考研过来人都说：考前一个月持续保持竞技状态是考研高分的关键，而保持这种状态最重要的是练习与真题相当的好材料，好材料的标准是难度梯度化、基础系统化、考点综合化

文登教育集团课堂用书

考研数学 2011版

模拟考场 15套

15套标准化训练题，清除考场高分障碍，让你知彼更能知己

（数学三）

主编 陈文灯

编审 潘正义

世界图书出版公司

考研过来人都说：考前一个月持续保持竞技状态是考研高分的关键，而
是练习与真题相当的好材料，好材料的标准是难度梯度化、基础系

文登教育集团课堂用书

聚焦图书

考研数学 2011版

模拟考场15套

15套标准化训练题，清除考场高分障碍，让你知彼更能知己

（数学三）

主编　陈文灯

编委　陈文灯 潘正义 王小莉 刘晓冰 陈东一

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学模拟考场15套.3/陈文灯等编著.—北京:世界图书出版公司北京公司,2005.7

ISBN 978-7-5062-5553-0

Ⅰ.考… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第055436号

考研数学模拟考场15套(数学三)

主　　编:陈文灯

编　　委:陈文灯　潘正义　王小莉　刘晓冰　陈东一

责任编辑:世　华

装帧设计:余曙敏

出　　版:世界图书出版公司北京公司

发　　行:世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街137号　邮编:100010　电话:010－88861708)

销　　售:各地新华书店

印　　刷: 北京忠信诚胶印厂

开　　本:787×1092毫米　1/16

印　　张:13.75

字　　数:240千字

版　　次:2010年9月第6版　2010年9月第1次印刷

ISBN 978-7-5062-5553-0/H·499　　定价:22.50元

服务热线:010－88861708

致读者

众所周知，数学是当今所有学科中最基础，也是最重要的一门学科，任何人想在学业中有所发现、有所发明、有所创造就必须以数学为工具、为武器。“遥望考研通天道，欲向谁家借舟桥。历数月宫折桂者，全凭数学逞英豪”。数学分值150分，弄通弄透了，全拿；弄不明白，可能全瞎！但是现今有不少同学谈“数”色变，放弃原本钟爱的专业，改报不考数学的陌生专业，真是太可惜、太遗憾了。

数学果真那么难考吗？许多文科专业报考理工类、经济管理类专业的考研数学高分者告诉我们：只要有毅力、有恒心，夯实数学基础，通过题型掌握解题方法和技巧，数学是完全可以考好的。

数学没有考好的考生，**失分的原因主要有以下四个方面：**

✲ *对概念没有彻底搞清楚，一知半解，似是而非*。这种做题就把握不准，容易犯“南辕北辙”的错误。

✲ *定理公式只记“形式”，不记“本质”，尤其是“前提条件”*。这样似乎题也做完了，但是“劳而无功”。因为是在错误条件下得出的错误结论，是不会被认可的。

✲ *基本运算能力不强*。现在的考研数学试卷有两大特点：一是大题量，二是大计算量。如果平时不多做练习，不多记一些解题方法和技巧，做题速度自然快不了，成绩当然是不可能上去的。

✲ *格式不规范，推理不严谨*。数学推理非常严谨，环环相扣，来不得半点的“错位”和“突兀”，尤其是综合题(这类题的比重有逐年增加趋势)。有如一堆乱丝，如果理不出头绪，那就会越做越无头绪，越做越乱。

为了帮助考研同学多得分、少失分、考高分，我们编写了这15套难度与真题相当、强调基础、题型新颖丰富多样和技巧性较高的模拟训练试题。

如何使用,效率才能最高？高分学员的经验是:

(1)“复习指南”至少看完两遍之后,再做试卷可收到“事半功倍”的效果;

(2)做完至少8套试卷后要归纳总结;

(3)根据自己做题的情况,查漏补缺,有针对性地找些题做做,发扬优势,弥补不足。

汗水脸上流,
胜券手中握。

祝同学们成功!

陈文灯

2010年9月

目录

模拟考场(一)

考生注意:(1) 本试卷共 23 大题,满分 150 分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内).

(1) 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数,$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 是

(A) 单调增加的非奇非偶函数.　　(B) 单调减少的非奇非偶函数.

(C) 单调增加的奇函数.　　(D) 单调减少的奇函数.　　【　】

(2) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$,$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$,则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是

(A) $x_1<x_2$,$y_1<y_2$.　　(B) $x_1<x_2$,$y_1>y_2$.

(C) $x_1>x_2$,$y_1<y_2$.　　(D) $x_1>x_2$,$y_1>y_2$.　　【　】

(3) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 成立的充分条件是

(A) $f(-x,-y)=f(x,y)$.

(B) $f(-x,-y)=-f(x,y)$.

(C) $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$.

(D) $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$.　　【　】

(4) 以下级数或广义积分收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$,$p$ 为实数.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$,$p>1$.

(C) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$,$p>2$.　　(D) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(p-2)x}\mathrm{d}x$,$p>2$.　　【　】

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,记向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,Ⅲ:$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 如果向量组 Ⅲ 线性相关,则

(A) 向量组 Ⅰ 线性相关.

(B) 向量组 Ⅱ 线性相关.

(C) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 都线性相关.

(D) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 至少有一个线性相关.　　【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,则在下列方程组中以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 为基础解系的是

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.　(B) $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$.　(C) $\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$.　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.　【　】

(7) 设 A、B、C 为三事件，与 A 互不相容的事件是

(A) $\overline{A}B+A\overline{C}$.　(B) $\overline{A(B+C)}$.

(C) $\overline{ABC}$.　(D) $\overline{A+B+C}$.　【　】

(8) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.　【　】

二、填空题(本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上).

(9) 设 $a>0$，则 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{3}\mathrm{d}x=$ ________.

(10) 设曲线 $x=\int_1^t\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$，$y=\int_1^t\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则自原点到此曲线右边第一条垂直于 x 轴的切线之间的弧长为________.

(11) 设 $y_1=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$，$y_2=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+\mathrm{e}^x$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解，则该方程是________.

(12) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$ 则 $c=$ ________.

(13) 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{vmatrix}$，$A_{4i}$ 是 a_{4i} 的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ ________.

(14) 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是取自总体X的简单随机样本，已知统计量 $F=a\cdot\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2}{X_5^2+X_6^2+\cdots+X_{10}^2}$ 服从分布 $F(4,b)$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

三、解答题(本题共9小题，满分94分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

(15)(本题满分10分)

设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程.

(16)(本题满分 11 分)

对一切实数 t，$f(t)$ 连续，且 $f(t)>0$，$f(-t)=f(t)$，对于函数

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t\quad(-a\leqslant x\leqslant a),$$

回答下列问题：

(1) 证明 $F'(x)$ 单调增加；

(2) 当 x 为何值时，$F(x)$ 取得最小值；

(3) 若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a)-a^2-1$，求 $f(t)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$，求 $\overset{-3}{f(0)}$，$\overset{0}{f'(0)}$，$\overset{9}{f''(0)}$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$. $\frac{9}{2}$

(18)(本题满分10分)

证明:不等式$0<\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-1<\frac{1}{3(x^2-1)}$,当$x>1$时成立.

(19)(本题满分11分)

设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,且$f''(x)>0$,证明:$f(x)>x\ (x\neq 0)$.

(20)(本题满分10分)

已知2维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是2阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明:$\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 线性无关;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并讨论 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化.

(21)(本题满分10分)

设二维随机变量(X,Y)服从区域:$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$上的均匀分布,求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+Yx_3^2+2x_1x_2+2Xx_1x_3$ 为正定二次型的概率.

(22)(本题满分 11 分)

假设某段时间内来百货公司的顾客(人数)服从参数为λ的泊松(Poisson)分布,而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率为 p,且顾客之间是否购买电视机相互独立.试求这段时间内,百货公司售出 k 台电视机的概率.(假设每个顾客购买电视机数$\leqslant 1$)

(23)(本题满分 11 分)

设 Y_1,Y_2,Y_3 独立,且都服从参数为 p 的0—1分布. 令 $X_k=\begin{cases}1, & Y_1+Y_2+Y_3=k\\ -1, & Y_1+Y_2+Y_3\neq k\end{cases}$, $k=1,2$.

求:(1)(X_1,X_2) 的联合分布律;

(2)p 为何值时,$E(X_1X_2)$ 最小.

模拟考场(二)

考生注意:(1) 本试卷共23大题,满分150分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内).

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,且 $f(x)$ 是偶函数,则

(A) $F(x)$ 一定是奇函数.

(B) $F(x)$ 一定是偶函数.

(C) $F(x)$ 一定是既非奇函数,又非偶函数.

(D) 只有当 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 时,$F(x)$ 是奇函数. 【　】

(2) 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$,$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$,$n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都发散.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的都发散. 【　】

(3) 由 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的图形在(0,1)内

(A) 单调下降且向下凹. (B) 单调下降且向上凹.

(C) 单调上升且向下凹. (D) 单调上升且向上凹. 【　】

(4) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域是$(-8,8]$,则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{3n}$ 的收敛域分别是

(A) 8,$(-2,2]$. (B) 8,$[-2,2]$.

(C) 不定,$(-2,2]$. (D) 8,$[-2,2)$. 【　】

(5) 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则下列命题中正确的命题有(　　)个.

(Ⅰ) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$; (Ⅱ) $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$;

(Ⅲ) 当 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在时,$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$; (Ⅳ) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1. 【　】

(6) 已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为相似的 n 阶矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则

(A) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.

(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值与特征向量.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于同一对角矩阵.

(D) 对任意常数 t,$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似. 【 】

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,随机变量 $Y=F(X)$,则 $P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\}$ 的值

(A) 与参数 μ 和 σ 有关. (B) 与参数 μ 有关,但与 σ 无关.

(C) 与参数 σ 有关,但与 μ 无关. (D) 与参数 μ 和 σ 均无关. 【 】

(8) 设随机变量 $X_1,\cdots,X_9$ 相互独立分布,$E(X_i)=1$,$D(X_i)=1$,$i=1,\cdots,9$. 令 $S_9=\sum\limits_{i=1}^{9}X_i$,则对任意 $\varepsilon>0$,从切比雪夫不等式直接可得

(A) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\geqslant1-\frac{9}{\varepsilon^2}$. (B) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{9}{\varepsilon^2}$.

(C) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\geqslant1-\frac{1}{\varepsilon^2}$. (D) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{1}{\varepsilon^2}$. 【 】

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上).

(9) 函数 $y=f(x)$ 在点$(1,0)$处有 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$,则极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{e^x}f(t)\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)}=$ ________.

(10) 设函数 f,g 均可微,$z=f(xy,\ln x+g(xy))$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(11) 设 $D:x^2+y^2\leqslant a^2,y\geqslant0$,则 $\iint\limits_D|x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(12) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ ________.

(13) 若三维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$,则矩阵 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为________.

(14) 设某仪器有3只独立工作的同型号电子元件,其使用寿命 X(单位:小时)均服从同一指数分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$,则该仪器在使用的最初200小时内,至少有1只电子元件损坏的概率为________.

三、解答题(本题共9小题,满分94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

(15)(本题满分10分)

设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$,$f(0,\frac{\pi}{2})=1$,求 $f(x,y)$.

(16)(**本题满分11分**)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明:至少存在一个 $\xi\in(0,+\infty)$,使 $f(\xi)+\xi=0$.

(17)(**本题满分10分**)

试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$,其中 $a>1$.

(18)(本题满分10分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geqslant 0)$

(1) 讨论 L 的凹凸性；

(2) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0, y_0)，并写出切线方程；

(3) 求此切线与 L(对应于 $x \leqslant x_0$ 部分)及 x 轴所围成平面图形的面积.

(19)(本题满分11分)

(1) 计算不定积分 $\int x\arctan(x+1)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t = f(x) + x\sin x$，$f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的连续函数，求 $f(x)$.