

与人教社最新教材同步

特级教师 点睛丛书

李琦等编

● 紧扣知识点
● 点拨能力点
● 突破重点
● 解析难点
● 澄清疑点

高二
数学

大众文艺出版社

特级教师点睛丛书

高二数学

凌文伟 李琦 李家智 编
韩乐琴 陈 娴

大众文艺出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

特级教师点睛丛书:高二数学/李琦等编.

-北京:大众文艺出版社,1999.7

ISBN 7-80094-767-X

I. 特…

II. 李…

III. 数学课-高中-教学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 27085 号

大众文艺出版社出版发行
(北京朝阳区潘家园东里 21 号)

邮编:100021

中国文联印刷厂印刷 新华书店经销

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9.875 字数 275 千字

1999 年 7 月北京第 1 版 1999 年 7 月北京第 1 次印刷

印数 1—10000 册

定 价:10.40 元

前 言

掌握知识、提高能力、开发智力是时代对基础教育的根本要求。要达到这一要求,必须全面开展素质教育。落实素质教育要依据教学大纲、教材,充分发挥课堂主渠道的作用。中学教学本身就是素质教育的有机组成部分。开展素质教育不是要脱离教材,另搞一套,重蹈语录进课堂那样的覆辙,而是要紧密结合教材,自觉将素质教育的内容融入平时的教学之中。

《特级教师点睛丛书》的编写紧扣各科《教学大纲》和《高考考试说明》,依据新的课程计划和教学内容调整意见,是与人教社统编教材配套使用的最新课外读物,是在中学教学中落实素质教育的尝试。

丛书与教材单元同步,每个单元分为“知识点、考点分析与运用”、“重点、难点、疑点突破”、“解题方法与避错指导”、“同步能力检测”四部分。力求帮助同学们处理好在平时学习中普遍感到棘手的“课内与课外”、“知识与能力”、“单项与综合”、“学习与考试”等的关系;注意全面、系统、科学、精要地归纳总结每个单元的知识要点、疑点、难点与考点;结合学生实际,深入浅出地分析解题思路;指出学生容易发生的失误,有针对性地给予避错指津;让学生在掌握了规律和方法后,能够举一反三,从而把学生从题海中解脱出来,变被动应试式学习为主动积极地求知,全面提高自己的素质。

《特级教师点睛丛书》的编写集知识性、科学性、实用性于一体，能帮助同学们学会迅速准确地获取知识，循序渐进地改善自己的知识结构；加深对所学知识的全面理解；训练自己科学简捷地思考问题，言简意赅地解决问题的能力；提高自己对已有知识的运用能力。

为便于高三学生进行高考总复习，高考分册涵盖了高考的全部内容，并进行了深化，体例上作了适当调整，增强了高考总复习的针对性和实用性。

由于编写时间仓促，疏漏错误之处在所难免，诚请专家和广大师生批评指正。

编 者

1999 年 6 月

目 录

代数部分

第五章 不等式	(1)
第一单元 不等式的性质	(1)
知识点、考点分析与运用	(1)
重点、难点、疑点突破	(3)
解题方法与避错指导	(4)
同步能力检测	(7)
第二单元 不等式的解法	(9)
知识点、考点分析与运用	(9)
重点、难点、疑点突破	(11)
解题方法与避错指导	(12)
同步能力检测	(19)
第三单元 不等式的证明	(22)
知识点、考点分析与运用	(22)
重点、难点、疑点突破	(23)
解题方法与避错指导	(25)
同步能力检测	(36)
第四单元 不等式的应用	(38)
知识点、考点分析与运用	(38)
重点、难点、疑点突破	(39)
解题方法与避错指导	(40)
同步能力检测	(48)
第六章 数列、极限、数学归纳法	(50)

第一单元 数列	(50)
知识点、考点分析与运用	(50)
重点、难点、疑点突破	(51)
解题方法与避错指导	(52)
同步能力检测	(53)
第二单元 等差数列	(54)
知识点、考点分析与运用	(54)
重点、难点、疑点突破	(56)
解题方法与避错指导	(56)
同步能力检测	(60)
第三单元 等比数列	(62)
知识点、考点分析与运用	(62)
重点、难点、疑点突破	(64)
解题方法与避错指导	(65)
同步能力检测	(68)
第四单元 数列的极限	(71)
知识点、考点分析与运用	(71)
重点、难点、疑点突破	(73)
解题方法与避错指导	(74)
同步能力检测	(77)
第五单元 数学归纳法	(79)
知识点、考点分析与运用	(79)
重点、难点、疑点突破	(80)
解题方法与避错指导	(82)
同步能力检测	(84)
第七章 复数	(87)
知识点、考点分析与运用	(87)
重点、难点、疑点突破	(91)
解题方法与避错指导	(96)
同步能力检测	(114)

第八章 排列、组合、二项式定理	(120)
第一单元 基本原理、排列与组合	(120)
知识点、考点分析与运用	(120)
重点、难点、疑点突破	(122)
解题方法与避错指导	(124)
同步能力检测	(132)
第二单元 二项式定理	(136)
知识点、考点分析与运用	(136)
重点、难点、疑点突破	(138)
解题方法与避错指导	(139)
同步能力检测	(143)

解析几何部分

第一章 直线	(147)
第一单元 有向线段、线段的定比分点	(148)
知识点、考点分析与运用	(148)
重点、难点、疑点突破	(148)
解题方法与避错指导	(149)
同步能力检测	(153)
第二单元 直线的方程	(156)
知识点、考点分析与运用	(156)
重点、难点、疑点突破	(157)
解题方法与避错指导	(158)
同步能力检测	(163)
第三单元 两条直线的位置关系	(167)
知识点、考点分析与运用	(167)
重点、难点、疑点突破	(168)
解题方法与避错指导	(169)

同步能力检测	(174)
第二章 圆锥曲线	(178)
第一单元 曲线与方程	(178)
知识点、考点分析与运用	(178)
重点、难点、疑点突破	(179)
解题方法与避错指导	(182)
同步能力检测	(183)
第二单元 圆	(186)
知识点、考点分析与运用	(186)
重点、难点、疑点突破	(189)
同步能力检测	(194)
第三单元 椭圆、双曲线、抛物线	(197)
知识点、考点分析与运用	(197)
重点、难点、疑点突破	(210)
解题方法与避错指导	(216)
同步能力检测	(220)
第三章 参数方程与极坐标	(224)
知识点、考点分析与运用	(224)
重点、难点、疑点突破	(225)
解题方法与避错指导	(230)
同步能力检测	(236)
第一学期期中试题(A 组)	(241)
第一学期期中试题(B 组)	(244)
第一学期期末试题(A 组)	(247)
第一学期期末试题(B 组)	(250)
第二学期期中试题(A 组)	(253)
第二学期期中试题(B 组)	(256)
第二学期期末试题(A 组)	(259)
第二学期期末试题(B 组)	(262)
参考答案及解题要诀	(266)

代数部分

第五章 不等式

第一单元 不等式的性质

知识点、考点分析与运用

不等式是中学数学的重要内容之一,也是学习高等数学的重要工具.不等式的概念和性质是本章的基础,它是建立在实数集的有序性上的.

不等式的基本性质是

- (1) 对称性: $a > b \Leftrightarrow b < a$;
- (2) 传递性: $a > b, b > c \Leftrightarrow a > c$.

不等式的运算性质主要有

- (1) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$;
- (2) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$;
- (3) $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$;
- (4) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$;
- (5) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$;
- (6) $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
- (7) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$;
- (8) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$;
- (9) $a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$.

含绝对值不等式有其特殊的性质

(1) 在 $a > 0$ 时, 有等价不等式

$$|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a;$$

$$|x| < a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a.$$

(2) 对于任意给定的两个实数 a, b

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|;$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|.$$

在高考试题中, 对本节的考查主要以选择题的形式为主, 着重考查以下几点:

(1) 根据给定的条件, 利用不等式的性质判断不等式能否成立.

例如上海高考 1989 年试题:

若 $a < b < 0$, 则下列不等式中不能成立的是 ()

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C. $|a| > |b|$

D. $a^2 > b^2$

(2) 判断不等式中条件与结论之间的关系, 即条件对于结论是充分条件、是必要条件、还是充要条件.

(3) 能利用所学知识, 确定两个不等式之间的逻辑关系. 例如全国 1990 年高考理工试题:

已知 $h > 0$, 设命题甲为: 两个实数 a, b 满足 $|a-b| < 2h$; 命题乙为: 两个实数 a, b 满足 $|a-1| < h$, 且 $|b-1| < h$, 那么 ()

A. 甲是乙的充分非必要条件

B. 甲是乙的必要非充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件

D. 甲是乙的非充分又非必要条件

(4) 利用不等式的性质与实数的性质, 利用所学的基本初等函数的性质, 能进行数值大小的比较. 例如全国 1993 年新高考文史试题:

若 a, b 是任意实数, 且 $a > b$, 则 ()

A. $a^2 > b^2$

B. $\frac{b}{a} < 1$

$$C. \lg(a-b) > 0$$

$$D. \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$$

重点、难点、疑点突破

学习不等式性质,要充分重视每一个不等式性质成立的条件.例如两个同向不等式进行相乘时,各数皆为正数的条件不能少.换句话说,由 $a > b, c > d$ 不能保证 $ac > bd$. 又如,两个不等式进行减与除时,必须是异向不等式. 为了避免运算错误,可转化为同向不等式的加与乘,即

$$\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -c > -d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$$

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ d > c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b > 0 \\ \frac{1}{c} > \frac{1}{d} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

对于“ $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ ”($n \in N$)这一性质的条件可以弱化为:

(1) 若 $a > b$, 则 $a^{2n-1} > b^{2n-1}$ ($n \in N$),

(2) 若 $a > b > 0$, 则 $a^{2k} > b^{2k}$ ($k \in N$).

这就是说,当指数为正奇数时,底数 a, b 可以不都是正数. 最常见的是“若 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$ ”. (请读者证明这个命题)

在学习不等式性质时,为了进一步认识条件与结论之间的内在联系,读者不妨改变约束条件(加强或削弱),并研究其对结论会有什么影响,从而明确各个不等式性质的功能.

例如研究下列问题:

(1) 若 $ma > mb > 0$, 试确定 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小关系.

(2) 若 $a < b < 0, c < d < 0$, 试确定 $\frac{a}{d}$ 与 $\frac{b}{c}$ 的大小关系.

在学习不等式的性质时,还应注意的一个问题是,对不等式进行变换时,要弄清是“等价转换”还是“非等价转换”. 例如 $a > b$ 和 $a + c > b + c$ 就属于等价转换,而 $a > b, c > d$ 和 $a + c > b + d$ 就不是等价转换.

请读者考查 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 < y < 5 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2 < x + y < 6 \\ 0 < xy < 5 \end{cases}$ 是否等价?

解题方法与避错指导

例1 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中不能成立的是()

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C. $|a| > |b|$

D. $a^2 > b^2$

【分析与解答】 此题属于运用不等式性质进行推理、判断的基本题.

$$\because a < b < 0, \therefore a - b < 0, a < 0, b < 0$$

$$\text{又} \because \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{a(a-b)} < 0$$

$$\therefore \frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}. \text{即 } \frac{1}{a-b} > \frac{1}{a} \text{ 不能成立, 应选 B.}$$

此题也可用特殊值(如设 $a = -2, b = -1$)进行验证.

例2 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要的条件是

()

A. $a < b$

B. $ab(a-b) < 0$

C. $b < a < 0$

D. $a > b$

【分析与解答】 若 $b < a < 0$, 则 $a - b > 0, ab > 0$

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0, \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

但是由 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 推不出 $b < a < 0$, 因此 $b < a < 0$ 是 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要条件, 故选 C.

例3 $|x| \leq 2$ 是 $|x+1| < 1$ 的()

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

【分析与解答】 $\because |x+1| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, 可推出 $|x| \leq 2$.

$\therefore |x| \leq 2$ 是 $|x+1| < 1$ 成立的必要条件. 但是由 $|x| \leq 2$ 推不出

$|x+1|<1$, 因此选 A.

由例 2 和例 3 可知:

若 $A \Rightarrow B$, 但 $B \nRightarrow A$, 则 A 是 B 成立的充分非必要条件, 或者称 B 是 A 成立的必要非充分条件.

例 4 若 $a, b, c \in R$, 且 $a > b > c$, 下列不等式中一定成立的是

()

A. $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

B. $ac > bc$

C. $a-c > b-c$

D. $a-b > b-c$

【分析与解答】 可运用不等式性质推出 $a-c > b-c$.

$\because a > b, \therefore a+(-c) > b+(-c)$, 即 $a-c > b-c$, 故选 C.

例 5 已知 $0 < a < 1$, 那么下列不等式中正确的是()

A. $(1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}}$

B. $\log_{(1-a)}(1+a) > 0$

C. $(1-a)^3 > (1+a)^2$

D. $(1-a)^{1+a} > 1$

【分析与解答】 此题把考查不等式的性质与考查函数的单调性结合起来, 属于基本题.

$\because 0 < a < 1, \therefore 0 < 1-a < 1$

又 $\because$ 当 $0 < 1-a < 1$ 时, 函数 $(1-a)^x$ 是减函数,

$\therefore (1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}}$. 选 A.

此题也可用排除法.

例 6 判断下列命题的真假, 并说明理由.

(1) $\frac{1}{a} < 1 \Rightarrow a > 1$;

(2) $ac < bc \Rightarrow a < b$;

(3) $a > b \Leftrightarrow ac^2 > bc^2$;

(4) $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$;

(5) $a > b, \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow a > 0, b > 0$;

(6) $a > b > 0, c \geq 0, c > d \Rightarrow ac > bd$.

【分析与解答】 (1) 是假命题. 满足 $\frac{1}{a} < 1$ 条件的数可以是负

数.

(2)是假命题. 满足 $ac < bc$ 条件的数 c 若为正数, 则有 $a < b$; 若 c 为负数, 则有 $a > b$.

(3)是假命题. 当 $c=0$ 时, 由 $a > b$ 推不出 $ac^2 > bc^2$.

(4)是真命题. $\frac{a}{b} < 0$ 与 $ab < 0$ 都表示 a, b 异号.

(5)假命题. 满足 $a > b, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 只能保证 a 与 b 同号, 不能保证它们一定是正数.

(6)真命题. 若 $c=0$, 则 $d < 0, \because a > b > 0, \therefore ac=0 > bd$ 即 $ac > bd$; 若 $c > 0$, 当 $d \geq 0$ 时, $d < 0$ 时, 也可推出 $ac > bd$.

例 7 已知 $f(x) = ax^2 - c$, 且 $-3 \leq f(1) \leq 2, -1 \leq f(2) \leq 3$, 求 $f(3)$ 的取值范围.

【分析与解答】 如果由已知条件得

$$\begin{cases} -3 \leq a - c \leq 2 & \text{①} \\ -1 \leq 4a - c \leq 3 & \text{②} \end{cases}$$

对①、②进行加减消元, 得
$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 2 \\ -3 \leq c \leq 5 \end{cases} \quad \text{③}$$

再由 $f(3) = 9a - c$ 求 $f(3)$ 的范围, 这种方法是错误的, 这是因为由①、②得③时, 它们所表示的区域不同, 不等式成立的条件也不同.

正确的解法是先由 $f(1), f(2)$ 分别表示 a, b , 即由

$$\begin{cases} a - c = f(1) \\ 4a - c = f(2) \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)], \\ -c = \frac{4}{3}f(1) - \frac{1}{3}f(2). \end{cases}$$

$$\text{得 } f(3) = 9a - c = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1).$$

$$\text{由已知: } -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq 8 \quad -\frac{10}{3} \leq -\frac{5}{3}f(1) \leq 5$$

$$\therefore -6 \leq f(3) \leq 13.$$

同步能力检测

选择题

1. 若 $a, b, c \in R$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是()

A. $a + c \geq b - c$

B. $ac \geq bc$

C. $\frac{c^2}{a-b} > 0$

D. $ac^2 \geq bc^2$

2. 若 $a > b, c > d$, 则下列不等式一定成立的是()

A. $a - c > b - d$

B. $ac > bd$

C. $a - d - b + c > 0$

D. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

3. 式子 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要条件是()

A. $a < b$

B. $ab(a-b) < 0$

C. $b < a < 0$

D. $a > b$

4. 设 $xy < 0$, 则()

A. $|x+y| > |x-y|$

B. $|x-y| < |x| + |y|$

C. $|x+y| < |x-y|$

D. $|x-y| < ||x| - |y||$

5. 若 $a > b$, 则在下列四个不等关系中: ① $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, ② $a^3 > b^3$,

③ $2^{-a} < 2^{-b}$, ④ $\lg(a^2+1) > \lg(b^2+1)$, 一定成立的是()

A. ② ③

B. ① ③

C. ③ ④

D. ② ④

6. 若 $x > y > z$, $x + y + z = 0$, 则下列不等式成立的是()

A. $xy > yz$

B. $xz > yz$

C. $xy > xz$

D. $x|y| > z|y|$

7. 若 $1 < x < d$, 令 $a = (\log_d x)^2$, $b = \log_d x^2$, $c = \log_d (\log_d x)$, 则

()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

8. 若 $a^2 < x < a$, 令 $M = \log_a x^2$, $N = \log_a (\log_a x)$, $P = (\log_a x)^2$,

则()

A. $M > N > P$

B. $P > M > N$

C. $M > P > N$

D. $N > M > P$

9. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}, abc \neq 0$, 且 $|a-c| < |b|$, 则()

A. $|a| < |b+c|$

B. $|a| < |b| + |c|$

C. $|a| > |b-c|$

D. $|a| > |b| - |c|$

10. 若 $0 < a < 1$, 则下列不等式中成立的是()

A. $(1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}}$

B. $\log_{(1-a)}(1+a) > 0$

C. $(1-a)^3 > (1+a)^2$

D. $(1-a)^{1+a} > 1$