

文都教育TM

2014

无师自通 考研数学复习大全

数学 三

策划◎文都考研命题研究中心

编著◎汤家凤

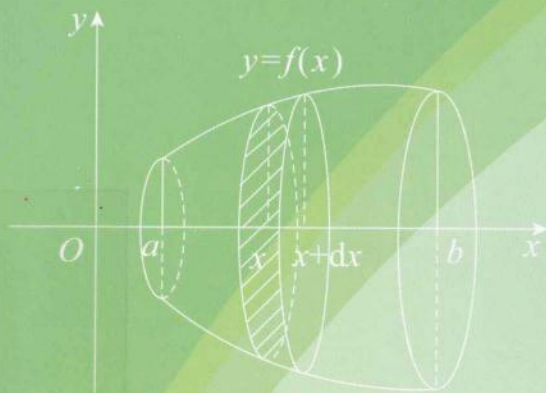
基础乃解题之本，本书揭示其核心本质

题型为高分之石，书中归纳其专题技巧

无师自通——轻松开启考研数学复习之旅



中国时代经济出版社



 文都教育TM

 2014

无师自通 考研数学复习大全

数学 三

策划◎文都考研命题研究中心

编著◎汤家风

 中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习大全·数学三/汤家凤编著. —北京:
中国时代经济出版社, 2012. 3(2013. 2 重印)
ISBN 978-7-5119-1065-3

I. ①考… II. ①汤… III. ①高等数学—研究生—
入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 028939 号

书 名: 考研数学复习大全·数学三
编 著: 汤家凤

出版发行: 中国时代经济出版社
社 址: 北京市丰台区右安门外玉林里 25 号
邮政编码: 100069
发行热线: (010)83910203
传 真: (010)83910203
网 址: www.cmepub.com.cn
电子邮箱: zgkdjj@hotmail.com
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京建泰印刷有限公司
开 本: 787×1092 1/16
字 数: 670 千字
印 张: 30
版 次: 2012 年 3 月第 1 版
印 次: 2013 年 2 月第 2 次印刷
书 号: ISBN 978-7-5119-1065-3
定 价: 53.00 元

郑重声明

买正版图书 听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师主编的《考研数学复习大全·数学一》《考研数学复习大全·数学二》《考研数学复习大全·数学三》《全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义》《考研数学接力题典1800:通关、高分、夺冠必备》《考研数学绝对考场最后八套题·数学一》《考研数学绝对考场最后八套题·数学二》《考研数学绝对考场最后八套题·数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育集团特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育集团将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010-88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取汤家凤老师的精品课程。

中国时代经济出版社
北京世纪文都教育科技发展有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所

刘岩

2013年2月

前言

从1987年开始，工程类和经济类全国硕士研究生入学考试数学课程进行全国统一命题。到2008年，原来的数学一至数学四合并成数学一至数学三，经过若干年的调整，现在考试大纲基本稳定。为了帮助广大考生熟悉考试大纲和考试要求，在较短时间内全面、系统、扎实地掌握高等数学（微积分）、线性代数、概率统计的理论体系、方法体系，提高数学运算、逻辑推理、实际应用及应试能力，作者根据自己十多年从事研究生入学考试指导的经验，凭借多年担任研究生入学考试阅卷组长的心得，精心组织材料、系统归纳整理而成本书。

本书的特点体现在如下几个方面：

1. 以独特的视角建立完善的理论体系和方法体系，让数学变得不再可怕和晦涩难懂，使理论和方法通俗易懂、浑然一体。考研数学涉及的三个科目均有其自身的理论体系，如果孤立地看每一个考点，若干个概念、性质、定理堆砌，那么考生很难真正掌握这些知识点；而本书对知识从发展的角度来分析其背景，挖掘其来源，使结论的得出显得水到渠成，更容易接受。同时，数学学习与考试离不开解题，这就必然离不开解题方法的探索。作者将考研数学会用到的基本方法进行总结分类，也归纳整理出自己独创的处理某一类问题的方法体系，可以帮助考生轻松解决相应问题。

2. 对重点的理论和方法增加了拓展延伸的内容，这部分内容可以更好地帮助考生理解考试的重点，便于考生掌握学习数学的独特方法。理论拓展内容将基础知识拓宽加深，或将边缘的易于混淆的结论整合讲解以正视听；方法拓展内容是作者多年一线教学中发现的行之有效且巧妙的方法的汇总。之所以说作者的方法行之有效，不仅仅是因为它能快速准确地解答题目，更重要的是使用过的考生觉得这样的方法易接受、易掌握。

3. 本书内容具有前瞻性和权威性。作者一直在教学和科研第一线，十多年的数学考试指导经验和阅卷经验使得其对研究生入学统一考试重点与命题趋势熟稔于心，同时又充分了解考生复习之瓶颈所在，二者的结合决定了本书既能够体现未来考试方向，又足够专业到位。

4. 本书颠覆了传统数学复习理念，倡导理清知识本源，建立方法体系，从源头上解决解题瓶颈。

本书的体系结构包括：

1. 大纲点击。介绍各章的考试要求，考生通过此板块了解考试范围与重点。

2. 基础复习模块。搭建各部分的理论体系，将考试中要求的基本概念、原理、考点逐一讲解，并突出重点内容，难以理解或容易混淆的结论作者特别给出了理解与记忆的方法。

3. 知识延拓模块。对重要理论和方法以及考试的重点给出了知识体系的进一步深化延展。

4. 重点题型分析。建立知识点的方法体系，对常考点、难点及重要方法进行全面总结和梳理。

5. 测试题。巩固所学的理论和方法，检测各部分的学习效果，更好地适应考试。

广大学子的殷切期盼和文都教育集团领导的大力鼓励是作者写作本书的动力，在写作过程中广大同仁给予了巨大和无私的帮助。由于本书写作时间紧，加之作者水平所限，不足和错误在所难免，欢迎广大学子和同仁指教。

编 者

2013年1月

目 录

第一部分 微积分	1
第一章 函数、极限、连续	3
大纲点击	3
基础复习模块——基本概念、原理、考点	3
知识延拓模块——极限存在性问题	14
重点题型分析	15
测试题	27
测试题参考答案	29
第二章 导数与微分	35
大纲点击	35
基础复习模块——基本概念、原理、考点	35
重点题型分析	39
测试题	52
测试题参考答案	54
第三章 中值定理及其应用	58
大纲点击	58
基础复习模块——基本概念、原理、考点	58
知识延拓模块	65
重点题型分析	75
测试题	91
测试题参考答案	93
第四章 不定积分	97
大纲点击	97
基础复习模块——基本概念、原理、考点	97
重点题型分析	102
测试题	110
测试题参考答案	110
第五章 定积分及其应用	114
大纲点击	114

第一节 定积分理论	114
基础复习模块——基本概念、原理、考点	114
知识延拓模块——理论推广、专题	120
重点题型分析	131
第二节 广义积分	143
基础复习模块——基本概念、原理、考点	143
知识延拓模块	145
重点题型分析	145
第三节 定积分的应用	147
基础复习模块——基本概念、原理、考点	147
重点题型分析	149
测试题	150
测试题参考答案	154
第六章 多元函数微分学	162
大纲点击	162
基础复习模块——基本概念、原理、考点	162
知识延拓模块	172
重点题型分析	173
测试题	186
测试题参考答案	188
第七章 二重积分	193
大纲点击	193
基础复习模块——基本概念、原理、考点	193
重点题型分析	196
测试题	203
测试题参考答案	204
第八章 级数	207
大纲点击	207
第一节 常数项级数的概念与理论	207
基础复习模块——基本概念、原理、考点	207
重点题型分析	213
第二节 幂级数	220
基础复习模块——基本概念、原理、考点	220
知识延拓模块——幂级数的和函数及函数展成幂级数的技巧	226
重点题型分析	229

测试题	235
测试题参考答案	237
第九章 微分方程	242
大纲点击	242
基础复习模块——基本概念、原理、考点	242
知识延拓模块——高阶常系数线性微分方程的通解	244
重点题型分析	246
测试题	253
测试题参考答案	254
第十章 微分学的经济学应用	258
大纲点击	258
基础复习模块——基本概念、原理、考点	258
第一节 差分与差分方程	258
第二节 微分的经济学应用	259
重点题型分析	261
测试题	264
测试题参考答案	265
第二部分 线性代数	267
第一章 行列式	269
大纲点击	269
基础复习模块——基本概念、原理、考点	269
重点题型分析	272
测试题	276
测试题参考答案	276
第二章 矩 阵	278
大纲点击	278
第一节 矩阵概况	278
基础复习模块——基本概念、原理、考点	278
重点题型分析	282
第二节 矩阵的逆矩阵	284
基础复习模块——基本概念、原理、考点	284
重点题型分析	288
第三节 矩阵的秩	292
基础复习模块——基本概念、原理、考点	292

重点题型分析	294
测试题	296
测试题参考答案	298
第三章 向 量	301
大纲点击	301
第一节 向量的基本概念及相关性理论	301
基础复习模块——基本概念、原理、考点	301
重点题型分析	305
第二节 向量组的秩与向量组等价	310
基础复习模块——基本概念、原理、考点	310
重点题型分析	311
测试题	311
测试题参考答案	312
第四章 方程组	315
大纲点击	315
基础复习模块——基本概念、原理、考点	315
知识延拓模块——方程组的若干理论问题	319
重点题型分析	321
测试题	331
测试题参考答案	333
第五章 特征值与特征向量	339
大纲点击	339
第一节 特征值与特征向量的概念与性质	339
基础复习模块——基本概念、原理、考点	339
重点题型分析	341
第二节 矩阵对角化	344
基础复习模块——基本概念、原理、考点	344
答疑解惑	347
知识延拓模块	348
重点题型分析	351
测试题	357
测试题参考答案	359
第六章 二次型及其标准形	366
大纲点击	366
第一节 二次型及其标准形	366

基础复习模块——基本概念、原理、考点	366
知识延拓模块	369
重点题型分析	371
第二节 正定矩阵与正定二次型	376
基础复习模块——基本概念、原理、考点	376
重点题型分析	376
测试题	378
测试题参考答案	379

第三部分 概率统计..... 383

第一章 随机事件与事件的概率 385

大纲点击	385
基础复习模块——基本概念、原理、考点	385
知识延拓模块——古典概型、贝努利概型与几何概型	390
重点题型分析	393
测试题	396
测试题参考答案	397

第二章 随机变量及其分布 400

大纲点击	400
基础复习模块——基本概念、原理、考点	400
重点题型分析	406
测试题	412
测试题参考答案	413

第三章 多维随机变量及其分布 416

大纲点击	416
基础复习模块——基本概念、原理、考点	416
重点题型分析	424
测试题	431
测试题参考答案	433

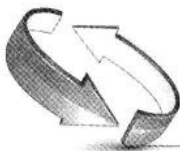
第四章 随机变量的数字特征 438

大纲点击	438
基础复习模块——基本概念、原理、考点	438
重点题型分析	441
测试题	450
测试题参考答案	451

第五章 大数定律与中心极限定理	454
大纲点击	454
基础复习模块——基本概念、原理、考点	454
重点题型分析	455
测试题	458
测试题参考答案	458
第六章 数理统计的基本概念	460
大纲点击	460
基础复习模块——基本概念、原理、考点	460
重点题型分析	464
测试题	468
测试题参考答案	469
第七章 参数估计	472
大纲点击	472
基础复习模块——基本概念、原理、考点	472
重点题型分析	474
测试题	475
测试题参考答案	476

第一部分 微积分

- 第一章 函数、极限、连续
- 第二章 导数与微分
- 第三章 中值定理及其应用
- 第四章 不定积分
- 第五章 定积分及其应用
- 第六章 多元函数微分学
- 第七章 二重积分
- 第八章 级数
- 第九章 微分方程
- 第十章 微分学的经济学应用



第一章 函数、极限、连续

大纲点击

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续和右连续),会判断函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点

一、函数的概念及函数的初等特性

(一) 基本概念

1. 邻域与去心邻域 —— 设 $\delta > 0$, 称集合 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 为 a 的邻域, 记为 $U(a, \delta)$; 称集合 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 为 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 如图 1-1-1.

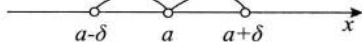


图 1-1-1

2. 函数 —— 设 D 为一个数集, x, y 为两个变量, 若对任意的 $x \in D$, 按照某种对应关系, 总有唯一确定的 y 与之对应, 称 y 为 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

3. 函数关系的常用表示法

(1) 显函数法 —— 称 $y = f(x) (x \in D)$ 为显函数.

(2) 隐函数法 —— 若函数 $y = f(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定(即对任意的 $x \in D$, 通过 $F(x, y) = 0$ 有唯一的 y 与之对应), 则称此函数为隐函数.

(3) 参数方程 —— 若 x, y 的函数关系由 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定(即对任意的 $x \in D$, 由 $x = \varphi(t)$

确定唯一的 t , 再由 t 确定唯一的 y), 则称 x, y 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定函数.

【注解】

几个特殊的函数:



$$(1) \text{ 取整函数 } y = [x] = \begin{cases} m, & x = m, \\ m, & m < x < m+1. \end{cases} \quad (m \in \mathbf{Z})$$

$$(2) \text{ Dirichlet 函数 } y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

4. 反函数 —— 设 $y = f(x) (x \in D)$, 其值域为 R_0 , 若对任意的 $y \in R_0$, 按照 $y = f(x)$ 确定唯一的一个 $x \in D$, 于是确定了 x 为 y 的函数, 称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = \varphi(y)$.

【例】 判断 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性, 并求其反函数.

【解】 显然 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 因为

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

所以 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

$$\text{由 } \begin{cases} y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \\ -y = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} = e^y, \\ -x + \sqrt{1+x^2} = e^{-y}, \end{cases} \quad \text{两式相减得 } y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

的反函数为 $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, 即 $x = \operatorname{sh} y$.

5. 基本初等函数 —— 幂函数 x^a , 指数函数 $a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 对数函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$, 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

6. 初等函数 —— 由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算或函数的复合运算而成的一个表达式称为初等函数.

(二) 函数的初等特性

1. 单调性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数, 若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调增函数, 若有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调减函数.

2. 有界性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数, 若存在 $M > 0$, 对一切的 $x \in D$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 称 $f(x)$ 在 D 上为有界函数.

$$\text{如: } D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases} \quad \text{显然函数 } D(x) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上有界.}$$

3. 奇偶性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数, 且 D 关于原点对称, 若对任意的 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数, 若 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数. 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. 周期性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数, $T > 0$ 且对任意的 $x \in D, x+T \in D$, 若对任意 $x \in D$, 有 $f(x+T) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为周期函数.

【例 1】 证明: 任一个定义域关于原点对称的函数总可以表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

【证明】 设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

令 $G(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $H(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, 显然 $G(x)$ 为偶函数, $H(x)$ 为奇函数, 且 $f(x) = G(x) + H(x)$.

【例 2】 研究 $f(x) = x - [x]$ 的周期性.

【解】 对取整函数 $[x]$ 来说, 当 $m \leq x < m+1$ 时, $[x] = m$ ($m = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$), $[x+1] = m+1 = [x] + 1$. 对函数 $f(x) = x - [x]$, 显然 $f(x+1) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为以 1 为周期的函数.

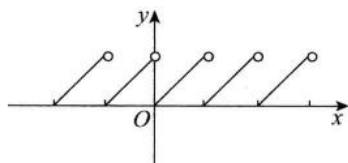


图 1-1-2

如图 1-1-2, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

【例 3】 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ 1-x^2, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

【解】 $g[f(x)] = \begin{cases} f^2(x), & f(x) < 0, \\ -f^2(x), & f(x) \geq 0. \end{cases}$

$f(x) < 0$ 等价于 $\begin{cases} 1+x < 0, \\ x \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-x^2 < 0, \\ x > 0, \end{cases}$ 解得 $x < -1$ 或 $x > 1$;

$f(x) \geq 0$ 等价于 $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $0 < x \leq 1$.

所以 $g[f(x)] = \begin{cases} (1+x)^2, & x < -1, \\ (1-x^2)^2, & x > 1, \\ -(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ -(1-x^2)^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

二、极限

(一) 极限的基本概念

1. 数列极限的定义 ($\epsilon - N$ 定义) —— 若对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \epsilon$, 称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 或 $a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$.

2. 函数在自变量趋于有穷值时的极限定义 ($\epsilon - \delta$ 定义) —— 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域内有定义, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$.

3. 函数在自变量趋于无穷时的极限定义 ($\epsilon - X$ 定义) —— 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > M$ 的邻域内有定义, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

4. 左右极限的定义 —— 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域内有定义, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < a - x < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$ 或 $f(a-0) = A$; 若对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x - a < \delta$ 时, 有 $|f(x) - B| < \epsilon$, 称 B 为函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = B$ 或 $f(a+0) = B$.

【注解】

(1) 函数在一点的极限与函数在该点是否有定义无关, 如 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, 显然 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.