

高等学校教材

高等数学

(第三版)
上册

◎ 主 编 吴建成 高岩波
◎ 副主编 孙玉强 石澄贤 曹 毅



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

(第三版)

上册

主 编 吴建成 高岩波
副主编 孙玉强 石澄贤 曹 毅



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在第二版的基础上为高等学校理工科非数学类专业学生修订而成，分为上、下两册。

上册内容包括一元微积分、微分方程、数学软件介绍等，书后附习题解答与提示。本次修订增加了主要概念的背景与应用和许多新颖、生动的应用实例，以培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。超出基本要求以外的内容与习题，应用性较强或为考研学生准备的内容，用*号标注。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/吴建成,高岩波主编. --3版.
--北京:高等教育出版社,2013.8
ISBN 978-7-04-037898-6
I. ①高… II. ①吴… ②高… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 157225 号

策划编辑 张彦云	责任编辑 张彦云	封面设计 张申申	版式设计 余 杨
插图绘制 杜晓丹	责任校对 杨凤玲	责任印制 尤 静	

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京市昌平百善印刷厂
开 本 787mm × 960mm 1/16
印 张 25
字 数 450 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2005 年 6 月第 1 版
2013 年 8 月第 3 版
印 次 2013 年 8 月第 1 次印刷
定 价 36.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 37898-00

主 编

吴建成 高岩波

副主编

孙玉强 石澄贤 曹 毅

编 委 会

(按姓氏笔画排序)

马 强	石澄贤	刘 佳	刘维龙	孙玉强	李志林
李 洵	吴建成	宋晓秋	陆国平	周友明	赵志新
施庆生	高岩波	郭跃华	郭淑娟	黄清龙	曹菊生
曹 毅	蒋家尚				

第三版前言

高等数学是高等学校普遍开设的一门公共基础课程,其教学内容的变革应符合时代的要求。高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会在制定“工科类本科数学基础课程教学基本要求”(以下简称“基本要求”)时强调要突出数学思想方法的教学,加强数学应用能力的培养,这对培养应用型人才尤为重要。因此,一本好的教材应处理好数学作为基础课程和作为工具应用之间的辩证关系,本教材第一版、第二版在此方面进行了一些初步尝试,突出知识的应用背景和实例,淡化部分理论与计算技巧。一些使用学校对第二版的内容、体系和特色给予了充分肯定,同时希望扩大教材的适用范围,以适用于一般高校理工类各专业,为此,我们在第二版的基础上进行了修订,修订的主要内容有:

1. 教材在定位上作了调整。我们依据最新的“基本要求”,参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》进行修订,增加了一些内容,尤其是多元微积分的内容。作为一般本科院校高等数学课程的教材,应有一定的兼容性,既要涵盖一般专业对教学的要求,满足“基本要求”,又要满足一部分学生继续学习深造的需求,还要增加一些应用上比较重要的内容,如表格函数、差商等。为处理好这些关系,凡超出“基本要求”以外的内容以及应用性较强的内容都标有*号,供师生选用(读),以适应分层次教学的需要。另外,较难的例题与习题也都标有*号,供考研学生选用。

2. 为了加强数学与工程应用的联系,让学生在学习数学知识的过程中打好基础,同时不断受到应用数学知识解决实际问题的熏陶和训练,逐步形成应用数学知识解决问题的意识与能力,本次修订除保持第一、二版在这方面的特色之外,在各章节还增加了很多新颖、生动的实例与习题,其中有的源自国内外最新的教材(如血管中的血液流量计算、飞机降落轨道中的参数确定等),有的源自本书编写人员的科研经历(如CT的原理、空洞的探测等),还有一些实例的数据来自于实际。通过对真实情境的适当处理,避免了许多复杂因素对教学过程的干扰,使读者真正感受到数学的魅力。

3. 这次修订还增加了主要概念的背景与应用这部分阅读内容,对一些重要概念如函数、极限、导数与微分、积分与不定积分等增加了概念的初期形成、产生的问题,概念的完善、发展及应用等内容供学生阅读,这些内容本身是非常丰富

而有趣的。

参与此次修订的学校主要有常州大学、南通大学、江苏理工学院等高校。书中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者给予批评指正。

编 者

2013 年 3 月

第二版前言

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题的研究成果,自 2005 年出版以来,被一些本科院校选作高等数学教材。本书的定位和特色得到使用学校的充分肯定,认为本书的出版适应了高等教育大众化背景下应用型人才培养的需要,弥补了同类教材的不足。

在全国高等学校教学研究中心和高等教育出版社的大力支持下,本书的修订工作已被列入“我国高校应用型人才培养模式研究”项目中。依据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制订的最新的工科类本科数学基础课程教学基本要求,同时参考近两年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)的大纲,针对应用型人才培养的特点,编者广泛听取使用单位的意见,对教材进行了修订:强化了第一版的特色,即突出知识的应用背景和应用实例,注重数学的思想方法,淡化部分理论与计算技巧,以此激发学生的学习兴趣,提高学生应用数学知识解决实际问题的能力。本版保持了一元微积分部分原有的结构和体系,充实了多元微积分部分的内容,适当调整了一些例题与习题,对部分较难习题增加了解题提示。和其他同类教材相比,本书一元微积分部分适用面较宽,适宜不同层次的教学要求。多元积分学部分在满足教学基本要求的前提下,要求略低。经过此次修订,本书可作为一般本科院校的高等数学教材,也适用于各类院校对一元微积分要求较高,对多元积分学要求略低的专业。

参与此次修订的学校有江苏工业学院、江南大学、江苏科技大学、南通大学、南京工业大学、中国矿业大学、江苏技术师范学院等高校,三峡大学对本书的修订也提出了许多有建设性的意见和建议,在此一并表示感谢。

编者
2008 年 2 月

第一版前言

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题项目成果之一。

高等教育的飞跃发展,要求高等学校张扬个性,办出特色。由此,许多院校形成了具有各自特色的人才培养模式,对高等数学这门公共基础课也提出了不同层次、不同模块的教学要求。在这一背景下,根据一些院校部分专业多年的教学实践经验,在全国高等学校教学研究中心的大力支持下,由江苏工业学院牵头,江南大学,中国矿业大学,江苏科技大学等院校共同参与策划了本书的内容体系,对原江苏工业学院多年使用的讲义作了大幅度的调整、重写。

本书适用于高等数学学时数为 120 ~ 180 学时的本科院校高等数学教材。主要内容有:一元微积分,微分方程,向量代数与空间解析几何,多元微积分,无穷级数。各章节均配有一定数量的习题,其中横线分隔后的习题可在教师指导下选做。

毋庸置疑,深入学习一元微积分可以为学好多元微积分和其他数学课程铺设道路,为后续专业课程打下坚实的基础。因此,本书定位于一般本科院校,针对对一元微积分要求较高,而对多元积分学要求略低的专业编写。编写中一元微积分部分参考了教育部近期颁发的硕士生入学考试对高等数学(二)的基本要求,更注重基本概念、理论以及系统的完整性,有较高的要求;而多元积分学注重基本概念与方法,在例题取舍上要求略低。全书内容展开注重由浅入深,由特殊到一般,力求突出重点,详略得当,难点分散,概念、定理及理论叙述准确、精练,例题、习题经过精选,循序渐进,具有代表性和启发性。

本书还具有如下特点:

1. 一元微积分部分叙述比较详细,内容较多,有一定深度。但若部分内容不讲,也适用于对高等数学要求较低的专业。

2. 书中增加了许多应用性较强的例题供选学,这样可激发读者的学习兴趣。

3. 淡化了一些计算技巧(尤其积分学部分),突出了数学原理与思想(如划分求和、以直代曲,线性化方法),更注重导数部分的理论与应用。

4. 加进了数学软件 Mathematica 简介,并将部分很典型的调用命令作为例题插入教材中,这样使得软件与教材有机结合为一体。同时由于这种例题很少,

对数学软件不熟悉的教师来说,不讲这部分内容不会影响本教材的使用。

编委会全体成员均参与了本书的编写,全书由吴建成统稿。参与本书编写的单位有:江苏工业学院,江南大学,中国矿业大学,江苏科技大学,南京工业大学,苏州科技学院,南通大学,江苏技术师范学院,常州信息职业技术学院。另外,徐明华给出了 **Mathematica** 软件简介,江兴方绘制了全部图形,在此一并感谢。

由于时间匆促,书中肯定会出现疏漏之处,敬请广大读者指正。

编 者

2005 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合	1
二、一元函数的定义	2
三、函数的几种特性	7
四、反函数	9
习题 1-1	10
第二节 初等函数	12
一、基本初等函数	12
二、复合函数	16
三、初等函数	16
四、双曲函数	16
主要概念的背景与应用——函数	18
习题 1-2	19
第三节 数列的极限	20
一、数列	21
二、数列极限的定义	21
三、收敛数列的性质	25
习题 1-3	27
第四节 函数的极限	28
一、自变量趋向无穷大时函数的极限	28
二、自变量趋向有限值时函数的极限	30
三、函数极限的性质	33
习题 1-4	35
第五节 无穷小与无穷大	36
一、无穷小	36
二、无穷大	37
习题 1-5	39
第六节 极限运算法则	39

习题 1-6	46
第七节 极限存在准则 两个重要极限	47
一、极限存在的两个准则	47
二、几个重要不等式	48
三、两个重要极限	51
四*、杂例	53
习题 1-7	55
第八节 无穷小的比较	56
主要概念的背景与应用——极限	58
习题 1-8	59
第九节 函数的连续性	59
一、函数连续的定义	59
二、函数的间断点	61
习题 1-9	63
第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性	63
一、连续函数的和、积及商的连续性	63
二、反函数与复合函数的连续性	64
三、初等函数的连续性	65
习题 1-10	66
第十一节 闭区间上连续函数的性质	67
一、最大值和最小值定理	67
二、介值定理	68
主要概念的背景与应用——连续	70
习题 1-11	70
第二章 导数与微分	72
第一节 导数的概念	72
一、引例	72
二、导数的定义	74
三、求导数举例	75
四、导数的几何意义	78
五、函数的可导性与连续性之间的关系	78
六*、差商	79
习题 2-1	80

第二节 函数的求导法则	82
一、函数的和、差、积、商的求导法则	82
二、反函数的导数	85
三、复合函数的导数	86
习题 2-2	92
第三节 高阶导数	94
习题 2-3	98
第四节 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	99
一、隐函数的导数	99
二、对数求导法	101
三、由参数方程所确定的函数的导数	102
四、相关变化率	105
习题 2-4	106
第五节 函数的微分	108
一、微分的概念	108
二、微分的运算公式	110
三、微分的应用	112
主要概念的背景与应用——导数与微分	115
习题 2-5	116
第三章 中值定理与导数的应用	118
第一节 中值定理	118
一、罗尔定理	118
二、拉格朗日中值定理	119
三、柯西中值定理	122
习题 3-1	123
第二节 洛必达法则	124
习题 3-2	129
第三节 泰勒中值定理	130
习题 3-3	136
第四节 函数单调性判别法	137
习题 3-4	140
第五节 函数的极值与最值	141
一、函数的极值及其求法	141

二、函数的最值及其求法	144
习题 3-5	148
第六节 曲线的凹凸性与拐点	149
习题 3-6	152
第七节 函数作图	153
一、斜渐近线	153
二、函数作图	154
习题 3-7	156
第八节 曲线的曲率	157
一、曲率的概念	157
二、曲率的计算公式	158
三、曲率圆与曲率半径	159
习题 3-8	161
第九节 方程的近似解	161
一、两分法	162
二、牛顿法	163
习题 3-9	164
第四章 不定积分	165
第一节 不定积分的概念与性质	165
一、原函数与不定积分的概念	165
二、基本积分表	168
三、不定积分的性质	170
习题 4-1	172
第二节 换元积分法	172
一、第一类换元法	173
二、第二类换元法	179
习题 4-2	184
第三节 分部积分法	186
一、分部积分法	186
二*、杂例	189
习题 4-3	191
第四节 几种特殊类型函数的积分	192
一、有理函数的积分	192

二、三角函数有理式的积分	196
三、简单无理函数的积分举例	197
习题 4-4	199
第五章 定积分	200
第一节 定积分的概念	200
一、引例	200
二、定积分的定义	203
习题 5-1	205
第二节 定积分的性质	206
习题 5-2	210
第三节 微积分基本公式	210
习题 5-3	216
第四节 定积分的换元法与分部积分法	218
一、定积分的换元法	218
二、定积分的分部积分法	222
三*、杂例	225
主要概念的背景与应用——不定积分与定积分	228
习题 5-4	229
第五节 定积分的近似计算	231
一、梯形法	231
二、抛物线法	232
习题 5-5	233
第六节 反常积分初步	234
一、积分区间为无穷的反常积分	234
二、无界函数的反常积分	236
三*、 Γ 函数	238
习题 5-6	239
第六章 定积分的应用	241
第一节 定积分的元素法	241
第二节 平面图形的面积	242
一、直角坐标情形	242
二、极坐标情形	244
习题 6-2	247

第三节 体积	248
一、旋转体的体积	248
二、平行截面面积为已知的立体的体积	250
习题 6-3	251
第四节 平面曲线的弧长	252
一、直角坐标情形	252
二、参数方程情形	253
三、极坐标方程情形	254
习题 6-4	255
第五节 定积分的其他应用	256
一、功	256
二、液体压力	258
三、引力	258
四、工程上的应用	260
习题 6-5	263
第七章 常微分方程	266
第一节 常微分方程的基本概念	266
习题 7-1	269
第二节 可分离变量的微分方程	270
习题 7-2	273
第三节 齐次方程	274
习题 7-3	277
第四节 一阶线性微分方程	278
一、一阶线性微分方程	278
二*、伯努利方程	282
习题 7-4	284
第五节 可降阶的高阶微分方程	285
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	285
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	286
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	287
习题 7-5	288
第六节 高阶线性微分方程及其解的结构	289
习题 7-6	295

第七节 二阶常系数齐次线性微分方程	296
习题 7-7	300
第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程	301
一、非齐次项 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$	302
二、非齐次项 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$	305
习题 7-8	307
第九节* 欧拉方程	308
习题 7-9*	310
第十节* 常微分方程组解法举例	310
习题 7-10*	311
第十一节* 微分方程应用举例	312
习题 7-11*	321
附录一 微积分学简史	322
附录二 Mathematica 使用初步	329
附录三 二阶和三阶行列式介绍	346
附录四 极坐标介绍	349
习题答案与提示	353
参考文献	381

第一章 函数与极限

高等数学研究的对象是变量与函数. 虽然初等数学也研究函数, 但通常是研究函数的个性, 而高等数学主要研究函数的共性. 极限的思想方法是研究变量、函数的一种基本方法, 极限理论则是高等数学中最基本的理论. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等概念以及它们的一些性质.

第一节 函数

本节将在中学数学课程的基础上对一元函数的概念作简要的复习.

一、集合

一般地, 所谓集合(或简称集)是指具有特定性质的一些事物的总体, 组成这个总体的事物称为该集合的元素. 例如: 一个班级的全体学生构成一个集合, 学生是这个集合的元素. 设 M 是一集合, 事物 a 是集合 M 的元素, 则记为 $a \in M$ (读作 a 属于 M). 事物 a 不是集合 M 的元素, 则记为 $a \notin M$ (读作 a 不属于 M).

集合通常用如下的方式表示: 当集合中的元素个数有限时, 常用罗列的方式表示, 如 $M = \{a, b, c\}$; 当集合中的元素个数为无限时, 则常以某种性质表出. 如设 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合, 就记为 $M = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}$. 又如 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = R^2, x, y \text{ 为实数}\}$ 代表了 xOy 平面上以原点为中心、半径等于 R 的圆周上点的全体所组成的集合.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

本书研究的对象是函数, 因此只涉及数的集合(或简称数集), 并主要限于实数集合 $\mathbf{R}$.

设 u 为一个数轴, 在其上标有原点、长度和方向. 于是任一实数对应于该轴上唯一的一点, 该点以这个实数作为坐标. 反之, 任给数轴上一点, 该点的坐标就唯一对应着一个实数. 因此数轴上的点与实数集 $\mathbf{R}$ 中的数构成一一对应的关