经济数学（一）

——微积分 第二版

主 编 陈传明 张学高

西南财经大学出版社

经济数学（一）

——微积分 第二版

主　编　陈传明　张学高

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学.1,微积分/陈传明,张学高主编.—2版.—成都:西南财经大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5504-0682-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①陈…②张… Ⅲ.①经济数学②微积分
Ⅳ.①F224.0②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第140195号

经济数学(一)——微积分(第二版)

Jingji Shuxue Yi:Weijifen(Dierban)

主　编:陈传明　张学高

责任编辑:孙　婧
封面设计:墨创文化
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	11.25
字　　数	250千字
版　　次	2012年8月第2版
印　　次	2012年8月第1次印刷
印　　数	1—3000册
书　　号	ISBN 978-7-5504-0682-7
定　　价	27.00元

1. 版权所有,翻印必究。
2. 如有印刷、装订等差错,可向本社营销部调换。
3. 本书封底无本社数码防伪标志,不得销售。

编委会

主　编：陈传明　张学高

副主编：冯善林　董　利

编　委：章　蓉　周　瑜　樊　舒

冯荷英　梁吉泰　甄博倩

王爱菊　邱　淑　杨　丽

李　杨　张梅荷　杨树元

再版前言

本书第一版出版以来，云南师范大学商学院一直将其用作经济数学课的教材，有些兄弟院校也先后选为教材或参考书。许多老师和读者来信给予支持和鼓励，并希望发扬务实精神，充实再版。

这次再版，保持了原有的“结合实际、突出重点、以经济数学实际来阐明教学原理”的特点，并结合多年来教学改革实践，进行修订。全书贯彻的教学思想是：教好经济数学和学好经济数学，应遵循“一观察，二思维，三运用”的认识过程，使学生亲自动手、动脑完成认识上的两个飞跃；在教学过程中要把培养能力放在首位，使学生在掌握知识的同时，掌握方法，提高能力。为此，本书增删和充实了一些内容，以经济数学的实例来说明经济数学教学的规律性，力图使未来的经济数学教师在学习和实践中，掌握经济数学教学理论，提高分析教材、处理教材和选择教材的能力；为以后开展教学研究、指导教学实践、提高经济数学教学质量打下良好的基础。

同时，本书在第一版的基础上，改正了一些书写错误，并对部分习题进行修改，使之更符合学生的能力，对本书不妥之处，恳切希望广大教师和读者批评指正。

编　者

2012 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前言

经济数学是普通高等院校本专科各专业普遍开设的一门公共基础课程。它既是学习线性代数、概率论与数理统计等后续课程的基础，也是在自然科学和经济技术等领域中应用广泛的数学工具。本书是根据教育部颁发的《经济数学基础教学大纲》编写的，其适用性强、浅显适中，适合普通高等院校经济与管理类专业的学生使用，亦可供学习本课程的读者选用。本书在编写上力求内容适度、结构合理、条理清晰、循序渐进，文字叙述方面力求简明扼要、深入浅出。

本书具有如下特点：

(1) 在满足教学要求的前提下，淡化理论推导过程；缓解课时少与教学内容多的矛盾，恰当把握教学内容的深度和广度，遵循基础课理论知识以必需够用为度的教学原则，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。

(2) 语言精简严谨，篇幅较传统教材要少，但囊括基本内容且有一定的深度。

(3) 章节安排符合认知规律，语言通俗易懂，既便于教师讲授，也易于学生阅读、理解。

(4) 注重理论联系实际和培养学生综合素质，不仅关注数学在经济类专业的直接应用，而且增加了大量数学在经济等方面应用的例子，还结合具体教学内容进行思维训练，重视培养学生的科学精神、创新意识，以更好地提高学生解决实际问题的能力。

(5) 每节后配有思考题和练习题，通过思考题试图达到使学生能换个角度理解有关知识点的目的。练习题与知识点尽量呼应，由易到难，方便学生巩固所学知识。

本书的作者均为云南师范大学商学院长期工作在教学一线的专业教师，具有丰富的教学经验；同时得到了商学院会计学院、财务管理学院和工商管理学院多位专业课教师的帮助，有效地使数学理论知识与其专业课的应用有机结合起来。

编写本书的目的，是试图为一般院校经济与管理类专业的学生提供一本适合的教材。由于编者学识有限，加上时间仓促，本书疏漏与

错误之处在所难免，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来。

注：本书中带“*”的章节为教师选讲内容。

编 者

2011 年 7 月

目 录

第一章　函数、极限和连续 …………………………………… (1)

1.1　函数的定义与性质 …………………………………… (1)

1.2　常见经济函数 …………………………………… (9)

1.3　极限的概念 …………………………………… (14)

1.4　无穷小和无穷大 …………………………………… (20)

1.5　极限的运算法则 …………………………………… (26)

1.6　两个重要极限 …………………………………… (29)

1.7　连续 …………………………………… (33)

习题一 …………………………………… (38)

第二章　导数与微分 …………………………………… (44)

2.1　导数的概念 …………………………………… (44)

2.2　导数的运算法则与基本公式 …………………………………… (51)

2.3　隐函数的导数 …………………………………… (56)

2.4　高阶导数 …………………………………… (61)

2.5　函数的微分 …………………………………… (63)

*2.6　边际函数与弹性函数 …………………………………… (68)

习题二 …………………………………… (73)

第三章　导数的应用 …………………………………… (78)

3.1　中值定理 …………………………………… (78)

3.2　洛必达法则 …………………………………… (81)

3.3　函数的单调性 …………………………………… (84)

3.4　函数的极值 …………………………………… (87)

3.5　函数的最值与最值在经济中的应用 …………………………………… (90)

*3.6　曲线的凹凸与函数图形 …………………………………… (93)

习题三 …………………………………… (97)

第四章　不定积分 …………………………………… (102)

4.1　不定积分的概念与性质 …………………………………… (102)

4.2　不定积分的换元积分法 …………………………………… (106)

4.3　分部积分法 …………………………………… (110)

4.4　几种特殊类型的函数积分举例 …………………………………… (113)

目 录

习题四 …………………………………………………………… (116)

第五章 定积分 …………………………………………………… (121)
5. 1 定积分的概念 ……………………………………………… (121)
5. 2 定积分的性质 ……………………………………………… (123)
5. 3 定积分的计算 ……………………………………………… (125)
5. 4 定积分的运用 ……………………………………………… (129)
*5. 5 广义积分与函数 …………………………………………… (135)
习题五 …………………………………………………………… (139)

第六章 多元函数微积分 ………………………………………… (144)
6. 1 多元函数 …………………………………………………… (144)
6. 2 偏导数 ……………………………………………………… (149)
6. 3 全微分 ……………………………………………………… (155)
6. 4 二元函数的极值与最值 …………………………………… (157)
6. 5 二重积分 …………………………………………………… (160)
习题六 …………………………………………………………… (167)

第一章
函数、极限和连续

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，也是经济数学研究的主要对象。极限是在研究变量的变化趋势时所引出的一个非常重要的概念。微积分中的许多概念，例如连续、导数、定积分等都建立在极限的基础上，而极限方法又是我们研究函数的一种最基本的方法。在本章里，我们将分别对函数、极限和连续的有关知识进行分析和研究。

1.1　函数的定义与性质

1.1.1　函数的定义

在自然界、人类社会和人们的思维领域，运动与变化无处不在，因而刻画这种运动与变化之间的依赖关系也就无处不在。例如，在知识经济初见端倪的今日，科学技术作为一个重要的变量因子，对生产力的发展起着重大的推动作用，更深刻地影响着人类历史的发展进程。

1. 常量与变量

在观察自然现象与研究科技问题的过程中，会遇到各种不同的量：面积、体积、长度、温度等。有的量不变化，始终保持一定的数值，这种量称为常量；有的量不断变化着，可以取不同的数值，这种量称为变量。例如，气温就是一个变量，而一个健康人的体温就是一个常量（常数）。常量可以作为变量的特例。通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量。函数就是刻画变量间在运动变化中的相依关系的数学模型。

例 1　金属圆周的面积 s 和半径 r 的关系为 $s = \pi r^2$。当圆周发生热膨胀时半径 r 发生变化，圆周面积 s 也随之发生变化；当 r 在变化范围内有确定值时，s 也就确定。在这里 r 和 s 是变量，π 和 2 是常量。

例 2　某一时期银行的人民币定期储蓄的存期与利率如表 1 - 1 所示。

表 1 - 1

存期	三个月	六个月	一年	二年	三年	五年
年利率(%)	3.10	3.30	3.50	4.40	5.00	5.50

这张表给出了年利率与存期的关系。

上述两例的实际意义、表达方式虽不相同，但具有共同之处：都表达了两个变量在变化过程中的对应关系。

2. 函数的定义及其表示方法

定义 1.1 如果在某个变化过程中有两个变量 x、y，并且对于 x 在某个变化范围 X 内的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 x 为自变量，y 为因变量。x 的取值范围 X 叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 Y 叫做函数的值域。即：

$$f=\{y \mid y=f(x), x \in X\}$$

函数定义表明了函数模型的结构，它由定义域、对应法则和值域三个要素所构成，定义域和对应法则是主导要素，值域是派生要素，这一模型如同一部机器，把 X 中的唯一原料 x 输入 $f(x)$，便能产生实数 $y=f(x) \in Y$。常用的函数符号有 f、g、φ 等。

函数的表示方法通常有三种：解析法、表格法和图像法。

如，例 1 表明圆面积 s 是半径 r 的函数，为解析法；例 2 表明了年利率与存期之间的对应函数关系，它是表格法。下面再介绍图像法。

例 3 心理学研究表明，小学生对新概念的接受能力 G（学习兴趣、注意力、理解力的某种量度）随着时间 t 的变化规律为：$G(t)=-0.1t^2+2.6t+43, t \in [0,30]$。接受能力曲线如图 1－1 所示。通过函数表达式的分析和曲线的几何形态可以了解儿童的接受能力 $G(t)$ 随时间 t 的变化规律，即接受能力何时上升、何时达到顶峰、何时下降。

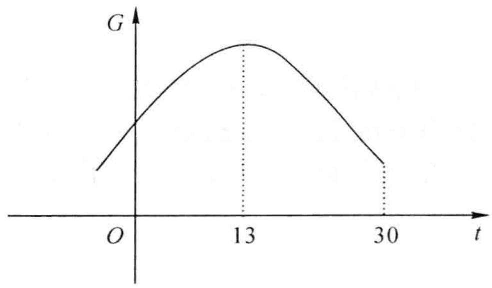


图 1－1

3. 分段函数

有些函数在定义域上的对应法则不能由一个式子表示，而是在定义域的不同区间上由不同的式子来表示，这样的函数叫做分段函数。分段函数是由几个关系式合并起来表示的一个函数，而不是几个函数。对于自变量 x 在定义域内的某个值，函数 y 只能有唯一的值与其对应。分段函数的定义域是各段自变量取值的集合的并集。

例 4 在统计表上，饮食消费占日常支出的比例称为恩格尔系数，它反映了一个国家或地区富裕的程度，是国际通用的一项重要经济指标。

联合国根据恩格尔系数来划分一个国家国民富裕程度：恩格尔系数小于 20% 为绝对富裕，大于 20%（含 20%）但小于 40% 属比较富裕，大于 40%（含 40%）但小于 50% 算小康水平，大于 50%（含 50%）但小于 60% 刚够温饱，60% 以上（含 60%）则为贫困。试用图像法表示国民富裕程度。

解：以 x 表示恩格尔系数，对富裕程度以 y 表示，则国民富裕程度如图 1－2 所示。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

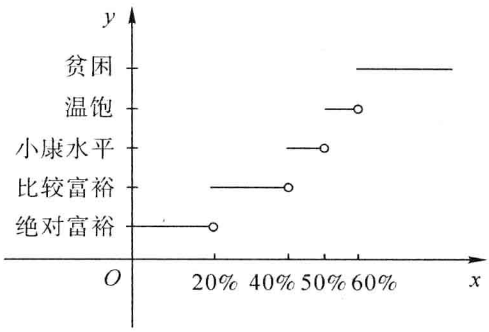


图 1－2

例 5　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3x, & x>1\end{cases}$，求：(1) $f(\frac{1}{2})$，$f(2)$；(2) 函数定义域并画出图形。

解：　(1) 因为 $\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；因为 $2\in(1,+\infty)$，所以 $f(2)=6$；

(2) 函数定义域为 $[0,+\infty)$，函数图形如图 1－3 所示。

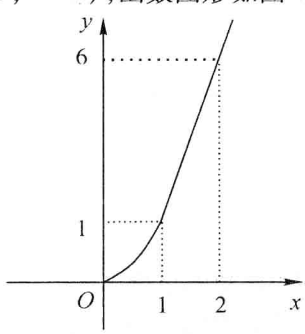


图 1－3

1.1.2　函数的性质

1. 有界性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in X$。如果存在正数 M，使对于任意 $x\in X$，均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是无界的。

例 6　函数 $y=x^2$ 在定义域 $X=(-\infty,+\infty)$ 内无界，这是因为函数值可以任意大；但在一个确定的区间 $I=[a,b]$ 内，它又是有界函数，这是因为取 $x\in[a,b]$，均有 $|y|\leqslant M$，$M=\mathrm{Max}(a^2,b^2)$。

函数的有界性是相对于指定区间而言的。

2. 单调性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 X，对于区间 $I\subset X$ 内，任取两点 x_1，x_2：① 当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加，区间 I 称为单调增区间，如图 1－4 所示；② 当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内单调减少，区间 I 为单调减区间，如图 1－5 所示。

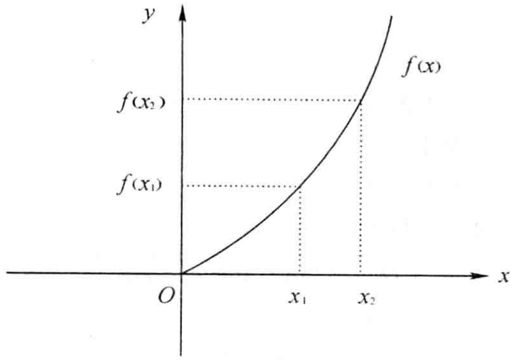


图 1－4

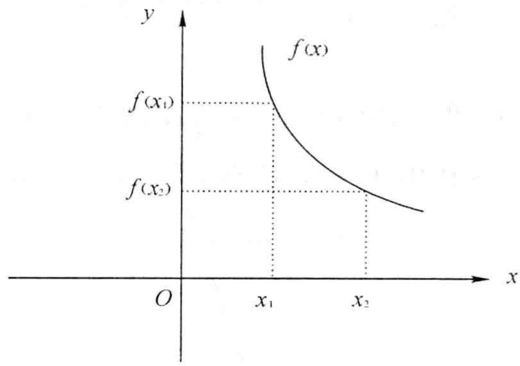


图 1－5

单调增区间和单调减区间称为函数的单调区间。

我们将在后面的章节中介绍函数单调性的判定方法。

3. 奇偶性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域 X 是关于原点对称,对于任意 $x \in X$:

(1) 若 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

(2) 若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数。

其中,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称。

例 8　判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$　　(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

解: (1) 因为 $f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$,所以 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ 是偶函数。

(2) 因为 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(\sqrt{1+x^2}+x) = -f(x)$$

所以,函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数。

注:(1) 偶函数图象是关于 y 轴对称的,奇函数的图像是关于原点对称的。

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数,且 $0 \in x$,则必有 $f(x) = 0$。

(3) 两偶函数之和是偶函数;两奇函数之和是奇函数;两偶函数之积为偶函数;两奇

函数的积也为偶函数;一奇一偶的积为奇函数。

4. 周期性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 X,如果存在正数 T,使得对于任意 $x \in X$ 都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为函数的周期。周期函数的周期每隔周期的整数倍就会重复出现。例如 $y=\sin x, y=\cos x$ 的周期是 $T=2\pi$;$y=\tan x, y=\cot x$ 的周期 $T=\pi$,正弦型曲线函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

1.1.3　初等函数

1. 反函数

一般地,在函数 $y=f(x)$ 中的 x 为自变量,y 为因变量,然而在同一过程中存在函数关系的两个变量究竟哪个是自变量,哪个因变量,并不是绝对的,要视问题的实际需求而定。例如,在商品销售中已知某商品的价格为 P,如果想从商品的销售量 Q 来确定其销售收入 R,则 Q 为自变量,R 为因变量,其函数式为:

$$R=PQ \tag{1}$$

相反地,如果需要从该商品的销售收入 R 确定销售量 Q,则这时 R 是自变量,Q 是因变量,其函数式为:

$$Q=\frac{R}{P} \tag{2}$$

我们称函数(2)是(1)的反函数,或者(1)是(2)的原函数。

定义 1.5　设函数 $y=f(x), x \in X, y \in Y$。若对于任意一个 $y \in Y$,X 中都有唯一的一个 x,使得 $y=f(x)$ 成立,这时 x 是以 Y 为定义域的 y 的函数,称它为 $y=f(x)$ 的反函数,记为:

$$x=f^{-1}(y), y \in Y$$

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中,y 是自变量,$f^{-1}(x)$ 表示函数。但我们还可以将函数中的字母 x,y 互换,把它改写成 $y=f^{-1}(x), x \in Y$。

今后凡不特别说明,函数 $y=f(x)$ 的反函数即是这种改写过的 $y=f^{-1}(x), x \in Y$ 的形式。

函数 $y=f(x), x \in X$ 与 $y=f^{-1}(x), x \in Y$ 互为反函数,它们的定义域与值域互换。

例 7　求函数 $y=2x-1$ 的反函数,并做出图像。

解:　由 $y=2x-1$ 得 $x=\dfrac{y+1}{2}$,将变量 x 与 y 对调,得 $y=\dfrac{x+1}{2}$。

这就是函数 $y=2x-1$ 的反函数。如图 1－6 所示。

定理 1　(反函数存在定理)单调函数有反函数,且单调增加(减少)的函数的反函数也是单调增加(减少)的。

求反函数按以下步骤进行:

(1) 以方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x,并写成 $x=g(y)$;

(2) 将 $x=g(y)$ 中的字母 x,y 对调,得到函数 $y=g(x)$,这就是所求的函数 $y=f(x)$ 的反函数。

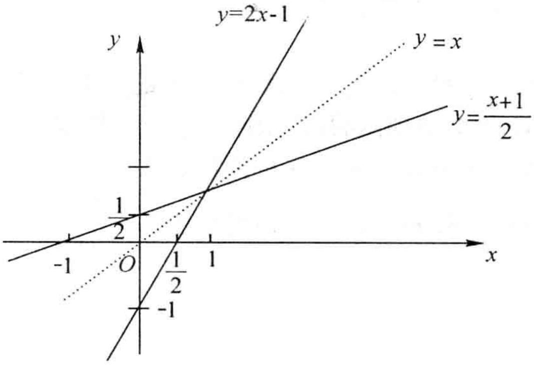


图 1 - 6

2. *初等函数*

我们学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等统称为基本初等函数。基本初等函数及其图像的性质如表 1 - 2 所示。

表 1 - 2　　　　基本初等函数及其图像性质

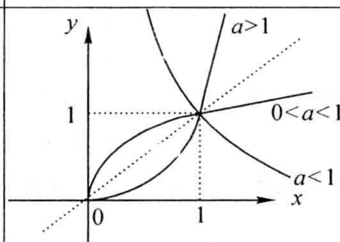
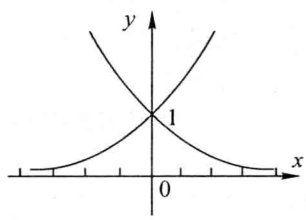
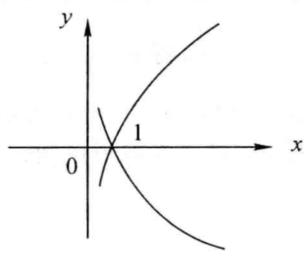
序号	函　　数	图　　像	性　　质
1	幂函数 $y = x^a, a \in R$		在第一象限，$a > 0$ 时函数单调递增 $a < 0$ 时函数单调递减，都过点(1,1)
2	指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$		$a > 1$ 时函数单调递增 $0 < a < 1$ 时函数单调递减 共性：过(0,1)点，以 x 轴为渐近线
3	对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, \text{且 } a \neq 1)$		$a > 1$ 时函数单调递增 $0 < a < 1$ 时函数单调递减 共性：过(1,0)点，以 y 轴为渐近线

表 1－2(续)

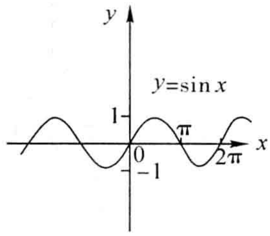
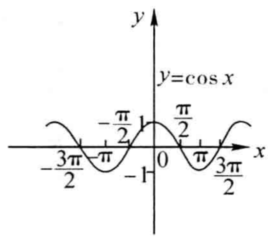
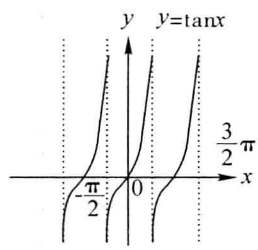
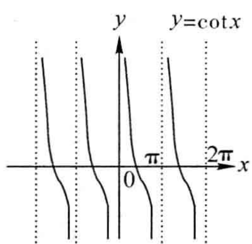
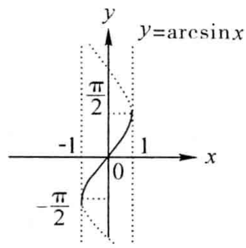
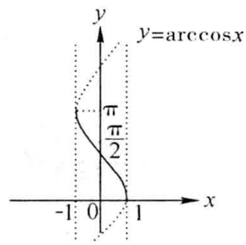
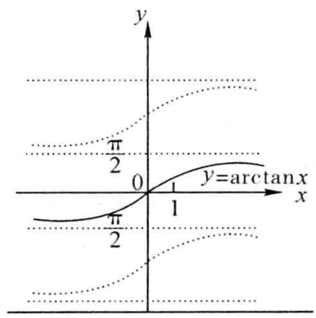
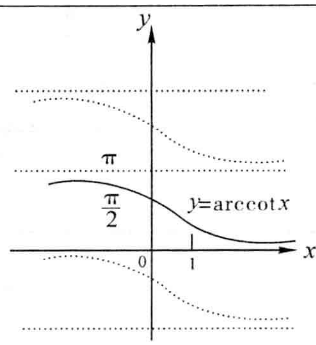
序号	函　数		图　像	性　质
4	三角函数	正弦函数 $y = \sin x$		奇函数,周期 $T = 2\pi$,有界 $\|\sin x\| \leqslant 1$
		余弦函数 $y = \cos x$		偶函数,周期 $T = 2\pi$,有界 $\|\cos x\| \leqslant 1$
		正切函数 $y = \tan x$		奇函数,周期 $T = \pi$,无界
		余切函数 $y = \cot x$		奇函数,周期 $T = \pi$,无界

表1－2(续)

序号	函数		图像	性质
5	三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$		$x \in [-1,1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,奇函数,单调增加,有界
		反余弦函数 $y = \arccos x$		$x \in [-1,1]$,$y \in [0,\pi]$,单调减少,有界
		反正切函数 $y = \arctan x$		$x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,奇函数,单调增加,有界,$y = \pm\frac{\pi}{2}$ 为两条水平渐近线
		反余切函数 $y = \text{arccot}\, x$		$x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in (0,\pi)$,单调减少,有界,$y = 0$,$y = \pi$ 为两条水平渐近线

3. 复合函数

对于函数 $y = f(u)\ (u \in B)$ 与 $u = g(x)\ (x \in A)$,如果 $x \in A$ 时,$u = g(x)$ 的值域 C 与函数 $y = f(u)$ 的定义域 B 的交集非空,即 $C \cap B \neq \Phi$,那么就说 $y = f(u)\ (u \in B)$ 与 $u = g(x)\ (x \in A)$ 可以复合,称函数 $y = f[g(x)]$ 为 $y = f(u)\ (u \in B)$ 与 $u = g(x)\ (x \in A)$ 的复合函数,其中 $y = f(u)$ 叫做外函数,$u = g(x)$ 叫做内函数。

比如,$y = \sqrt{u}\ (u \geqslant 0)$ 与 $u = -x^2\ (x \in R)$ 的复合函数是:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com