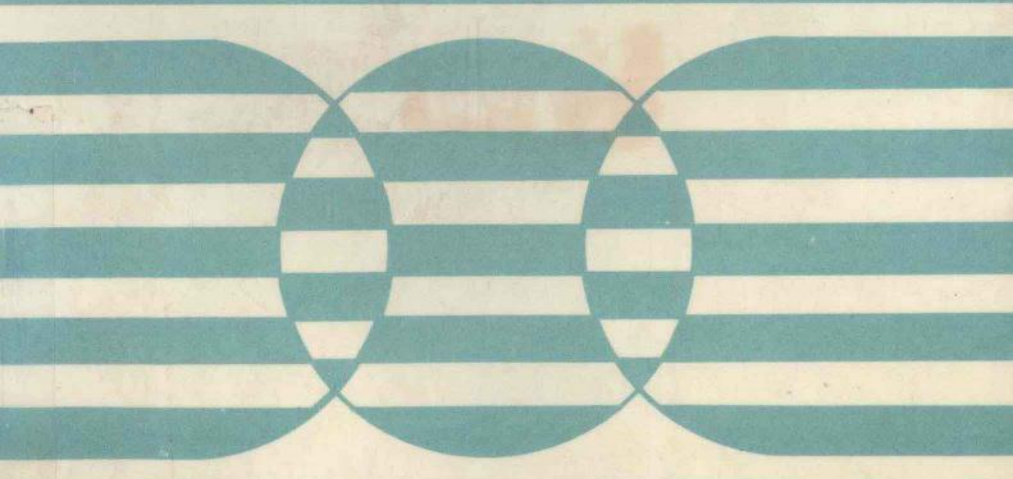


乌成伟 刘春岚 主编

概率论 与 线性代数



吉林科学技术出版社

线性代数与概率论

乌成伟 刘春岚 主编

吉林科学技术出版社

【吉】新登字 03 号

线性代数与概率论

乌成伟 刘春岚 主编

责任编辑:高 慧 张允麟

封面设计:徐 欣

出版 吉林科学技术出版社
发行

850×1168 毫米 32 开本 11 印张
273,000 字

1992 年 11 月第 1 版 1992 年 11 月第 1 次印刷

印数:1-3060 册 定价:5.90 元

印刷 吉林省劳动印刷厂

ISBN 7-5384-0338-8/O·20

内 容 简 介

本书分为线性代数与概率论两部分. 线性代数的内容包括行列式、矩阵、 n 维向量、线性方程组、方阵的对角形、实二次型, 线性空间与线性变换. 概率论的内容包括随机事件及其概率、条件概率、事件的相互独立性、试验的相互独立性、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理.

本书结构严谨, 内容深入浅出、通俗易懂, 配有大量例题, 特别便于自学. 可作为高等工科院校教材, 也可作为工程技术人员自学参考书.

前 言

本书分为线性代数(第一章至第七章)与概率论(第八章至第十三章)两部分. 其中线性代数是按原教育部于1980年颁发的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“线性代数”部分的要求编写的; 概率论是根据国家教委1987年批准的《高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求》编写的. 在本书的编写过程中, 根据我们在教学中积累的有益经验和学科特点, 注意说明诸概念的现实背景和实际意义, 在叙述上力求通俗易懂, 深入浅出, 各章均配有习题, 并在书后附有全部习题(计算)答案.

线性代数部分由乌成伟、纪耀芝、陈义元和吴绪英参加编写, 其中乌成伟任主编; 纪耀芝任副主编. 第一章和第二章前四节由纪耀芝执笔, 第二章第五节由纪耀芝和吴绪英执笔, 第三章由乌成伟和吴绪英执笔, 第四章由陈义元执笔, 第五、六、七章由乌成伟执笔. 最后由乌成伟统改定稿.

概率论部分由刘春岚、戚兆德和王承中参加编写, 其中刘春岚任主编, 戚兆德任副主编. 第八、九章由刘春岚执笔, 第十、十一章由戚兆德执笔, 第十二、十三章由王承中执笔. 最后由刘春岚统改定稿.

在此对李炳坤、冷钧和高慧同志深表谢意, 由于他们的支持和帮助才使本书得以出版.

由于编者水平所限, 本书一定存在不少缺点和错误, 殷切期望读者批评指正.

编 者

1992年4月

目 录

第一章 行列式.....	(1)
§ 1-1 排列的奇偶性	(1)
§ 1-2 n 阶行列式的定义	(3)
§ 1-3 行列式的性质	(8)
§ 1-4 行列式按行(列)展开	(12)
§ 1-5 行列式计算	(15)
§ 1-6 克莱姆法则(Cramer)	(21)
习题一	(26)
第二章 矩阵	(30)
§ 2-1 矩阵的概念	(30)
§ 2-2 矩阵的运算	(31)
§ 2-3 逆阵	(37)
§ 2-4 矩阵分块法	(43)
§ 2-5 矩阵的初等变换	(49)
习题二	(58)
第三章 n 维向量	(63)
§ 3-1 n 维向量及其运算.....	(63)
§ 3-2 向量组的线性相关性	(66)
§ 3-3 向量组和矩阵的秩	(71)
§ 3-4 求秩的初等变换方法	(75)
§ 3-5 向量空间	(79)
习题三	(82)
第四章 线性方程组	(85)
§ 4-1 齐次线性方程组	(85)
§ 4-2 非齐次线性方程组	(90)
§ 4-3 利用矩阵的初等变换解线性方程组	(93)

习题四	(98)
第五章 方阵的对角化	(100)
§ 5-1 特征值 特征向量	(100)
§ 5-2 矩阵的相似及其对角形	(103)
§ 5-3 正交向量组与正交矩阵	(108)
§ 5-4 使实对称矩阵相似于对角形	(114)
习题五	(121)
第六章 实二次型	(123)
§ 6-1 二次型与矩阵的关系	(123)
§ 6-2 化为标准形的正交变换法	(127)
§ 6-3 初等变换法和配方法	(131)
§ 6-4 有定二次型	(137)
习题六	(140)
第七章 线性空间与线性变换	(142)
§ 7-1 线性空间定义	(142)
§ 7-2 基与坐标	(145)
§ 7-3 线性变换的定义和性质	(153)
§ 7-4 线性变换的矩阵表示	(157)
习题七	(164)
第八章 随机事件及其概率	(167)
§ 8-1 排列与组合	(167)
§ 8-2 随机事件和样本空间	(170)
§ 8-3 事件间的关系及运算	(173)
§ 8-4 频率与概率	(178)
§ 8-5 古典概型	(183)
§ 8-6 几何概型	(188)
习题八	(190)
第九章 条件概率 事件的相互独立性	
试验的相互独立性	(193)
§ 9-1 条件概率 乘法定理	(193)
§ 9-2 全概率公式 贝叶斯(Bayes)公式	(196)

§ 9-3 事件的相互独立性	(200)
§ 9-4 重复独立试验 二项概率公式	(205)
习题九	(207)
第十章 一维随机变量及其分布	(211)
§ 10-1 一维随机变量及其分布函数	(211)
§ 10-2 离散型随机变量及其概率分布	(216)
§ 10-3 常见的离散型随机变量及其概率分布	(219)
§ 10-4 连续型随机变量及其概率密度	(226)
§ 10-5 常见的连续型随机变量及其概率密度	(231)
§ 10-6 随机变量的函数的分布	(238)
习题十	(242)
第十一章 多维随机变量及其分布	(246)
§ 11-1 二维随机变量及其分布函数	(246)
§ 11-2 二维离散型随机变量	(248)
§ 11-3 二维连续型随机变量	(252)
§ 11-4 边缘分布	(256)
§ 11-5 随机变量的相互独立性	(262)
§ 11-6 两个随机变量函数的分布	(267)
§ 11-7 n 维随机变量	(276)
习题十一	(278)
第十二章 随机变量的数字特征	(283)
§ 12-1 离散型随机变量的数学期望	(283)
§ 12-2 连续型随机变量的数学期望	(286)
§ 12-3 随机变量的函数的数学期望	(287)
§ 12-4 数学期望的性质	(291)
§ 12-5 随机变量的方差	(295)
§ 12-6 协方差和相关系数	(301)
习题十二	(305)
第十三章 大数定律和中心极限定理	(309)
§ 13-1 切比雪夫不等式 大数定律	(309)
§ 13-2 中心极限定理	(313)
习题十三	(317)

习题答案	(319)
附表	(336)

第一章 行列式

在初等数学中讨论过二、三阶行列式,并且利用它们来解二、三元线性方程组.为了研究 n 元线性方程组,需要把行列式推广到 n 阶.为此,先介绍排列等知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

§ 1-1 排列的奇偶性

在中学代数中知道,将 n 个数码 $1, 2, 3, \dots, n$ 排成一列叫做这 n 个数码的全排列,这样的全排列共有 $n!$ 个.但其中只有一个是按自然数顺序排列的,即排列 $123\dots n$.而在其它任一个排列中,一定有大数码排在小数码的前面.

一般来说,在一个排列中,有较大数码排在较小的数码之前,则对这两个数码来说构成一个逆序.在一个排列中,对于数码 i 来说,比 i 大排在 i 前面的数码个数 m_i 叫做由 i 引起的逆序数.

定义 1 n 元排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中各数码所引起的逆序数的总和称为这个排列的逆序数,记 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$.

例如,在排列 32514 中,排在 1 前面比 1 大的数码有 3, 2, 5, 于是 3 与 1, 2 与 1, 5 与 1 各构成一个逆序,则由 1 引起的逆序数为 3.同理,由 2 引起的逆序数为 1, 由 3 引起的逆序数为 0, 由 4 引起的逆序数为 1, 由 5 引起的逆序数为 0, 因此 $\tau(32514) = 5$

例 1 计算排列 621534 的逆序数

解 $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 1, m_6 = 0$. 于是

$$\tau(621534) = 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 = 8$$

例 2 计算排列 $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$ 的逆序数.

解 $m_1 = n-1, m_2 = n-2, \dots, m_{n-1} = 1, m_n = 0$, 于是

$$\tau(n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

定义 2 逆序数为奇数的排列叫奇排列,逆序数为偶数的排列叫偶排列.

例如,由于 $\tau(32514)=5$, $\tau(621534)=8$, 所以 32514 是奇排列, 621534 是偶排列.

在排列中,将任意两个数码 i 与 j 对调,其余数码不动,这种做出新排列的手续叫对换,记作 (i, j) .

例如,排列 1342756 经过对换 $(3, 6)$, 得到排列 1642753, 而这两个排列的逆序数为

$$\tau(1342756) = 4, \quad \tau(1642753) = 9$$

可见,排列 1342756 经过一次对换 $(3, 6)$ 后,改变了奇偶性. 一般地,有

定理 1 一个排列中的任意两个数码对换,排列改变奇偶性.

证明 1° 先证两个相邻数码对换的情形. 设已知排列为

$$PijQ \quad (1)$$

其中, P 与 Q 代表排列中若干个数码,记 $P=i_1i_2\cdots i_m$, $Q=j_1j_2\cdots j_r$. 施行对换 (i, j) 后得

$$PjiQ \quad (2)$$

比较(1)、(2)两个排列的逆序数,显然属于 P 或 Q 的数码位置没有变动,因此,这些数码引起的逆序数没有变化. 但若 $i > j$, 那么经过对换,数码 i 引起的逆序数不变,数码 j 引起的逆序数少 1 个. 若 $i < j$, 则经过对换,数码 i 引起的逆序数多 1 个,数码 j 引起的逆序数不变,于是排列(2)的逆序数比排列(1)的逆序数多 1 个. 不论哪种情况,排列的奇偶性总是改变了.

2° 再证一般情形. 设 i 和 j 之间有 s 个数码,这时可设已知排列为

$$Pik_1k_2\cdots k_sjQ \quad (3)$$

经过对换 (i, j) 后,得到排列

$$Pjk_1k_2\cdots k_siQ \quad (4)$$

不难看出, 这样一个对换可以通过一系列的相邻数码的对换来实现. 在(3)中, 把 i 依次与 $k_1, k_2, \dots, k_s, j$ 对换, 这样经过 $s+1$ 次相邻数码的对换, 排列(3)变成了

$$Pk_1k_2\cdots k_sjiQ \quad (5)$$

再从(5)出发, 把 j 依次与 $k_s, k_{s-1}, \dots, k_1$ 对换, 经过 s 次相邻数码的对换, 排列(5)就变成了排列(4), 这就是说, i 与 j 的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现. $2s+1$ 是奇数, 所以排列(3)与(4)的奇偶性相反. 证完.

推论 在 $n(n \geq 2)$ 个数码的所有排列中奇排列与偶排列的个数相等, 各占 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设 n 个数码的奇排列共有 P 个, 偶排列共有 q 个. 对 P 个奇排列都施行同一对换 (i, j) , 于是得到 P 个偶排列, 由于这 P 个偶排列, 再施行对换 (i, j) , 又回到原来的 P 个奇排列, 所以这 P 个偶排列两两不同. 但一共只有 q 个偶排列, 所以 $P \leq q$. 同理可得 $q \leq P$, 故 $P = q$. 由于 n 个数码的全排列共 $n!$ 个. 而 $P + q = n!$, 所以 $P = q = \frac{n!}{2}$.

例如, 由 1, 2, 3 组成的所有排列为

$$123, 231, 312$$

$$132, 213, 321$$

上面一排为偶排列, 下面一排为奇排列, 各占一半.

§ 1-2 n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式, 我们先研究三阶行列式的展开式的结构规律, 从而利用这些规律去定义 n 阶行列式. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

其中 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 代表三阶行列式中第 i 行第 j 列元素. 容易看出:

(1) 三阶行列式是一个含有 $6=3!$ 项的代数和;

(2) 每一项都是三个元素的乘积, 而这三个元素即位于不同行又位于不同列, 并且所有位于不同行不同列的三个元素的乘积 (共有 $3! = 6$ 项) 都在三阶行列式中出现, 于是任一项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 这里 $j_1j_2j_3$ 是 $1, 2, 3$ 的一个排列.

(3) 每一项三个元素的第一个下标 (行标) 排成自然顺序, 这时第二个下标 (列标) 构成三个数码 $1, 2, 3$ 的一切排列: $123, 231, 312, 321, 132, 213$, 前三个是偶排列, 与它们对应的项都取正号, 后三个是奇排列, 与它们对应的项都取负号.

故三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $\sum$ 表示对 $1, 2, 3$ 三个数的所有排列取和.

以上我们找出了三阶行列式的构造规律, 即它所含的项数, 项的构成以及每项所取的符号. 根据这一规律, 我们来定义 n 阶行列式.

定义 3 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和, 这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots$

a_{sj_s} , 当 $j_1 j_2 \cdots j_s$ 是偶排列时取正号, 当 $j_1 j_2 \cdots j_s$ 是奇排列时取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_s)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_s}$$

这里 $\sum$ 表示对列标的所有 n 级(元)排列求和.

这个定义表明, n 阶行列式正是二、三阶行列式的推广, 特别是, 当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a|$ 就是数 a (此处 $|a|$ 不是 a 的绝对值). 计算 n 阶行列式, 首先必须作出所有可能的位于不同行不同列的 n 个元素的乘积, 把这些乘积的元素的行标按自然顺序排列, 然后看列标排列的奇偶性来决定这一项的符号.

例 3 用行列式定义计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式主对角线下侧元素全为 0, 称为上三角行列式. (与此类似, 主对角线上侧元素全为 0 的行列式叫下三角行列式.)

解 这是一个 n 阶行列式, 在展开式中应有 $n!$ 项. 但由于主对角线下方元素全为 0, 因此不等于 0 的项大大减少了.

由定义知, D 的一般项为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

因为在 D 的第 n 行上除 a_{nn} 外其余元素全为 0, 所以只要考虑 $j_n=n$ 即可. 在第 $n-1$ 行上, 除 $a_{n-1, n-1}, a_{n-1, n}$ 外, 其余元素全为 0. 因此 j_{n-1} 只有 $n-1, n$ 这两个可能. 但由于 $j_n=n$, 所以 j_{n-1} 不能取 n , 只有 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步取下去, 易知 D 的展开式中不等于 0 的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 而这一项的列标排列 $12\cdots n$ 是偶排列, 所以这

一项带正号,即

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角行列式等于主对角线上 n 个元素的乘积,类似可以证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

作为特殊情形有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

这种行列式称为**对角行列式**.

例 4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 同例 3, 除去 0 的项外, 只有唯一一项 $a_{1n}a_{2\ n-1}\cdots a_{n1}$, 其列标排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\ n-1}\cdots a_{n1}$$

特别地, 对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

在行列式定义中,还可以把每项的 n 个元素的列标按自然顺序排列,而由行标排列的奇偶性来决定该项的符号,因此有下面的定理.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中 $\sum$ 是对行标的所有 n 级排列求和.

证明 由于数的乘法满足交换律,因此 n 个元素的次序可以是任意的.一般地, n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列.可以证明(1)的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \quad (2)$$

事实上,把(1)的 n 个元素按行标是自然顺序重新排列,也就是排成

$$a_{1 j'_1} a_{2 j'_2} \cdots a_{n j'_n} \quad (3)$$

它的符号是

$$(-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)} \quad (4)$$

现在来证明(2)和(4)是相等的.因为由(1)变到(3)可以经过一系列元素的对换来实现,每作一次对换,元素的行标与列标所成的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都同时作一次对换,也就是 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 同时改变奇偶性,所以这两个排列的逆序数之和 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性不变.也就是说,对(1)作一次元素对换

不改变(2)的值,于是经过一系列对换之后,有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_s) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_s)} = (-1)^{\tau(12 \cdots s) + \tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_s)} = (-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_s)}$$

所以

$$(-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_s)} a_{1j'_1} a_{2j'_2} \cdots a_{sj'_s} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_s) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_s)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_s}$$

当我们把每一项的列标按自然顺序排列时,有

$$(-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_s)} a_{1j'_1} a_{2j'_2} \cdots a_{sj'_s} = (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_s)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_s s}$$

于是 n 阶行列式又可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_s)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_s s}$$

例如 $a_{35} a_{23} a_{51} a_{14} a_{42}$ 是五阶行列式中的一项. $\tau(32514) = 5$, $\tau(53142) = 7$. 于是这一项的符号是 $(-1)^{5+7} = 1$.

若把这一项的行标按自然顺序排列,有 $a_{14} a_{23} a_{35} a_{42} a_{51}$, 这时列标排列的逆序数为 $\tau(43521) = 8$, 同样得到这一项的符号为 $(-1)^8 = 1$

§ 1-3 行列式的性质

定义 4 把 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次变成相应的列,所得的行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的转置行列式.

性质 1 行列式转置后其值不变,即 $D = D'$.

证明 将 D' 记为