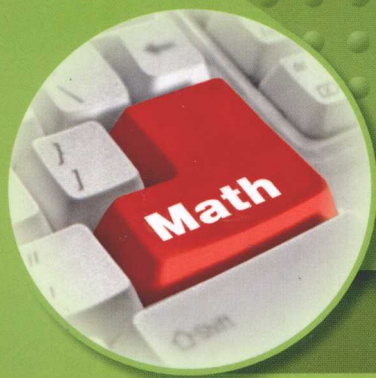




Software & Math

用计算机软件学数学系列教材

实用运筹学

——运用Excel 2010建模和求解

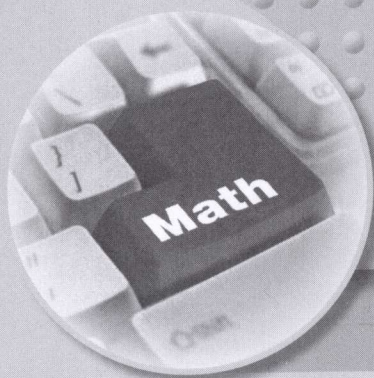
(第二版)

叶 向 编著

 中国人民大学出版社

013044973

022
141-2



Software & Math

用计算机软件学数学系列教材

实用运筹学

——运用Excel 2010建模和求解

(第二版)

叶 向 编著



中国人民大学出版社
· 北京 ·



北航

C1651642

022
141-2

图书在版编目 (CIP) 数据

实用运筹学——运用 Excel 2010 建模和求解/叶向编著. —2 版. —北京: 中国人民大学出版社, 2013. 4

用计算机软件学数学系列教材

ISBN 978-7-300-17285-9

I. ①实… II. ①叶… III. ①运筹学-教材 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 067723 号

用计算机软件学数学系列教材

实用运筹学——运用 Excel 2010 建模和求解 (第二版)

叶向 编著

Shiyong Yunchouxue

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

印 张 21.75 插页 1

字 数 510 000

邮政编码 100080

010-62511398 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2007 年 9 月第 1 版

2013 年 5 月第 2 版

印 次 2013 年 5 月第 1 次印刷

定 价 39.00 元



北航

C1651642

侵权必究

印装差错 负责调换

内容简介

本书介绍了线性规划及其灵敏度分析、运输问题和指派问题、网络最优化问题、整数规划、动态规划、非线性规划、目标规划等运筹学主要分支的基本思想、理论、方法、应用和计算机求解。书中用较多的例子介绍了运筹学在经济管理等领域中的应用。本次修订将进一步突出本书面向经济管理类专业学生的特点，对内容进行更加适当的筛选，同时对例子和习题进行大幅更新，每章的最后都增加了案例。

本书的特点是：(1) 用实际的例子来阐述运筹学的概念、原理和方法，体现了为应用而学习运筹学并在应用中学会运筹学的思想。(2) 全面引入电子表格方法。电子表格教学法是近年来美国各大学全面推广的一种运筹学（管理科学）教学法。它在 Excel 中将所需解决的问题进行描述，并使用 Excel 的命令和功能进行决策和优化。本书的重点不是数学公式的推导与计算，而是注重于如何对问题进行描述与建模，并运用计算机求解，使得运筹学（管理科学）的理论方法简明直观、容易理解与应用。本书介绍的方法是经济管理类专业的学生和研究人员研究实际问题的有效工具。

本书可作为经济管理类专业本科生的教材，也可用于研究生的教学，以及其他专业的本科、研究生教材或教学参考书，对于希望了解、认识和应用运筹学的各类人员都有一定的参考价值。

第二版前言

进入 21 世纪,我国高等院校对运筹学课程教学的需求不断扩大,计算机、信息、经济、工商管理、公共管理、金融工程,还有 MBA、MPA,等等,都对运筹学教学有不同的需求。本书的编著者是计算机出身,后来在中国人民大学的人文社会科学氛围中,逐渐吸纳了经济管理方面的知识。本人深深感到运筹学与经济管理学科领域关系之密切。例如,运筹学中的线性规划及其灵敏度分析、运输问题和指派问题、网络最优化问题、整数规划、动态规划、非线性规划、目标规划等,在经济管理中都有着直接的应用。

自从周以真教授比较系统地提出计算思维概念以来,计算思维便受到国内外计算机专家和学者的普遍关注。现在,许多高校都在积极开展计算思维的教学研究,重新审视与梳理计算机技术在各学科中的应用,培养学生的计算思维能力。

本教材第一版出版后受到了广泛的关注。许多教师、学生和其他读者在支持鼓励的同时,对本教材提出了许多宝贵的意见和建议。我们对这些意见和建议进行了认真的分析,提出了改进的思路,在出版社的大力支持下,经过努力完成了本教材的修订任务。在此修订版发行之际,我们对关爱、支持我们的各界人士表示衷心的感谢。

这次是对本教材进行的第一次修订,整体上基本保留了原书的结构。本次修订的原则和宗旨仍坚持紧密联系经济管理类本科生知识结构的需求实际,介绍运筹学的基本思想、理论、方法、应用和计算机求解。在内容安排上尽量体现新颖、实用,力求跟上时代的步伐。为此,我们本次修订对内容进行更加适当的筛选,同时对例子和习题进行大幅更新,每章的最后都增加了案例。除此之外,还做了下面一些工作:

第 1 章线性规划,增加了“建立规划模型的流程”一节;为了更加有利于教学,我们以附录形式给出了如何在 Excel 2010 中加载“规划求解”工具。

第 2 章线性规划的灵敏度分析,将“影子价格”一节改为“灵敏度分析的应用举例”,其中增加了线性规划的对偶问题和对偶规划的经济意义,并以附录形式给出了“影子价格理论简介”。

第 3 章线性规划的建模与应用,为了更好地适应不同读者的需求,我们删去了“线性规划模型的应用”一节。

第 4 章运输问题和指派问题,以附录形式介绍了“转运运输问题”和如何在 Excel 2010 中设置“条件格式”。

第5章网络最优化问题,将原来在“最大流问题”一节中的“最小费用最大流问题”分离出来,增加了“最小费用最大流问题”一节。

第6章整数规划,将原来的“0—1 整数规划”一节,分成“显性0—1 变量的整数规划”和“隐性0—1 变量的整数规划”两节。

调整最后三章的顺序,将原来的第9章动态规划调到前面(第7章动态规划),原来第7章非线性规划和第8章目标规划顺延为第8章非线性规划和第9章目标规划。

第8章非线性规划,为了介绍 Excel 2010“规划求解”工具新增的基于遗传算法的求解方法,也为了更加有利于教学和学生的学习理解,我们补充和改写了相应内容。

本书的写作基础是安装于 Windows 7 操作系统上的中文版 Excel 2010。为了能顺利学习本书介绍的例子,建议读者在中文版 Excel 2010 的环境下学习。

为了使广大读者更好地掌握教材的有关内容,加深理解并增强处理实际问题的能力,我们将本教材所有例子的 Excel 电子表格模型放在中国人民大学出版社的网站(www.crup.com.cn/jingji)上,读者可以登录该网站免费下载;为支持教师的教学,本书的作者还把她多年教学中积累的教学课件奉献给老师们,需要的老师,请与本书作者(yexiang@ruc.edu.cn)或本书的策划编辑(lilina_35@126.com)联系。

为方便教师教学和学生自学,我们还出版了本教材的同步配套辅导书《实用运筹学(第二版)——上机实验指导及习题解答》。

这里要特别感谢策划本教材第一版的潘旭燕老师,她非常热心,一直鼓励我将有自己特色的运筹学教学方法写出来,也告诉我很多写好书的方法。在本教材出版后,她积极推荐本教材给各高校的有关老师;看到许多教师、学生和其他读者这么支持本教材,建议我修订本教材。

在本教材的修订过程中参考了大量的国内外有关文献书籍,它们对本书的成文起了重要作用。在此对一切给予支持和帮助的家人、朋友、同事、有关人员以及参考文献的作者一并表示衷心的感谢。

信息学院经济信息管理系的许伟副教授认真审阅了本书稿,在此表示衷心的感谢。

同时,也要感谢中国人民大学出版社的编辑,他们对本书写作的支持以及对书稿的认真编辑和颇有效率的工作,使得本书能尽快与读者见面。

鉴于编著者的水平和经验有限,教材第二版中仍难免有不当或失误之处,恳请各位专家和广大读者给予指正并提出宝贵意见,同时欢迎同行进行交流。编著者联系邮箱是:yexiang@ruc.edu.cn。

最后,再次感谢多年来阅读和使用本教材的老师、同学和朋友,感谢他们对本书修改提出的宝贵意见和建议。

叶向

于中国人民大学信息学院

2013年3月

第一版前言

运筹学是一门基础性的应用学科，主要研究系统最优化的问题，通过建立实际问题的数学模型并求解，为决策者进行决策提供科学依据。运筹学的英文名称是 Operations Research（美）或 Operational Research（英），缩写为 OR，直译是运作研究或作战研究，运筹学是 OR 的意译，取自成语“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，具有运用筹划，出谋献策，以策略取胜等内涵。目前国外的管理科学（Management Science，MS）与运筹学的内容基本相同。

运筹学在自然科学、社会科学、工程技术生产实践、经济建设及现代化管理中有着重要的意义。随着科学技术和社会经济建设的不断发展进步，运筹学得到迅速的发展和广泛的应用。作为运筹学的重要组成部分——线性规划、灵敏度分析、运输问题和指派问题、网络最优化问题、整数规划、非线性规划、目标规划、动态规划等内容成为管理、经济类本科生所应掌握的必要知识和学习其他相应课程的重要基础。本书根据管理、经济类本科生知识结构的需要，系统地介绍了上述内容的基本理论及应用方法。内容尽力体现新颖、实用，力求跟上时代步伐。

在管理、经济类本科专业，运筹学课程的地位越来越重要。然而，在我国运筹学的教学过程中，教师往往比较侧重基本原理和算法的讲授，过于强调数学公式及其推导，较少使用计算机，与现代化管理不相适应。

近年来，美国高校运筹学（管理科学）教学的思想、内容、方法和手段有了根本的转变，主要表现在美国各大学已普遍采用“电子表格”这一全新的教学方法，运筹学（管理科学）已日益成为管理、经济类学生最重要和最受欢迎的课程之一。

在教学中使用电子表格软件已经成为运筹学和管理科学教学的一个明显的新潮流。无论是学生还是经理人都已经广泛地应用电子表格软件，这为我们进行相应的教学提供了一个舒适而愉快的环境。

自从 2003 年以来，作者一直在对中国人民大学信息学院的信息管理与信息系统 2000 级至 2004 级本科专业的运筹学的教学进行改革。其间，作者选用了国外的最新教材《数据、模型与决策——运用电子表格建模与案例研究》（翻译版），该书详细介绍了各种运筹学模型及其在 Excel 软件中的实现方法，与其他教材的不同之处在于，该书不要求学生拥有深厚的数学功底，而是运用功能强大的 Excel 软件来完成模型的建立、求解最优化方

案。作者利用这本国外教材（从开始的第1版到现在的第2版），从2003年起到现在，在中国人民大学信息学院讲授了5次，教学效果不错，得到了学生们的普遍好评。

但国外教材的例子取自国外，在教学过程中，学生也在问是否可有中国的案例，所以本人在教学过程中，也非常注意参考国内运筹学教材，试图用Excel方法去求解问题，并介绍给学生，这样积累了不少素材，从而为编写本书打下了很好的基础。应该说，本书是“教学相长”的结果。

本书部分例题参考了美国高校普遍选用的运筹学和管理科学参考书；还有部分例题选自我国已经出版的书籍，但本书运用电子表格新方法对这些例题重新进行了求解，以便读者通过比较更易于了解电子表格方法的原理和功能。

本书的编写由多人协作完成，特别要感谢我的研究生们，他们曾是我运筹学课程的学生。参与本书编写的研究生有：翁清明、李坤、袁少璋、王舒、陈斐斐、王锐、王祺伟、朱琳、李梦莎等。信息学院数学系的魏二玲副教授认真审阅了本书稿，在此表示衷心的感谢。

本书是中国人民大学第三批本科教学改革项目“运筹学课程的全面改革与建设（教材、课件、实验等）”的成果之一，受到中国人民大学教务处的资助。

这里要特别感谢负责本书出版的中国人民大学出版社的策划编辑潘旭燕老师，她非常热心，工作认真负责，一直鼓励我将最新的运筹学（管理科学）教学方法写出来，也告诉我很多怎么写好书的方法。此外，还要感谢中国人民大学信息学院的陈禹教授、方美琪教授、蒋洪迅老师以及有关同志，他们在本书的策划、编写过程中给予了大力的支持和帮助。我们在编写过程中还参考了大量的国内外有关文献书籍，它们对本书的成文起了重要作用。在此对一切给予我们支持和帮助的朋友、同事、同学、有关人员以及参考文献书籍的作者一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，恳请广大读者给予指正，欢迎相互交流讨论并提出建议。编著者电子邮箱为：yexiang@ruc.edu.cn。

叶向

2007年5月

目 录

第 1 章 线性规划	1
1.1 线性规划的基本概念和数学模型	1
1.1.1 线性规划问题的提出	1
1.1.2 线性规划的模型结构	6
1.2 线性规划的图解法	7
1.2.1 可行域与最优解	7
1.2.2 线性规划的图解法	8
1.3 使用 Excel 2010 “规划求解”工具求解线性规划问题	9
1.3.1 在 Excel 电子表格中建立线性规划模型	9
1.3.2 使用 Excel 2010 “规划求解”工具求解线性规划问题	12
1.3.3 使用名称	16
1.3.4 建好电子表格模型的几个原则	20
1.3.5 例 1.2 和例 1.3 的电子表格模型	22
1.4 线性规划问题求解的几种可能结果	25
1.4.1 唯一解	25
1.4.2 无穷多解	25
1.4.3 无解	26
1.4.4 可行域无界（目标值不收敛）	26
1.5 建立规划模型的流程	28
习题	29
案例 1.1 家用轿车装配	30
本章附录 在 Excel 2010 中加载“规划求解”工具	31
第 2 章 线性规划的灵敏度分析	33
2.1 线性规划的灵敏度分析	33
2.1.1 灵敏度分析的研究内容	33
2.1.2 对例 1.1 进行灵敏度分析	34
2.2 单个目标函数系数变化的灵敏度分析	35

2.2.1	使用电子表格进行互动分析	35
2.2.2	运用“敏感性报告”寻找单个目标函数系数的允许变化范围	36
2.2.3	运用“图解法”寻找单个目标函数系数的允许变化范围	38
2.3	多个目标函数系数同时变化的灵敏度分析	39
2.3.1	使用电子表格进行互动分析	39
2.3.2	运用“敏感性报告”进行分析	39
2.4	单个约束右端值变化的灵敏度分析	41
2.4.1	使用电子表格进行互动分析	42
2.4.2	从“敏感性报告”中获得关键信息	43
2.4.3	运用“图解法”进行分析	45
2.5	多个约束右端值同时变化的灵敏度分析	45
2.5.1	使用电子表格进行互动分析	45
2.5.2	运用“敏感性报告”进行分析	46
2.6	约束条件系数变化的灵敏度分析	47
2.7	增加一个新变量	47
2.8	增加一个约束条件	49
2.9	灵敏度分析的应用举例	50
2.9.1	力浦公司的市场利润最大化问题	50
2.9.2	力浦公司的线性规划模型和电子表格模型	51
2.9.3	力浦公司的灵敏度分析(问题1、问题2和问题3)	53
2.9.4	影子价格与线性规划的对偶问题(问题4和问题5)	54
2.9.5	影子价格在力浦公司的应用(问题4和问题5)	57
习题		57
案例 2.1	奶制品加工生产	60
案例 2.2	奶制品生产销售	60
本章附录	影子价格理论简介	61
第3章	线性规划的建模与应用	63
3.1	资源分配问题	63
3.1.1	资源分配问题的基本概念	63
3.1.2	资源分配问题的应用举例	64
3.2	成本收益平衡问题	67
3.2.1	成本收益平衡问题的基本概念	67
3.2.2	成本收益平衡问题的应用举例	68
3.3	网络配送问题	71
3.3.1	网络配送问题的基本概念	71
3.3.2	网络配送问题的应用举例	71
3.4	混合问题	74
3.4.1	混合问题的基本概念	74
3.4.2	混合问题的应用举例一:配料问题	74

3.4.3 混合问题的应用举例二：营养配餐问题	78
3.4.4 混合问题的应用举例三：市场调查问题	81
习题	84
案例 3.1 某医院护理部 24 小时护士排班计划优化研究	87
案例 3.2 回收中心的配料问题	88
第 4 章 运输问题和指派问题	89
4.1 运输问题的基本概念	89
4.2 运输问题的数学模型和电子表格模型	90
4.2.1 产销平衡的运输问题	90
4.2.2 产销不平衡的运输问题	94
4.3 运输问题的变形	101
4.4 运输问题的应用举例	107
4.5 指派问题的基本概念	114
4.6 指派问题的变形	117
4.7 指派问题的应用举例	121
习题	132
案例 4.1 菜篮子工程	135
案例 4.2 教师工作安排	135
本章附录 I 转运运输问题	136
本章附录 II 在 Excel 2010 中设置“条件格式”	142
第 5 章 网络最优化问题	146
5.1 网络最优化问题的基本概念	146
5.2 最小费用流问题	148
5.2.1 最小费用流问题的基本概念	148
5.2.2 最小费用流问题的数学模型	149
5.2.3 最小费用流问题的电子表格模型	150
5.2.4 最小费用流问题的五种重要的特殊类型	150
5.3 最大流问题	152
5.3.1 最大流问题的基本概念	152
5.3.2 最大流问题的数学模型	153
5.3.3 最大流问题的电子表格模型	154
5.3.4 最大流问题的变形	155
5.3.5 最大流问题的应用举例	156
5.4 最小费用最大流问题	164
5.5 最短路问题	168
5.5.1 最短路问题的基本概念	169
5.5.2 最短路问题的数学模型	169
5.5.3 最短路问题的电子表格模型	170
5.5.4 最短路问题的应用举例	171

5.6 最小支撑树问题	176
5.7 货郎担问题和中国邮路问题	179
5.7.1 货郎担问题	179
5.7.2 中国邮路问题	184
习题	188
案例 5.1 人员配备模型研究	192
案例 5.2 银行设置	193
第 6 章 整数规划	194
6.1 整数规划的基本概念	194
6.2 一般的整数规划	195
6.2.1 一般整数规划的求解方法	196
6.2.2 一般整数规划的电子表格模型	197
6.3 显性 0—1 变量的整数规划	199
6.4 隐性 0—1 变量的整数规划	204
6.4.1 固定成本问题	204
6.4.2 产品互斥问题	207
6.4.3 最少产量问题	210
6.4.4 两个约束中选一个约束的问题	212
6.4.5 N 个约束中选 K 个约束的问题	216
6.5 整数规划的应用举例	217
习题	225
案例 6.1 证券营业网点设置	229
第 7 章 动态规划	231
7.1 背包问题	232
7.1.1 一维背包问题	232
7.1.2 多维背包问题	234
7.2 生产经营问题	236
7.2.1 生产与存储问题	236
7.2.2 采购与销售问题	245
7.2.3 餐巾供应问题	248
7.3 资金管理问题	252
7.3.1 贷款问题	252
7.3.2 购买债券问题	256
7.3.3 连续投资问题	260
7.4 资源分配问题	268
7.4.1 资源的多元分配问题(投资分配问题)	268
7.4.2 资源的多段分配问题(多阶段生产安排问题)	271
习题	274
案例 7.1 出国留学装行李方案	277

案例 7.2 公司投资项目分析	277
案例 7.3 房地产开发公司投资项目分析	278
第 8 章 非线性规划	279
8.1 非线性规划的基本概念	279
8.1.1 非线性规划的数学模型和电子表格模型	279
8.1.2 非线性规划的求解方法	281
8.2 二次规划	285
8.2.1 非线性的营销成本问题	285
8.2.2 运用非线性规划优化有价证券投资组合	288
8.3 可分离规划	293
8.3.1 边际收益递减的可分离规划	293
8.3.2 边际收益递增的可分离规划	296
习题	300
案例 8.1 羽绒服生产销售	302
第 9 章 目标规划	304
9.1 目标规划的基本概念和数学模型	305
9.1.1 引例	305
9.1.2 目标规划的基本概念和数学模型	306
9.2 优先目标规划	309
9.2.1 优先目标规划的数学模型和电子表格模型	309
9.2.2 优先目标规划的应用举例	316
9.3 加权目标规划	322
9.3.1 加权目标规划的数学模型和电子表格模型	322
9.3.2 加权目标规划的应用举例	327
习题	333
案例 9.1 森林公园规划	334
参考文献	336

第 1 章

线性规划

本章内容要点

- 线性规划的基本概念和数学模型
- 线性规划的电子表格建模
- 线性规划的多解分析
- 建立规划模型的流程

线性规划 (linear programming, LP) 是运筹学 (operations research, OR) 中研究较早、理论和算法比较成熟的一个重要分支, 主要研究在一定的线性约束条件下, 使得某个线性指标最优的问题。

自 1947 年美国的丹齐格 (G. B. Dantzig) 提出求解线性规划的单纯形法 (LP simplex method)^① 后, 线性规划的理论体系和计算方法日趋系统和完善。随着计算机的发展, 线性规划已经广泛应用于工农业生产、交通运输、军事等各领域, 例如生产计划、投资分析、人力资源规划、选址问题、库存管理和营销决策等。因此, 线性规划也是运筹学中应用最广的分支之一。

1.1 线性规划的基本概念和数学模型

在实践中, 根据实际问题的要求, 常常可以建立线性规划的数学模型。

1.1.1 线性规划问题的提出

为了说明线性规划问题的特点, 可先看一个例子。

例 1.1 生产计划问题。某工厂要生产两种新产品: 门和窗。经测算, 每生产一扇门需要在车间 1 加工 1 小时、在车间 3 加工 3 小时; 每生产一扇窗需要在车间 2 和车间 3 各

^① 单纯形法一直是求解线性规划最有效的方法之一。有关单纯形法的基本算法请参见其他运筹学书籍。

加工 2 小时。而车间 1、车间 2、车间 3 每周可用于生产这两种新产品的的时间分别是 4 小时、12 小时、18 小时。已知每扇门的利润为 300 元, 每扇窗的利润为 500 元。而且根据市场调查得到的这两种新产品的市场需求状况可以确定, 按当前的定价可确保所有新产品均能销售出去。问该工厂应如何安排这两种新产品的生产计划, 才能使总利润最大 (以获得最大的市场利润)?

在该问题中, 目标是两种新产品的总利润最大化 (以实现市场利润的最大化为目标), 所要决策的 (变量) 是两种新产品 (门和窗) 的每周产量, 而新产品的每周产量要受到三个车间每周可用于生产新产品的的时间的限制。因此, 该问题可以用 “目标函数”、“决策变量” 和 “约束条件” 三个因素加以描述。

实际上, 所有的线性规划问题都包含这三个因素:

(1) 决策变量是问题中有待确定的未知因素。例如决定企业经营目标的各产品的产量等。

(2) 目标函数是指对问题所追求目标的数学描述。例如总利润最大、总成本最小等。

(3) 约束条件是指实现问题目标的限制因素。例如原材料供应量、生产能力、市场需求等, 它们限制了目标值所能实现的程度。

下面建立例 1.1 的线性规划 (数学) 模型。

解:

例 1.1 可用表 1—1 表示。

表 1—1 门和窗两种新产品的有关数据

	每个产品所需工时		每周可用工时 (小时)
	门	窗	
车间 1	1	0	4
车间 2	0	2	12
车间 3	3	2	18
单位利润 (元)	300	500	

(1) 决策变量。

本问题的决策变量是两种新产品 (门和窗) 的每周产量。可设:

x_1 表示门的每周产量 (扇); x_2 表示窗的每周产量 (扇)。

(2) 目标函数。

本问题的目标是两种新产品的总利润最大。由于门和窗的单位利润分别为 300 元和 500 元, 而其每周产量分别为 x_1 和 x_2 , 所以每周总利润 z 可表示为: $z = 300x_1 + 500x_2$ (元)。

(3) 约束条件。

本问题的约束条件共有四个。

第一个约束条件是车间 1 每周可用工时限制。由于只有门需要在车间 1 加工, 而且生产一扇门需要在车间 1 加工 1 小时, 所以生产 x_1 扇门所用的工时为 x_1 。由题意, 车间 1 每周可用工时为 4。由此可得第一个约束条件:

$$x_1 \leq 4$$

第二个约束条件是车间 2 每周可用工时限制。由于只有窗需要在车间 2 加工,而且生产一扇窗需要在车间 2 加工 2 小时,所以生产 x_2 扇窗所用的工时为 $2x_2$ 。由题意,车间 2 每周可用工时为 12。由此可得第二个约束条件:

$$2x_2 \leq 12$$

第三个约束条件是车间 3 每周可用工时限制。生产一扇门需要在车间 3 加工 3 小时,而生产一扇窗则需要在车间 3 加工 2 小时,所以生产 x_1 扇门和 x_2 扇窗所用的工时为 $3x_1 + 2x_2$ 。由题意,车间 3 每周可用工时为 18。由此可得第三个约束条件:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

第四个约束条件是决策变量的非负约束。非负约束经常会被遗漏。由于产量不可能为负值。所以第四个约束条件为:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

由上述分析,可建立例 1.1 的线性规划(数学)模型:

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

这是一个典型的总利润最大化的生产计划问题。其中,“max”是英文单词“maximize”的缩写,含义为“最大化”;“s. t.”是“subject to”的缩写,意思是“受约束于……”。因此,上述模型的含义是:在给定的条件限制(约束)下,求目标函数 z 达到最大时 x_1, x_2 的取值。

本章讨论的问题均为线性规划问题。所谓“线性”规划,是指如果目标函数是关于决策变量的线性函数,而且约束条件也都是关于决策变量的线性等式或线性不等式,则相应的规划问题就称为线性规划问题。

例 1.2 营养配餐问题。某饲料公司希望用玉米、红薯两种原料配制一种混合饲料,各种原料包含的营养成分和采购成本都不相同,公司管理层希望能够确定混合饲料中两种原料的数量,使得饲料能够以最低的成本达到一定的营养要求。研究者根据这一目标收集到的有关数据如表 1—2 所示。

表 1—2 玉米、红薯的营养成分和采购成本

营养成分	每公斤玉米	每公斤红薯	营养要求
碳水化合物	8	4	20
蛋白质	3	6	18
维他命	1	5	16
采购成本(元)	1.8	1.6	

解:

(1) 决策变量。

本问题要决策 (确定) 的是混合饲料中两种原料的数量 (原料采购量)。可设:
 x_1 为玉米采购量 (公斤); x_2 为红薯采购量 (公斤)。

(2) 目标函数。

本问题的目标是混合饲料的总成本最低。即:

$$\min z = 1.8x_1 + 1.6x_2 (\text{元})$$

(3) 约束条件。

① 满足营养要求:

碳水化合物的营养要求: $8x_1 + 4x_2 \geq 20$

蛋白质的营养要求: $3x_1 + 6x_2 \geq 18$

维他命的营养要求: $x_1 + 5x_2 \geq 16$

② 非负约束: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

于是, 得到例 1.2 的线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min z &= 1.8x_1 + 1.6x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 18 \\ x_1 + 5x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

这是一个典型的成本最小化问题。其中, “min” 是英文单词 “minimize” 的缩写, 含义为 “最小化”。因此, 上述模型的含义是: 在给定的条件限制 (约束) 下, 求目标函数 z 达到最小时 x_1, x_2 的取值。

例 1.3 物流网络配送问题。某物流公司需将三个工厂 (工厂 1、工厂 2、工厂 3) 生产的一种新产品运送到 A、B 两个仓库, 工厂 1 和工厂 2 的产品可以通过铁路运送到仓库 A, 数量不限; 工厂 3 的产品可以通过铁路运送到仓库 B, 同样, 数量不限。由于铁路运输成本较高, 公司同时考虑用卡车来运送, 但每个工厂要用卡车先将产品运到配送中心 (每个工厂用卡车最多运送 60 单位), 再从配送中心用卡车运到各个仓库 (每个仓库最多收到用卡车送来的货物 90 单位)。公司管理层希望以最小的成本来运送所需的货物。

为了建立该问题的数学模型, 首先必须了解这一网络配送问题。该问题涉及三个工厂、两个仓库和一个配送中心, 以及各条线路上产品的运输量。由于产量和需求量已经给定, 决策的重点是每一条线路的运输量。首先需要收集每条线路上的单位运输成本和各工厂产品的产量以及各仓库分配量 (需求量) 等数据, 如表 1—3 所示。

表 1—3 物流网络配送问题的单位运输成本等有关数据

	配送中心	仓库 A	仓库 B	产量
工厂 1	3.0	7.5	—	100
工厂 2	3.5	8.2	—	80
工厂 3	3.4	—	9.2	70
配送中心	—	2.3	2.3	
需求量	—	120	130	