金榜

2013

考研数学
大题满分技巧揭秘

（数学一、二）

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组　编

让想放弃的同学得高分
让能得高分的同学得满分
抓住攻克考研数学最后一次机遇
Yes, we can!

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2013

考研数学大题满分技巧揭秘

（数学一、二）

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学一、二 / 金榜考研数学命题研究组编. —北京 ：北京理工大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-5640-6790-8

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①金…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 218333 号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张/6.5
字　　数/175 千字
版　　次/2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷　　责任校对/周瑞红
定　　价/25.80 元　　责任印制/边心超

前 言

2013年考研的最后冲刺阶段已经开始，这最后的宝贵时间是提高数学答题能力最关键的时候。数学是考研中的重中之重，而考研数学解答题94分占超过一半的分值，这些题目高度抽象，解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从往届考生的成绩来看，考生在解答题部分得分差别很大，直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说，我很想做好解答题，但就是做题无从下笔，或者做了也这错那错。

在这里，我们为大家编写的这本《考研数学大题满分技巧揭秘(数学一、二)》就是让同学们在最后的考试中会解大题，能得高分，会做的题目力求不失分，部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典，解答规范，适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下：

[读题联想] 如果这个时候大家还对题中的基本概念、方法和原理不清楚，解题时肯定会碰到各种各样的问题，容易丢失一些基本分，所以大家务必在最后完全吃透基础理论知识，深入地理解基本概念、公式、定理和图表，掌握知识点。

[解题范例] 拓展解题方法，提高解题能力，规范答题格式。大家要提高做题质量，每做完一题，就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型，做到举一反三。希望大家认真领会解题方法及其实质，并做到活学活用。同时，也要注意答题的方式步骤，关键内容要写出来，一些简单过程可省略。

[阅卷者按] 帮大家寻找考试的感觉，保持清晰的复习思路，做题的同时感受真实考场上的氛围，尽快进入临考状态。

由于编者水平有限，本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利！

编 者

2012年9月

目　录

高等数学

1 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\sin\frac{1}{n}$.

读题联想 这是一个n项和的数列极限，常用的方法有两种，一种是夹逼原理，另一种是定积分的定义，有时需要两种方法结合使用.

解题范例

【解】 由于当 $n\to\infty$ 时，$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$，则 1 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$ 3 分

又 $$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$ 6 分

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$ 8 分

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1, \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2}) = 1,$ 9 分

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$= \ln(1+\sqrt{2})$.

故 $I = \ln(1+\sqrt{2})$. 10 分

阅卷者按 本题满分10分，难度不大，主要考察利用夹逼原理和定积分定义求极限. 本题的关键是要将这两种方法结合起来问题才能得到解决.

2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 与 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

读题联想 类似 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$，$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 的三角函数应该把 $\pi\sqrt{n^2+1}$，$\pi\sqrt{n^2+n}$ 转化到原点附近研究其变化情况.

解题范例

【解】 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)$ 1分

记 $\alpha_n=(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 可知 $0<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2n}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 且

$$I=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi+\alpha_n)$$ 4分

$$=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\alpha_n+\cos n\pi\sin\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\alpha_n.$$ 5分

由于 $|(-1)^n\sin\alpha_n|\leqslant\alpha_n$，故 $I=0$.

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi).$$ 6分

记 $\beta_n=(\sqrt{n^2+n}-n)\pi=\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\dfrac{\pi}{2}$，故 8分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(n\pi+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\beta_n+\cos n\pi\sin\beta_n)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\beta_n=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$ 10分

阅卷者按 本题满分10分，有一定难度. 关键在于用 $n\pi$ 把 $\pi\sqrt{n^2+1}$ 转化到原点附近研究其性质.

3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

读题联想 本题是求“1^∞”型未定式数列的极限.除利用极限的四则运算法则,洛必达法则以及等价无穷小代换外,还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.

解题范例

【解】 设函数$f(x)=(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}$和数列$x_n=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$,

则

$$f(x_n)=(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n})^{n^2}\ (n=1,2,3,\cdots),且\lim_{n\to\infty}x_n=0^+.$$

计算可得

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}}=e^J,$$ 1分

其中

$$J=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-3\tan x-1}{x^2}$$ 3分

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-\sec^2x}{x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}\cos^2x-1}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}(3e^{3x}\cos^2x-2e^{3x}\cos x\sin x)=\frac{9}{2}.$$ 8分

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

$$=\lim_{x\to0^+}f(x)=e^J=e^{\frac{9}{2}}.$$ 10分

阅卷者按 本题满分10分,难度不大.

(Ⅰ)一般说来,对于1^∞型未定式$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$,利用等价无穷小代换$\ln f(x)\sim f(x)-1$化为求极限$e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$,常能简化计算.

(Ⅱ)利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是:

(1)若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则对任何数列$\{x_n\}$,只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则对任何数列$\{x_n\}$,只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$,就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

4 设常数 $p>0$,求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

并证明:当 $n=1,2,3,\cdots$ 时

$$\left|\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}-I\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

读题联想 n 项和的数列极限要注意考虑积分的定义,注意 I 与 $\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 之间的差别.

解题范例

【解】 注意

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n},$$ 1 分

其中 $f(x)=x^p$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}$ 可以看成是函数 $f(x)=x^p$ 在区间$[0,1]$被 n 等分,并取 $\xi_k=\frac{k}{n}(k=1,2,\cdots,n)$ 时的积分和. 由函数 $f(x)=x^p$ 在区间$[0,1]$上连续知 $f(x)=x^p$ 在区间$[0,1]$上可积,故

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$ 3 分

又因

$$\begin{aligned}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}-I&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}-\int_0^1x^p\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-x^p\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$ 5 分

且对于 $k=1,2,3,\cdots,n$ 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-x^p\right]\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-\left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \left[(\frac{k}{n})^p - (\frac{k-1}{n})^p \right] \frac{1}{n},$$ 7 分

故

$$0 \leqslant \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[(\frac{k}{n})^p - (\frac{k-1}{n})^p \right] \frac{1}{n}$$

$$= \left[(\frac{n}{n})^p - (\frac{0}{n})^p \right] \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$ 9 分

即当 $n = 1,2,3,\cdots$ 时,对任何常数 $p > 0$ 下面的不等式成立:

$$\left| \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分,有一定难度,极限的计算比较基本,积分的定义是常用方法. 难度在于对 I 和 $\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ 之间区别的理解,一般来说若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则把 $[a,b]$ 作 n 等分时有

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x,$$

其中 ξ_k 在小区间 $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a) \right]$ 中任意取定. 而给定的 n 项和 $\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} + (\xi_k)$, ξ_k 一般取区间 $[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)]$ 中的端点值.

5 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

读题联想 这是一个“$\infty-\infty$”型极限，一种方法是先做变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，然后用洛必达法则；另一种方法是将 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 用泰勒公式展开.

解题范例

【解法一】 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$I=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln\frac{1+t}{1-t}}{t^3}-\frac{2}{t^2}\right) \quad 2\text{分}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3} \quad 4\text{分}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}-2}{3t^2} \quad 6\text{分}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-t)+(1+t)-2(1-t^2)}{3t^2(1-t^2)} \quad 8\text{分}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2t^2}{3t^2(1-t^2)}=\frac{2}{3} \quad 10\text{分}$$

【解法二】

$$I=\lim_{x\to\infty}(x^3\ln\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}-2x^2) \quad 2\text{分}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{x^3[\ln(1+\frac{1}{x})-\ln(1-\frac{1}{x})]-2x^2\} \quad 4\text{分}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{x^3[(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3}))-(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3}))] \quad 8\text{分}$$

$$-2x^2\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{x^3[\frac{2}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})]\}=\frac{2}{3} \quad 10\text{分}$$

阅卷者按 本题满分10分，较为容易，两种解法均为基本解法.

本题解法二中应注意，不能直接用泰勒公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

因为本题中的 $x\to\infty$ 而不是 $x\to0$. 因此，要改写成 $\ln(1+\dfrac{1}{x})$ 后再用泰勒公式.

6 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}$.

读题联想 这种极限问题常用的有两种方法,一种是利用已知极限,凑出所要求的极限,利用极限四则运算时要确认两端的极限均存在;另一种是利用泰勒公式将 $\sin x$ 展开.

解题范例

【解法一】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$知

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}\right)\cdot x=0 \qquad 2\text{ 分}$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}. \qquad 6\text{ 分}$$

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=-6$ 7 分

【解法二】 由泰勒公式知

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4) \qquad 2\text{ 分}$$

则

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))+f(x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{f(x)}{x^3}}{x} \qquad 5\text{ 分}$$

从而有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{f(x)}{x^3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=-\frac{1}{6} \qquad 6\text{ 分}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{f(x)}=-6 \qquad 7\text{ 分}$$

阅卷者按 本题满分 7 分,较为容易.解法二中用到一个常用结论:若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

7 求极限 $I = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - (\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

读题联想 这是一个"$\dfrac{0}{0}$"的极限，事实上 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$，同样 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x = 1$，但本题中出现了幂指函数 x^x 和 $(\sin x)^x$，如果直接用洛必达法则运算很繁，这种类型极限往往先将幂指函数改写成指数函数用等价代换 $e^x - 1 \sim x$，结合洛必达法则较为方便.

解题范例

【解】

$$I = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x - 1\right]}{x^2\ln(1+x)} \qquad 1\text{ 分}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x - 1}{x^3} \qquad (\lim_{x\to 0^+} x^x = 1) \qquad 2\text{ 分}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}} - 1}{x^3} \qquad 3\text{ 分}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^3} \qquad 5\text{ 分}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\sin x - x}{x}\right)}{x^2} \qquad 6\text{ 分}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} \qquad 8\text{ 分}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2} \qquad 9\text{ 分}$$

$$= \frac{1}{6} \qquad 10\text{ 分}$$

阅卷者按 本题满分 10 分，较为简单，题中涉及到幂指函数，不易直接用洛必达法则，求解的关键在于将幂指函数改写成指数函数，然后利用等价代换 $e^x - 1 \sim x$，这是求带有幂指函数极限常用且有效的方法.

8 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $x^\alpha-\sin x$ 是等价无穷小，求 α 及 $f''(0)$.

读题联想 本题是一个无穷小量阶的比较问题，也可以说是知道两个无穷小量之比的极限确定参数的问题，而本题中出现了变上限积分，因此，可用洛必达法则求解.

解题范例

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知，$f(0)=0, f'(0)=0$. 2 分

又当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $x^\alpha-\sin x$ 是等价无穷小，则

$$1=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1}-\cos x}$$

4 分

从而 $\alpha=1$，否则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1}-\cos x}=0$，与等式左端矛盾. 6 分

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

9 分

$$=f''(0) \quad \text{（导数定义）}$$

从而 $f''(0)=1$. 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，难度不大，思路较为简单，但要注意细节的处理.

1) 本题求解中得到 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$，为求 $f''(0)$ 不能对等式右端再用洛必达法则，即

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$$

这是错误的，因为本题的条件是 $f(x)$ 在 $x=0$ 某领域内二阶可导，此时，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ 不一定存在. 如果 $f(x)$ 二阶导数连续，则以上做法正确.

2) 有关无穷小量阶的比较问题常用的是三种方法.

(1) 洛必达法则；

(2) 等价无穷小代换；

(3) 泰勒公式.

9 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x|x+1|}{\ln|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 的间断点并指出类型.

读题联想 首先找出间断点(没有定义的点)和可疑间断点(分段函数分界点),然后再做进一步判定.

解题范例

【解】 显然 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x|x+1|}{\ln|x|}, x\neq 0\\ 0\quad, x=0\end{cases}$ 仅在 $x=\pm 1$ 两点处没定义, 1分

$x=\pm 1$ 均为间断点.

在 $x=1$ 处,由于

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x|x+1|}{\ln|x|}=\infty$$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点. 3分

在 $x=-1$ 处,由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+}f(x)&=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x+1)}{\ln|x|}\\&=\lim_{x\to -1^+}\frac{-1}{\frac{1}{x}}\quad\text{(洛必达法则)}\\&=1\end{aligned}$$

4分

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-}f(x)&=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)}{\ln|x|}\\&=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\frac{1}{x}}\\&=-1\end{aligned}$$

5分

则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 6分

在 $x=0$ 处,由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x|x+1|}{\ln|x|}=0$$

而 $f(0)=1$

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 9分

阅卷者按 本题满分10分,是求间断点的基本题型,关键在于确定可疑间断点,其验证过程就是求极限的问题.