北京四中高中数学讲义

代数

（第一册）

北京四中教学处 编

教育科学出版社

DAISHU

(京)新登字第111号

北京四中高中数学讲义
代　　数
(第一册)
北京四中教学处
责任编辑：刘　进

教育科学出版社出版、发行
(北京·北太平庄·北三环中路46号)
各地新华书店经销
河北省阜城县印刷厂印装

开本：787毫米×1092毫米　1/32　　印张：6　字数：135千
1995年4月第1版　　1995年4月第1次印刷
印数：00,001—11,000册

ISBN 7-5041-1512-6/G·1489　　定价：3.60元

编写组成员

领导小组：田　佣（副校长）赵康（教学处主任）

主　　编：刘　坤

成　　员：刘　坤　常相舜　王汉华

傅以伟　田　佣　赵　康

凌文伟

出版说明

当前，中学数学改革已经深入到课程设置和教材改革领域。我校数学教材的改革，以发展学生的数学思维为目标，以不改变现行教学大纲规定的教学内容为前提，试图通过对知识结构及其展开方式的统盘考虑，实现整体优化。经多年反复探索、实验，编成了这套尝试融教材与教法、学法于一体的《北京四中高中数学讲义》。

这套讲义的产生可以上溯到1982年。从那时起，为了发展学生智能，提高数学素养，我校部分同志就开始对高中数学教学进行以教材改革为龙头，以学法教育为重点的"整体优化实验研究"。正是在这项研究的基础上，逐步形成了这套讲义编写的特色和风格。这就是：

1. 为形成学生良好的认知结构，讲义的知识结构力求脉络分明，使学生能从整体上理解教材。

2. 为了提高学生的数学素养，本讲义把数学思想的阐述放到了重要位置。数学思想既包含对数学知识点（概念、定理、公式、法则和方法）的本质认识，也包含对问题解决的数学基本观点。它是数学中的精华，对形成和发展学生的数学能力具有特别重要的意义。为此，讲义注重展现思维过程（概念、法则被概括的过程，数学关系被抽象的过程，解题思路探索形成的过程）。在过程中认识知识点的本质，在过程中总结思维规律，在过程中揭示数学思想的指导作用。力图使学生能深刻领悟教材。

3. “再创造，再发现”在数学学习中对培养创造思维能力至关重要。为引导学生积极参与“发现”，讲义在设计上做了某些尝试。

4. 例习题的选配，力求典型、适量、成龙配套。习题分为A组（基本题）、B组（提高题）和C组（研究题）。教师可根据学生不同的学习水平适当选用。

5. 教材是学生学习的依据。应有利于培养自学能力。本书注重启迪学法，并在书末附有全部习题的答案或提示，以供学习时参考。

这套讲义在研究、试教和成书的过程中，始终得到了北京市和西城区教育部门有关领导的关怀和帮助，得到了北京师范大学数学系钟善基教授、曹才翰教授的热情指导，清华附中的瞿宁远老师也积极参与了我们的实验研究，并对这套教材做出了贡献，在此一并致以诚挚的谢意。

在编写过程中，北京四中数学组的教师们积极参加研讨，对他们的热情支持表示感谢。

这套讲义包括六册：高中代数第一、二、三册，三角、立体几何、解析几何各一册。

编写适应素质教育的教材，对我们来说是个尝试。由于水平所限，书中不当之处在所难免，诚恳希望专家、同行和同学们提出宝贵意见。

北京四中教学处

1994年11月

目　录

第一章 集 合

“集合论”是现代数学各个分支的共同基础和语言。

集合的思想是很重要的数学思想，运用这种思想，能把很多关系复杂的数学问题表述得很清楚，从而有利于问题的解决．它几乎渗透到自然科学的各个部门．

“集合论”还是使逻辑推理成为算法化的基础（使用数学符号和运算就能进行逻辑推理），因而它也是学习数理逻辑和计算机科学所必备的基础．

在初中，我们已接触到一些分别由数、式、点、图形组成的集合．在本章我们将系统学习关于集合的一些初步知识．

1.1 集合

在初中我们已经遇到过集合这个词．例如：

（1）“正数的集合”，“自然数的集合”；

（2）“单项式集合”；

（3）线段AB的垂直平分线就是到A、B两点的距离相等的点的集合；

（4）“平行四边形集合”；

（5）不等式$x-7<5$的所有的解，组成这个不等式的解的集合（简称解集）．

一般地，某些指定的对象的全体就构成一个**集合**（简称

集）．其中各个对象叫做这个集合的**元素**．如，在自然数集中，每个自然数都是它的元素．构成集合的对象可以是数、式、点、图形，也可以是其他事物．如，中国古代技术上的四大发明也可以构成一个集合，它的元素是火药、指南针、造纸术和印刷术．

集合通常用大写拉丁字母$A, B, C, \cdots$标记，集合的元素用小写拉丁字母a，b，c，…标记．如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作$a\in A$（符号$\in$表示"属于"）；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记作$a\notin A$（符号$\notin$表示"不属于"）*．例如，若A表示"小于10的素数"的集合，那么，$2\in A, 9\notin A, 1\notin A$．

集合是数学中的不加定义的概念之一（逻辑学上称之为原始概念或原名），对这类概念通常仅仅做出必要的描述．

在描述一个集合的时候，首先必须明确表示**对象的确定性**，即对于任何一个对象，应能判断它是否属于这个集合．如，"我班不低于1.60米的同学"能构成一个集合，而"我班高个子的同学"却不能构成一个集合，这是因为"高个子"没有指出确定的标准，因而，对我班任何一个同学都无法实行上述判断．同样，"我国著名的科学家"也不能构成一个集合．

其次，通常约定只研究由不同元素构成的集合．因此，在同一个集合中是绝对不允许存在相同元素的．这就是所谓**集合中元素的互异性**．

集合的表示法，常用的有列举法和描述法．

把集合中的所有元素一一列出（注意用逗号隔开，写

---

* 有的书也用$\overline{\in}$表示"不属于"．

在花括号内，这种表示集合的方法叫做**列举法**．例如

由a，b，c三个字母构成的集合为$\{a, b, c\}$；

小于10的素数的集合是$\{2, 3, 5, 7\}$；

由单项式ab，$-x^2$，15，$-m$，pqr构成的集合可以写成$\{ab, -x^2, 15, -m, pqr\}$；

方程 $x-4=0$的解的集合是$\{4\}$．

在用列举法表示集合时，不必考虑元素的书写顺序．如$\{1, 2, 3\}$，$\{3, 2, 1\}$，$\{2, 1, 3\}$都表示同一个集合．这就是所谓集合中**元素的无序性**．

应该注意：a与$\{a\}$是不同的．a表示一个元素，而$\{a\}$表示只含有一个元素a的集合（只含一个元素的集合称为**单元素集**）．a与$\{a\}$之间的关系应该是$a\in\{a\}$．

说明：

集合元素的确定性、互异性、无序性是一刻画集合这个概念的三条属性，有了它就使我们对集合的认识更加明确了．

有些集合不能或难以用列举法表示，例如小于5的正数的集合．对于这样的集合，可以把诸元素的共同的特征性质（或称之谓公共属性）描述出来，写在花括号内．这种表示集合的方法叫做**描述法**．如，上面的集合可以表示成{小于5的正数}或$\{x|0<x<5\}$．在后一格式中，规定竖线前面的小写字母表示该集合中的元素，竖线后面写出诸元素的共同特征．

又如，小于100的素数的集合用描述法可以简捷地表示成{小于100的素数}或$\{x|x$是素数，且$x<100\}$．

如果集合A的元素用x表示，诸x的共同的特征性质用$p(x)$表示，那么，集合A就能表示成

$$\{x|p(x)\}.$$

说明：

1° 集合A表示成$\{x|p(x)\}$意味着：凡具有性质$p(x)$的对象x都是A的元素；凡是A的元素x都具有性质$p(x)$.

2° "诸x所具有的特征性质"的含意是：只有这些x才独有的，能刻画本质的那些性质.结合上面的例子是不难理解这一点的。

再来看几个例子。

所有的直角三角形构成的集合可以表示成

$$\{直角三角形\}或\{x|x是直角三角形\}.$$

在建立了坐标系xOy的平面(今后称之为**坐标平面xOy**)上，以原点O为圆心，以r为半径的圆可以表示成

$$\{P||OP|=r，且P\in 坐标平面xOy\}.$$

方程$x^2+x-6=0$的解的集合，可表示成

$$\{x|x^2+x-6=0\}或\{2，-3\}.$$

不等式 $x-3<5$的解的集合，可表示成

$$\{x|x-3<5\}或\{x|x<8\}.$$

方程组$\begin{cases}x+y=6,\\x-y=-4\end{cases}$的解的集合，可以表示成

$$\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}x+y=6,\\x-y=-4\end{array}\right\}或\{(1,5)\}.$$

应注意$\{(1，5)\}$是个单元素集，切不可写成$\{1，5\}$.

为了简便地表示两个实数之间的所有实数构成的集合，常常使用区间的概念。

设a，b是两个实数，而且$a<b$。我们把满足$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合叫做**闭区间**，表示为$[a，b]$；把满足$a<x<b$的实数

x的集合叫做**开区间**，表示为(a, b)；把满足$a \leqslant x < b$或$a < x \leqslant b$的实数x的集合，叫做**半开半闭区间**，分别表示为$[a, b)$或$(a, b]$。这里的实数a与b都叫做相应区间的**端点**。

全体实数的集合也可以用区间表示成$(-\infty, +\infty)$，"∞"读作"无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大"。我们还把满足$x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$的实数x的集合分别表示成$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$和$(-\infty, b)$。

在数学中，由点构成的集合称为**点集**。上面以O为圆心，以r为半径的圆就是用点集表示出来的。由数构成的集合称为**数集**。下面是经常用到的几个数集，它们分别用特定的大写字母来标记：

全体自然数构成的集合称为**自然数集**，记作N；

全体整数构成的集合称为**整数集**，记作Z；

全体有理数构成的集合称为**有理数集**，记作Q；

全体实数构成的集合称为**实数集**，记作R。

为了方便，还用Q^+表示正有理数集，用R^-表示负实数集，等等。

此外，形如$2n(n \in Z)$的整数叫做**偶数***。全体偶数构成的集合称为**偶数集**。它可以表示成{偶数}或$\{x \mid x=2n, n \in Z\}$。

思考题

（1）形如$2n-1$ $(n \in Z)$的整数叫做奇数，全体奇数构成的集合称为**奇数集**。奇数集如何表示呢？

（2）被3除余1的整数可以写成$3n+1(n \in Z)$，由这

---

* 在小学里讲奇数和偶数，当时是限制在自然数集范围内．在引进零和负数之后，奇数和偶数的概念已扩大到在整数集中来定义．

些数构成的集合如何表示呢？

从上面的例子可以看出，集合中元素的个数可以是有限个，也可以是无限个，还可能是零个。我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，用符号$\varnothing$表示。如，方程$x+3=x-2$的解集是$\varnothing$；小于零的正整数集也是$\varnothing$。含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**。

习 题 一

A

1．（口答）下列各题的对象能否构成一个集合，为什么？

（1）一切很大的自然数；

（2）某城市中一切较大的商店；

（3）一些大于2且小于5的数。

2．改用列举法表示下列集合：

（1）{1的平方根}；

（2）{4的算术平方根}；

（3）{平方后仍为原数的数}；

（4）{自然数中的五个最小的完全平方数}；

（5）{6的约数}；

（6）{不大于50的素数(质数)}；

（7）$\{x \mid x^2+x-72=0\}$；

（8）$\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases} 2x+y=8, \\ x-y=1 \end{cases}\right\}$；

（9）{世界上最高的山峰}；

（10）{太阳系的九大行星}。

3．改用描述法表示下列集合(你能想出几种方式?)：

（1）$\{2, 4, 6, 8, 10\}$；

（2）{大于5且小于20的素数}；

（3）{能被3整除的大于-10，且小于10的数}；

（4）{不能被3整除的自然数}。

4. 将下列集合表示成另一形式，并指出哪些是无限集。

（1）{能整除所有自然数的数}；

（2）$\{x|x=4x\}$；

（3）$\{x|x=\sqrt{x^2}\}$；

（4）$\{x|x=2n, n\in Z\}$；

（5）$\{x|x(x^2-4)=0\}$。

5. 用符号$\in$或$\notin$填空：

（1）1____N，0____N，0.3____N，$\sqrt{2}$____N；

（2）1____Z，0____Z，-5____Z，$\sqrt{3}$____Z；

（3）1____Q，0____Q，0.3____Q，$\sqrt{5}$____Q；

（4）5____R，$\sqrt{2}$____Q，$-\sqrt{3}$____R，0____$\varnothing$。

6. 方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=4, \\ z+x=5 \end{cases}$ 的解集写成下列中的____是正确的：

(A) $\{2, 1, 3\}$　　(B) $\{3, 2, 1\}$

(C) $\{1, 2, 3\}$　　(D) $\{(2, 1, 3)\}$

B

7. 设P表示平面α内的动点，A、B、O分别是平面α内的三个定点，属于下列集合的点构成平面α内的什么图形？

（1）$\{P||PA|=|PB|\}$；

（2）$\{P||PO|=3\text{厘米}\}$；

（3）$\{P \mid |PO \geqslant 2$，且$|PO| \leqslant 3\}$．

8．设两个集合$A=\{1, 2\}$，$B=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$．则下列关系中正确的是　　　　（　　）

(A) $A \in B$　(B) $1 \in B$　(C) $\{2\} \notin B$

(D) $\varnothing \overline{\in} B$

9．用描述法表示下列各个集合：

（1）直角坐标系第一象限内所有的点的坐标；

（2）过点$A(0,0)$和$B(1,1)$的直线上所有点的坐标；

（3）以$O(0, 0)$点为顶点，且过$A(1, 1)$点开口向上的抛物线上所有点的坐标．

10．指出下列集合中所含元素，试用较简单形式表示出它们来：

（1）$\{y \mid y=x^2, x \in R\}$；

（2）$\{y \mid y=\frac{1}{x}, x \in R$，且$x \neq 0\}$；

（3）$\{(x, y) \mid x=0, y \in R\}$．

1.2　集合间的包含关系

观察集合$\{a, b, c\}$与$\{a, b, c, d, e\}$可以发现，前者的任何一个元素都是后者的元素．同样，偶数集中的任何一个元素，也都是整数集中的元素．概括象这样的两个集合间的关系就得到

定义1　对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A就叫做集合B的**子集**，记作

$$A \subseteq B \text{ （或} B \supseteq A\text{）},$$

读作"A包含于B"（或"B包含A"）．

练　习

用适当的符号（$\subseteq$或$\supseteq$）填空：

（1）{偶数}____Z，　　{正偶数}____N；

（2）N____Z，　Z____Q，　R____Q；

（3）{语文，数学，外语}____{高一年级开设的课程}。

对于空集$\varnothing$，我们规定它是任何集合A的子集，即

$$\varnothing\subseteq A.$$

问1　根据定义1回答：

（1）集合A与其自身有没有包含关系，即$A\subseteq A$能否成立？

（2）若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，A与C有没有包含关系？

对这两个问题，分析如下：

（1）若A是空集，则$A\subseteq A$；若A不是空集，则任取$x\in A$，都有$x\in A$，据定义1有

$$A\subseteq A$$

（2）从包含（或包含于）的意义不难猜出

$$A\subseteq B,\text{ 且}B\subseteq C\Longrightarrow A\subseteq C.$$

这里，符号“$\Longrightarrow$”表示从左边必能推出右边。

证明：对A分两种情况：

1°　若A是空集，则$A\subseteq C$；

2°　若A不是空集，则对任意的$x\in A$，

$\because$　$A\subseteq B$，则有$x\in B$，

又　$\because$　$B\subseteq C$，则有$x\in C$。

即　对任意的$x\in A$，都有$x\in C\Longrightarrow A\subseteq C$。

由1°，2°可知，$A\subseteq C$。

这条子集的性质告诉我们，集合的包含关系具有**传递性**。

练　习　设集合B为$\{1, 2, 3\}$，按下列要求填空：

$\left.\begin{array}{l}\text{（1）}B\text{的不含元素的子集是}\_\_\_\_,\\ \text{（2）}B\text{的单元素子集有}\_\_\_\_\_\_\_\_,\\ \text{（3）}B\text{的双元素子集有}\_\_\_\_\_\_\_\_,\\ \text{（4）}B\text{的元素最多的子集是}\_\_\_\_,\end{array}\right\}$ 共有子集____个。

这里所列出的集合虽然都是集合B的子集，但前三题中的子集至少都比集合B少一个元素，而第（4）题中子集的元素却与集合B中的元素完全相同。为刻画这种区别，引入下面两个定义。

定义2　对于集合A、B，若$A\subseteq B$，且B中至少存在一个元素$x\notin A$，则称A是B的**真子集**，记作

$A\subset B$（读作"A真包含于B"），

或　$B\supset A$（读作"B真包含A"）。

若A不是B的真子集，记作

$A\not\subset B$或$B\not\supset A$。

显然，空集是任何非空集合的真子集。

定义3　对于集合A、B，若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则称集合A与B**相等**，记作

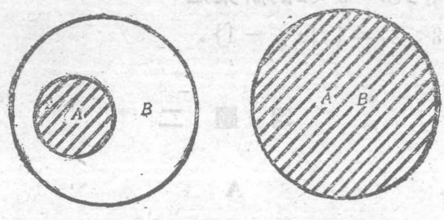
$A=B$（读作"A等于B"）

很明显，当$A=B$时，若A是空集（记作$A=\varnothing$），则$B=\varnothing$；若A不是空集（记作$A\neq\varnothing$），则A与B的元素应该完全相同。这就是上述练习中第（4）题的情况。

集合A包含于B（$A\subseteq B$）可以用图1-1形象地表示出来。其中封闭曲线A、B内部的点分别表示集合A、B的元素（必要时，还可以用小写字母分别写出A、B的某些元素）*。

---

*这种用封闭曲线表示集合的方法是英国逻辑学家Joh　nvenn（文恩）首先使用的，被称作**文恩图**.



情况1　　　　情况2

图 1-1

例1　写出$\{a, b, c, d\}$的所有子集，并指出哪些是真子集。

解：$\{a, b, c, d\}$的子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$，$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{b, c, d\}$，$\{c, d, a\}$，和$\{a, b, c, d\}$。共16（即2^4）个。其中前15个都是$\{a, b, c, d\}$的真子集。

例2　若已知$\{1, 2\} \subseteq X \subset \{1, 2, 3, 4\}$，求集合$X$的所有可能情况。

解：由$X \subset \{1, 2, 3, 4\}$可知，X是$\{1, 2, 3, 4\}$的真子集，它最多含有三个元素；由$\{1, 2\} \subseteq X$可知，$\{1, 2\}$真包含于X或者等于X，所以X至少含有1，2这两个元素。因此，$X=\{1, 2\}$，或$X=\{1, 2, 3\}$，或$X=\{1, 2, 4\}$。

例3　写出方程$x^2-2x-3=0$的解集并化简。

解：方程$x^2-2x-3=0$的解集是

$$\{x \mid x^2-2x-3=0\}=\{x \mid (x+1)(x-3)=0\}$$
$$=\{x \mid x=-1, \text{或} x=3\}=\{-1, 3\}.$$

例4　写出不等式$x+3<2$的解集并化简。