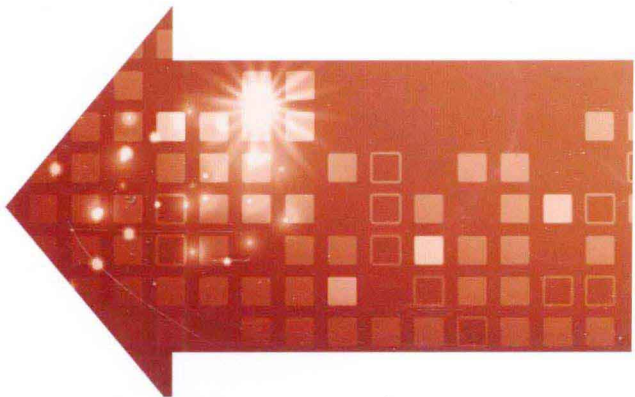
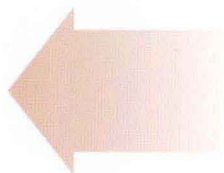


高等学校交通运输专业规划教材

运筹学

YUNCHOUXUE

寇玮华 · 编著
李宗平 · 主审



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

高等学校交通运输专业规划教材

运 筹 学

寇玮华 编著
李宗平 主审

西南交通大学出版社
· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

运筹学 / 寇玮华编著. —成都: 西南交通大学出版社, 2013.2
高等学校交通运输专业规划教材
ISBN 978-7-5643-2172-7

I. ①运… II. ①寇… III. ①运筹学—高等学校—教材
IV. ①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 020548 号

高等学校交通运输专业规划教材

运 筹 学

寇玮华 编著

责任编辑	张宝华
封面设计	本格设计
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	http://press.swjtu.edu.cn
印 刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	175 mm×230 mm
印 张	27
字 数	483 千字
版 次	2013 年 2 月第 1 版
印 次	2013 年 2 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-2172-7
定 价	39.80 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

运筹学是近几十年才发展起来的一门主要学科,是研究有关规划、管理、预测、决策等方面的学科,其应用已经深入到许多领域。

根据多年的教学经验,在参阅大量运筹学教材的基础上,完成了本书的编写。在编写过程中,时刻把握学以致用之目标和触类旁通之思路,同时以注重培养学生运用运筹学方法来分析并解决实际问题的能力为主,着重介绍运筹学的基本原理和应用方法,不过多偏重于数学方法的论证。

本书主要面向高等院校的本科生和研究生编写,特点是逻辑结构鲜明、知识要点明确,在语言表述上力求深入浅出、通俗易懂,目的是使学生能够系统、准确、轻松地掌握运筹学的主要内容。

本书分为上篇和下篇,共12章,其中上篇分为8章,下篇分为4章。上篇主要是线性规划问题,包括线性规划基础、单纯形法、对偶问题及对偶单纯形法、线性规划问题的灵敏度分析、运输问题、指派问题、整数规划、动态规划;下篇包括图与网络、统筹方法、排队论、存储论。

为了教师便于讲解和学生易于理解,对许多过于抽象的算法、方法以及要点等内容作了独特的编写。在每一章节里,针对易混淆的知识点以及需要扩展思路的问题,编写了“特别提示”。针对需要解决的实际问题,在相应的章节里对理论知识编写了扩展应用问题。另外,在每篇结束时,针对本篇的主要知识点编写了练习题,以便学生巩固所学的基础知识。

针对本书编写初期的资料收集、整理以及编写过程中的编辑、校对等工作,以下研究生们付出了大量的劳动:崔皓莹、丁振、张正东、张丽娟、袁文超、潘琢、王国成。感谢他们的辛苦付出!

本书由西南交通大学交通运输与物流学院李宗平教授主审,在主审中提出宝贵意见的同时,也对本书内容的完善和补充给予了一定的支持,在此表示诚挚的谢意!

编写过程中,参阅了部分运筹学教材以及其他的相关文献,在此向有关作者表示致谢!

由于水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请有关专家、同行和读者批评指正,以便后期修正。

寇玮华

2012年8月

目 录

绪 论	1
-----------	---

上 篇

第 1 章 线性规划基础	8
1.1 线性规划问题的提出及建立模型的步骤	8
1.2 线性规划模型的特点及三种描述形式	13
1.3 线性规划模型的构建方法示例	14
本章小结	22
习 题	22
第 2 章 线性规划问题的求解方法——单纯形法	25
2.1 线性规划问题求解的相关知识	25
2.2 单纯形法	40
2.3 单纯形法的进一步使用	48
2.4 线性规划模型解的判定	53
2.5 单纯形法的扩展应用（增加决策变量）	61
本章小结	63
习 题	64
第 3 章 对偶问题及对偶单纯形法	68
3.1 对偶问题	68
3.2 对偶单纯形法	80
3.3 对偶单纯形法的扩展应用（增加约束条件方程）	88
本章小结	90
习 题	91
第 4 章 线性规划问题的灵敏度分析	94
4.1 边际值及其应用	95
4.2 对 c_j 值的灵敏度分析	98
4.3 对 a_{ij} 值的灵敏度分析	101
4.4 对 b_i 值的灵敏度分析	105

本章小结	109
习 题	110
第 5 章 运输问题	112
5.1 运输问题的线性规划模型及特点	112
5.2 运输问题的求解方法——表上作业法	116
5.3 表上作业法对复杂运输问题的处理方法	137
本章小结	148
习 题	148
第 6 章 指派问题	151
6.1 指派问题的线性规划模型及特点	151
6.2 指派问题的求解方法——匈牙利法	154
6.3 非标准指派问题的处理方法	159
本章小结	160
习 题	161
第 7 章 整数规划	163
7.1 整数规划问题	163
7.2 0-1 规划问题	168
本章小结	175
习 题	176
第 8 章 动态规划	179
8.1 动态规划的两个引例	180
8.2 动态规划相关知识	184
8.3 动态规划模型的建立	187
8.4 动态规划模型的求解	189
8.5 动态规划应用举例	191
本章小结	202
习 题	203
上篇知识点练习题	206

下 篇

第 9 章 图与网络	213
9.1 图的相关知识	213

9.2 网络的相关知识	223
9.3 网络极值问题	224
9.4 网络流问题	242
9.5 复杂问题的网络应用	282
本章小结	297
习 题	298
第 10 章 统筹方法	302
10.1 统筹图及其绘制规则	303
10.2 统筹图的关键路线	307
10.3 统筹图关键路线的确定方法—时间参数法	309
10.4 最少工程费方案的制订	316
10.5 非确定型统筹问题	322
本章小结	326
习 题	327
第 11 章 排队论	331
11.1 排队论相关知识	332
11.2 马尔可夫排队模型	335
11.3 爱尔朗排队模型	363
11.4 其他两个排队模型	368
11.5 排队系统的最优决策问题	371
本章小结	382
习 题	382
第 12 章 存储论	384
12.1 存储论的基本概念	385
12.2 确定型存储模型	387
12.3 随机型存储模型	401
本章小结	409
习 题	410
下篇知识点练习题	412
上篇知识点练习题答案	416
下篇知识点练习题答案	421
参考文献	423

绪 论

1. 运筹学简史

运筹学问题和朴素的运筹思想可以追溯到古代，它与人类的政治活动、经济活动、军事活动紧密联系，与各种决策并存。可以说人类具有策划、决策特征的实践活动就是现代所谓的“运筹”。从历史发展来看，运筹学有三个来源，即军事、管理和经济研究。

(1) 军事是运筹学的第一个来源。

军事领域是运筹学产生、发展的一个舞台。运筹学作为科学名称出现于 20 世纪 30 年代末。当时英、美为对付德国的空袭，在英国东海岸泰晤士河口以南大约 10 英里的博德赛 (Bawdsey) 成立了研究机构，对技术上可行而应用效果不佳的雷达等设备的运用问题进行研究，当时研究机构的负责人 A. P. Powe 称之为“运用研究”或“作战研究”(Operational Research, OR)。

1981 年，美国军事运筹学会出版了一本书，书中第一句话就是“孙武子是世界上第一个军事运筹学的实践家”。这是非常恰当的，因为在著名“孙子兵法”质的论断中，渗透着深刻的量的分析。在“计篇”中，指出了算计和谋划对于决定战争胜负的重要性，认为应当从政治、天时、地利、帅和法制五个方面，对敌我双方的优劣条件进行全面的估计和分析，以估量战争的胜负。在“谋攻”篇中，指出知己知彼、百战百胜；知彼不知己或知己不知彼，胜负各半；既不知己也不知彼，仗仗皆输，其中，军事运筹学家孙武子的论断中就包含数量分析。中国军事运筹问题和运筹学思想的例子还有很多，如田忌赛马、围魏救赵、行军运粮等。

同样，在国外，运筹思想也可追溯到很早很早以前，如阿基米德、伦纳多·达·芬奇、伽利略等都研究过作战问题。第一次世界大战时，英、美军队均有应用运筹学的例子，如在 1916 年，英国的兰彻斯特 (Lanchester) 发表了一个小册子，指出了数量、优势、火力和胜负之间的动态关系，后来人们称之为兰彻斯特方程；美国的爱迪生为美国海军咨询委员会研究了潜艇攻击和潜艇回避攻击的问题，这些工作对第二次世界大战中运筹学的产生有很大影响。

1939 年，英国的博德赛 (Bawdsey) 研究站研究了新研制的对空雷达警戒系统是如何与老的作战指挥系统相配合的问题，并从整个控制系统分析了

通信系统的有效性。这些研究人员就是第二次世界大战中最早从事运筹学研究的科学工作者，他们的研究蕴含着整体性概念和系统分析的思想。

值得一提的是，最早投入运筹学研究的是诺贝尔物理学奖获得者、美国物理学家勃拉凯特（Blackett）领导的第一个以运筹学命名的研究小组。这是一个由各方面专家组成的交叉学科小组，他们活跃在第二次世界大战时期的英、美军队的决策中心，虽被当时的人们戏称为勃拉凯特马戏团，但却取得了丰硕的研究成果。第二次世界大战时期研究的军事运筹问题有很多，如搜索潜艇问题、护航问题、布雷问题、轰炸问题、运输问题等。

（2）管理是运筹学的第二个来源。

管理的范畴很广，而企业管理是管理领域中最活跃、最先进的部分。企业管理经历了三个时期，即手工式管理时期、机械化管理时期、系统化管理时期。当前，企业管理正处于系统管理时期。

管理是一门技艺，也是一门科学，管理科学是把各种科学方法运用于管理。在管理科学领域，有三个最有影响的学派：古典学派、行为学派、系统学派。

第一次世界大战前就已诞生并成熟的古典管理学派，对运筹学产生和发展的影响是非常大的，古典学派的代表人物是泰勒（Taylor）、甘特（Gantt）、古尔布雷思（Gilbreth）等。古典管理学派的中心思想是寻求一些方法，使人们自愿地联合与协作，以保持个人的首创精神和创造能力，达到增加效率之目的。以此思想为指导，可以详细分析劳动过程中的每一个动作及其相应的时间，去掉多余的動作，改进不合理的操作，找出最有效的工作方法，这就是通常所说的泰勒制的部分内容，这里面蕴含着系统分析的思想。泰勒本人对车工非常熟悉，他曾试图找出切削效率和车速、进刀量等因素之间的数学关系，现在来看，这是一个优选问题。古典管理学派的理论非常丰富，他们提出了管理的基本原则，研究了机构设置、权限、工厂布局、计划等一系列问题，也提出了举世闻名的刺激性工资制度。甘特所创造的横道图用于生产活动分析和计划安排，并发展成统筹方法，这种方法至今还在实践中应用。管理实践和管理科学的许多问题，至今仍是运筹学者大量研究的课题。

（3）经济是运筹学的第三个来源。

经济学理论对运筹学的影响是和数理经济学这一学派紧密联系的。数理经济学对运筹学，特别是运筹学中线性规划的影响，可以从 QUSNAY 于 1758 年发表的书籍《经济表》算起。当时许多经济学家对数理经济都作出了巨大贡献，最有名的是沃尔拉思（Walras）。他当时研究经济平衡问题，其数学形

式成为后来数理经济学家不断研究和深入发展的基础。

20 世纪 30 年代,奥地利和德国的经济学者推广了沃尔拉思的工作;1932 年, VON NEUMANN 提出了一个广义经济平衡模型;1939 年,苏联学者康托洛维奇发表了《生产组织和计划中的数学方法》一书。这些工作都可看做是运筹工作的先驱。需要指出的是,马克思是第一个成功地把数学运用于经济研究的无产阶级经济学家,在他毕生致力研究的《资本论》中,处处渗透着量的分析。正如恩格斯所说,马克思是当时唯一一个能用哲学(正确的方法论)来研究数学的人。事实上,在经济学家沃尔拉思钻研他的数理经济问题的同时,马克思也在研究他所碰到的数理经济问题,二人都在相应的数学理论之前,解决了各自的数理经济问题,可以说,马克思是最早把数学运用于经济研究的经济学家之一。

第二次世界大战结束以后,是经济数学和运筹学相互影响、相互促进、共同发展的繁荣时期,期间也取得了一批新的成果。

从以上简史可以看出,为运筹学的建立和发展作出贡献的有物理学家、经济学家、数学家、其他专业的学者以及各行业的实际工作者。

2. 运筹学的发展

从第二次世界大战开始、结束,直到 20 世纪 50 年代中期,运筹学主要是解决军事应用问题。20 世纪 50 年代末迄今,除了军事应用方面的研究外,运筹学还在工业、农业、经济和社会问题等各个领域内有了广泛的应用。

从运筹学理论和应用观点看,发展最好的可以说是线性规划。虽然苏联学者康托洛维奇在 1939 年就提出了类似线性规划问题的模型和“解乘法”的求解方法,但从整个线性规划理论和应用的发展来看,贡献最大的当属 G. B. Dantzig,可以说,他是线性规划的奠基人。

线性规划发展的重大事件有:

20 世纪初,丹麦哥本哈根的爱尔朗(Erlang)研究了电话呼唤的拥挤现象,在 1909 年,他发表了《电话呼唤和概率论》的著作,从此开拓了排队论这一研究领域,随后,这一科学领域的研究逐步扩大和深入发展。

1928 年, Von. Neumann 证明了对策论的基本定理。

1944 年, Von. Neumann 和经济学家 Morgonstern 合作,发表了《竞赛论与经济行为》一书,奠定了对策论这一运筹学分支的基础。1950—1959 年,此运筹学分支的基础理论得到了广泛研究。与此同时,对策论和统计决策也产生了广泛的联系,并进一步发展为决策分析。事实上,决策分析中最基本的概念——偏好(Preference)和效用(Uility),在 Von. Neumann 的书中共有

论述。另外，对策论在军事、经济理论中均有广泛的应用。

1947年，Dantzig 在解决美国空军军事规划问题时提出了单纯形解法。

1950—1956年，Von. Neumann 及 Dantzig 主要研究线性规划的对偶性理论。

1958年，Gomory 发表了整数规划的割平面法。

1960年，Dantzig 和 Wolfe 成功地研究了分解算法，并为大规模线性规划理论和算法奠定了基础。

哈奇扬 (Khachiyan) 和 Karmarka 分别在 1979 年和 1984 年都成功地研究了线性规划多项式算法，并轰动了整个运筹学术界。线性规划的提出很快得到经济学者的重视，如第二次世界大战中从事运输模型研究的美国经济学家库普曼斯 (T. C. Koopmans)，很快看到了线性规划在经济中的应用，并呼吁年轻的经济学家要关注线性规划，其中阿罗、萨缪尔森、西蒙、多夫曼和胡尔威茨等都因此获得了诺贝尔奖，并在运筹学的某些领域发挥了重要作用。

正是这些先驱者的贡献及后继者的努力，才使运筹学有了飞速发展，并形成了许多分支，如数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划、模糊规划等）、图论与网络、排队论（随机服务系统理论）、存贮论、对策论、决策论、维修更新理论、搜索论、可靠性和质量管理理论等。

作为重要的方法论，运筹学从一诞生就引起了许多国家学术界的高度重视。最早建立运筹学会的国家是英国（1948年），其次是美国（1952年）、法国（1956年）、日本和印度（1957年）等。在我国，运筹学会成立于 1980 年。1959 年，英、美、法三国的运筹学会发起并成立了国际运筹学联合会 (IFORS)，以后各国纷纷加入，我国于 1982 年加入该会。此外，一些地区性的运筹学会，如欧洲运筹协会 (EURO) 成立于 1976 年，亚太运筹协会成立于 1985 年。

运筹学往哪个方向发展，从 20 世纪 70 年代起就在西方运筹学界引起了争论，至今还没有一个统一的结论。这里提供的运筹学界的观点，仅供大家进一步学习和研究时参考。

美国前运筹学会主席邦德 (S. Bonder) 认为，运筹学应在三个领域发展：运筹学应用、运筹科学和运筹数学，并强调在协调发展的同时重点发展前两者。这是由于运筹数学在 20 世纪 70 年代已形成一个强有力的分支，对问题的数学描述已相当完善，然而却忘掉了运筹学的原有特色，忽视了对多学科横向交叉联系和解决实际问题的研究。现在，运筹学工作者面临的大量问题是经济、技术、社会、生态和政治因素交叉在一体，并成为复杂系统。所以从 20 世纪 70 年代末 80 年代初，不少运筹学家就提出了“要注意研究大

系统”“要从运筹学到系统分析”等问题。由于研究大系统的时间可能很长,因此有必要与未来学紧密联系起来。现在面临的问题大多涉及技术、经济、社会、心理等综合因素,在运筹学中除了常用的数学方法,还引入了一些非数学的方法和理论。如美国运筹学家沙旦(T. L. Saaty)于20世纪70年代末期提出的层次分析法(AHP),就可以看做是解决非结构问题的一个尝试。另外,切克兰特(P. B. Checkland)从方法论上对此进行了划分,他把传统的运筹学方法称为硬系统思考,认为它适合解决结构明确的系统的战术及技术问题,而对于结构不明确的、有人参与活动的系统就要采用软系统思考的方法。另外,借助电子计算机,研究软系统的概念和运用方法应是今后运筹学发展的一个方向。

3. 运筹学的性质与特点

运筹学是一门应用学科,至今还没有一个统一确切的定义,但若干个定义都包含这样的观点:“运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据”。这表明运筹学具有多学科交叉的特点,如综合应用经济学、心理学、物理学、化学中的一些方法。

运筹学是强调最优决策,但“最”是有点儿理想了,在实际应用中往往用次优、满意等概念代替,因此,“运筹学是一种给出问题不坏的答案的艺术,否则的话问题的结果会更坏”。

任何一门科学都要研究其他科学不研究的一种或几种自然(或社会)现象,它才能独立于科学之林。在运筹学的研究对象中,哪些现象是它独自深入研究的,大多数人认为有三类现象:一是机器、工具、设备等如何充分运用的问题,即如何实现理想(较高)的运用效率;二是竞争现象,战争、投资、商品竞争等;三是拥挤现象,即公共汽车排队、打电话、购物、飞机着陆、船舶进港等。这三类现象,其他科学分支研究得比较少,它是运筹学的研究对象,也成为和其他科学分支相区别的标志。但无论怎样看,运筹和管理都是紧密相连的,可以认为运筹学的主要研究内容有三个组成部分,即运用分析理论、竞争理论、随机服务理论或者排队论。

运筹学是一门应用数学理论和方法,针对人类实践活动中的管理决策问题,重点研究如何进行定量化分析的科学。也可以说,运筹学是数学的一门应用性科学,它通过大量的数学分析和运算,对研究对象的相关要素进行科学规划和合理安排,达到最为理想的对人力、物力、财力等的运用,实现最理想的目标。由此可见,运筹学是管理与工程专业类的重要方法论。

4. 运筹学在我国的发展

现代运筹学引入中国是在 20 世纪 50 年代后期,当时,钱学森、许国志等教授将西方的运筹学引入我国,并结合我国的特点在国内进行推广应用。特别是以华罗庚教授为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍中,使我国的运筹学研究在很多分支很快赶上了当时的国际水平。

我国在 1956 年曾用过运用学的名词,到 1957 年才正式命名为运筹学。这是从汉高祖刘邦称赞张良的话“运筹于帷幄之中,决胜于千里之外”而来的。

我国运筹学的应用是在 1957 年始于建筑业和纺织业,1958 年又开始在交通运输、工业、农业、水利建设、邮电等方面得到了应用,尤其是运输方面,提出了“图上作业法”,并从理论上证明了其科学性。在解决邮递员合理投递路线问题时,管梅谷教授提出了国外称之为“中国邮路问题”的解法。从 20 世纪 60 年代起,运筹学在我国的钢铁和石油部门也得到了全面和深入的应用。从 1965 年开始,统筹法的应用在建筑业、大型设备维修计划等方面就取得了可喜进展;进入 70 年代,全国大部分省市推广了优选法,70 年代中期最优化方法在工程设计界得到了广泛重视,而且在光学设计、船舶设计、飞机设计、变压器设计、电子线路设计、建筑结构设计和化工过程设计等方面都有成果。20 世纪 70 年代中期,排队论开始应用于港口、矿山、电信和计算机设计等方面的研究;图论曾被用于线路布置和计算机设计、化学物品的存放等;存贮论在我国的应用较晚,20 世纪 70 年代末在汽车工业和物资部门也取得了成功。近年来,运筹学的应用已趋于研究规模大且复杂的问题,如部门计划、区域经济规划等,并与系统工程难于分解。

上 篇

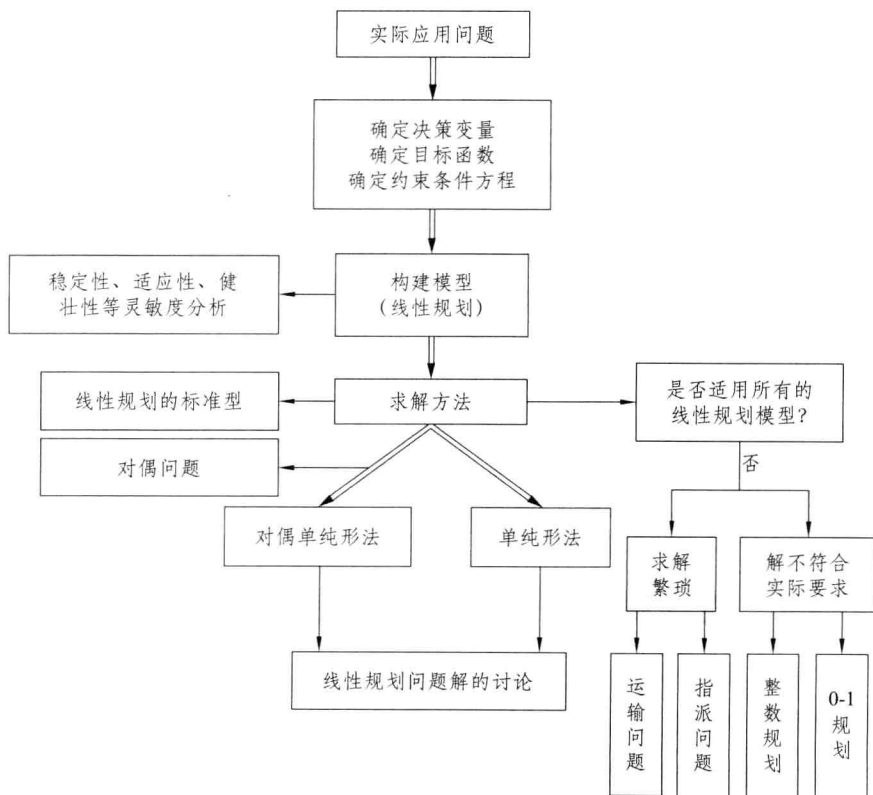
本篇内容主要是线性规划问题,学习线性规划需要具有线性代数基础知识。

本篇学习内容包括:

- (1) 针对实际问题,如何建立线性规划模型。
- (2) 针对线性规划模型,如何求解以及求解的方法有哪些。
- (3) 针对线性规划模型的稳定性、适应性、可靠性等进行灵敏度分析。
- (4) 线性规划模型特殊形式中的运输问题、指派问题、整数规划问题、0-1 规划问题。

- (5) 动态的线性规划问题,即动态规划问题。

下图给出了本书线性规划部分主要知识点之间的基本关联关系。



线性规划主要知识点关联关系图

第 1 章 线性规划基础

人们在生产实践活动中,往往会面临利用有限的资源去追求尽可能高的目标,或面临追求一定的目标而花费的代价尽可能低的问题。面对这两个问题,人们构建了运筹学的重要组成部分——数学规划理论,而线性规划是发展较早、相对成熟、应用最为广泛的数学规划理论中的一个分支。

早在 1939 年,苏联学者康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时,提出了类似线性规划问题的模型,同时给出了“解乘数法”的求解方法,但当时并未引起人们的足够重视。1947 年,美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)针对所解决的美军空军军事规划问题,提出了一般线性规划问题的求解方法,从而使线性规划的理论趋向成熟。至 1960 年,康托洛维奇再次发表《最佳资源利用的经济计算》一书后,线性规划问题又受到学者们的一致重视,康托洛维奇也由此获得了诺贝尔奖。此后,线性规划的适用领域逐渐广泛。如第二次世界大战中从事运输模型研究的美国经济学家库普曼斯(T. C. Koopmans)很快看到了线性规划在经济中的应用,并呼吁年轻的经济学家要关注线性规划,其中阿罗、萨缪尔森、西蒙、多夫曼和胡尔威茨等对线性规划问题进行了深入研究,最终形成了数学领域的一个重要分支——线性规划,线性规划也成为运筹学的重要组成部分。线性规划的研究目的主要有两个:

- (1) 利用有限的资源如何获取尽可能高的价值。
- (2) 追求一定的目标如何使付出的代价尽可能的少。

为了明确线性规划的这两个研究目的,本章主要学习什么是线性规划问题、如何构建线性规划问题的模型、线性规划模型有哪些特点以及线性规划模型的三种描述形式。

1.1 线性规划问题的提出及建立模型的步骤

基于线性规划的两个研究目的,下面引入两个例子,以便对线性规划问题以及如何建立线性规划模型有初步的了解和认识。

1. 线性规划问题的提出

下面是利用有限的资源如何获取价值最高的线性规划问题示例。

例 1.1 某企业生产甲和乙两种产品，甲、乙两种产品需要在车间 A 和车间 B 加工，相关资料如表 1.1 所示。那么该企业如何组织生产，才能使甲、乙两种产品获得的总利润最大？

为了解决上面的问题，首先需要利用给出的资料对问题进行分析，并在深入分析的基础上，用数学语言的形式将问题刻画和描述出来（把实际问题用数学语言的形式描述出来就是建立数学模型的过程）。

表 1.1

产品	车间 A 加工工时	车间 B 加工工时	单位产品利润(元)	市场限制
甲	2	1	6	无限制
乙	1	1	4	≤ 7
车间可用工时	10	8		

问题分析 把上面的问题用逻辑图的形式进行分析，如图 1.1 所示。

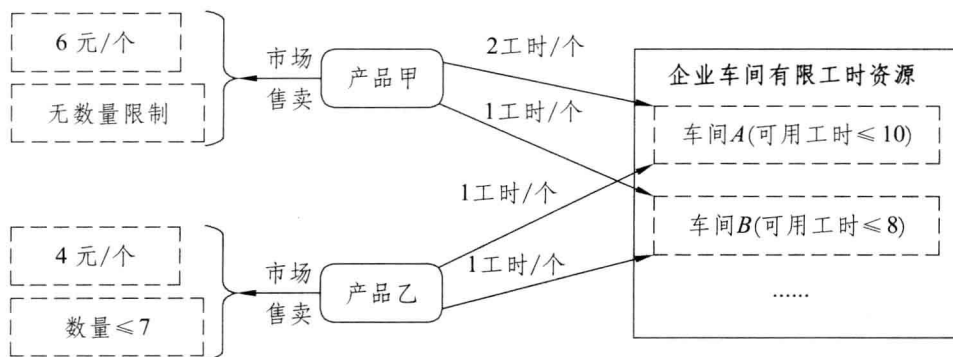


图 1.1

建立数学模型

通过分析发现，甲、乙两种产品获得总利润最大取决于是否合理配置甲、乙两种产品的生产数量。在此，用未知数 x_1 表示生产甲产品的数量，用未知数 x_2 表示生产乙产品的数量，把设定的未知数 x_1 、 x_2 称为**决策变量**。

甲、乙两种产品获得的总利润表示为 $6x_1+4x_2$ ，可以用数学表达式表示为

$$z=6x_1+4x_2$$

为了表示获得的总利润最大，用 maximize 的缩写 max 来标识，即把上面的代数式写为

$$\max z=6x_1+4x_2$$

的形式。由高等数学中函数的定义可知,此式显然是一种函数式, x_1 、 x_2 是自变量, z 是因变量, 即此式是追求目标 z 值最大的关于 x_1 、 x_2 的函数。我们把这个函数称为**目标函数**。

现在从企业内部资源, 即车间可用工时的角度考虑:

针对车间 A , 因为生产单位甲产品需要占用车间 A 的工时为 2 小时, 那么生产 x_1 个甲产品占用车间 A 的工时就为 $2x_1$ 小时; 生产单位乙产品需要占用车间 A 的工时为 1 小时, 那么生产 x_2 个乙产品占用车间 A 的工时就为 x_2 小时。当车间 A 的可用工时为 10 小时时, 生产 x_1 个甲产品、 x_2 个乙产品占用车间 A 的总工时就不能超过 10 小时, 即有

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

针对车间 B 也进行同样的分析, 有代数式

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

现在从企业外部, 即市场限制的角度考虑:

市场对甲产品无数量限制, 而市场对乙产品的数量限制是不能多于 7 个, 即有代数式

$$x_2 \leq 7$$

另外, 产品的产量不能为负数, 也不能为小数, 因此 x_1 、 x_2 必须是大于等于 0 的整数, 即有 $x_1, x_2 \geq 0$ 且为整数。

以上根据问题的约束条件产生的方程, 称为**约束条件方程**。将约束条件方程合在一起称为**约束条件方程组**, 用 subject to 的缩写 s.t. 来表示此类方程组。

将上面所有的代数式合在一起, 就是该问题的数学模型:

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且} x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

上例基于车间的有限工时资源以及市场对甲、乙产品数量的限制, 对甲、乙两种产品的生产数量进行了合理确定, 以获取最大利润。

下面是追求一定的目标如何使付出的代价最少的线性规划问题示例。

例 1.2 某公司要生产 2 000 千克由两种原材料 A 、 B 构成的混合物, 已