面向21世纪课程教材
信息管理与信息系统专业教材系列

运筹学解题指导

第2版

Exercises Guidance of Operations Research

周华任 ◎ 主编
《运筹学》教材编写组 ◎ 审订

清华大学出版社

面向21世纪课程教材
信息管理与信息系统专业教材系列

周华任 ◎ 主编

运筹学解题指导

第2版

Exercises Guidance of Operations Research

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是和《运筹学》第4版(《运筹学》教材编写组编　清华大学出版社)配合使用的参考书。每章包括五部分：(1)本章学习要求，给出了本章应该掌握的基本知识点；(2)主要概念及算法，列出了本章基本概念和主要算法思想，突出了必须掌握或考试频率高的核心知识和结论；(3)课后习题全解，对课后习题全部给出了详细的解答；(4)典型例题精解，紧扣教材主要内容，精选各类习题并给出了详细解答；(5)考研真题解答，深入分析历年研究生入学考试试题，帮助学生加深对知识点的理解和灵活运用。

本书内容丰富、概念清晰、实用性强，可作为高等院校本科教学参考书，也可作为报考研究生以及在读研究生课程学习中的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学解题指导/周华任主编. --2版. --北京：清华大学出版社，2013
(面向21世纪课程教材. 信息管理与信息系统专业教材系列)
ISBN 978-7-302-33001-1

Ⅰ. ①运…　Ⅱ. ①周…　Ⅲ. ①运筹学－高等学校－题解　Ⅳ. ①O22-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第147738号

责任编辑：贺　岩
封面设计：常雪影
责任校对：王凤芝
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：29.25　　**字　　数**：623千字
版　　次：2006年7月第1版　2013年7月第2版　　**印　　次**：2013年7月第1次印刷
印　　数：1～5000
定　　价：42.00元

产品编号：043787-01

前言(第2版) PREFACE

运筹学是高等院校经济管理类专业和理工科部分专业的专业基础课,也是这些专业硕士研究生入学考试的一门考试科目,同时又是参加全国大学生数学建模竞赛选手的必修科目。清华大学出版社出版的《运筹学》被国内高校广泛采用为教材。2005 年又出版了《运筹学》第三版和本科版,对部分内容进行了修订,其中本科版是在第三版的基础上对一些章节进行了删减。为了帮助广大学生扎实掌握运筹学的精髓和解题技巧,提高解答各种题型的能力。我们根据清华大学出版社最新出版的《运筹学》第 4 版和本科版(《运筹学》教材编写组编)编写了本书。

全书各章按照以下五个部分编排。

1. 本章学习要求：给出了本章应该掌握的基本知识点。

2. 主要概念及算法：列出了本章基本概念和主要算法思想,突出了必须掌握或考试频率高的核心知识和结论。

3. 课后习题全解：教材中课后习题层次多、内容丰富,从各个角度体现了基本概念和主要算法的应用,因此,我们对课后习题全部给出了详细的解答。

4. 典型例题精解：紧扣教材主要内容,精选各类习题并给出了详细解答。

5. 考研真题解答：深入分析历年研究生入学考试试题,帮助学生加深对知识点的理解和灵活运用。

本书考虑到目前运筹学教学过程中的内容和特点,可作为本科教学中的参考书,也可作为报考研究生以及在读研究生课程学习中的辅导教材。本书的编写,参照了国内外有关教材及参考文献,在此特向原著者致谢。

本书由周华任、陈玉金、刘常昱、郭杰、王再奎、顾洪、蔡开华、李喜波编写。《运筹学》一书的主编钱颂迪教授对本书进行了审读并提出了宝贵的意见,在此对钱颂迪教授的指导表示感谢。在本书的策划、编写、审稿等方面,清华大学出版社给予了大力支持和热情帮助,在此深表感谢。

由于编者水平有限,书中疏漏及不妥之处在所难免,希望读者给予指正。

编　者

2013 年 3 月

目 录 CONTENTS

CHAPTER 1 第1章

绪　论

运筹学是一门依照给定条件和目标从众多方案中选择最佳决策方案的应用科学，自诞生以来，在军事、工农业、经济和社会问题等多个领域得到了广泛的重视和应用。在管理学科领域，运筹学的发展为管理理论和管理实践的发展也做出了突出的贡献，到现在，运筹学已成为工商管理学科中的一门重要的基础学科。

运筹学思想方法的起源可追溯到很远。人们发现，在我国先秦时期的诸子著作中，就存在许多朴素的运筹思想，这里"运筹"就是动脑筋想办法，去选择最优方案。"田忌赛马"和"沈括运粮"的故事就充分说明了我国很早不仅有过朴素的运筹思想，而且在生产实践中实际运用了运筹方法。但真正被人们公认的运筹学起源于20世纪初期。第二次世界大战期间，英、美为了对付德国的空袭，就如何合理运用雷达使防空系统更加有效的问题开始进行一类新问题的研究，最初称为"运作研究"(operational research)。1942年，美国从事这方面工作的科学家将其命名为"运筹学"(operations research)，这个名字一直延用至今。

"二战"期间，为了进行运筹学的研究，在英、美的军队中成立了一些专门小组，开展了诸如护航舰队保护商船队的编队问题和当船队遭受德国潜艇攻击时，如何使船队损失最小的问题的研究；还研究了反潜深水炸弹在各种情况下如何调整其爆炸深度，才能增加对德国潜艇的杀伤力等。通过科学方法的运用，成功地解决了许多复杂的战术问题，使后期德国潜艇被摧毁数增加到400%，盟军船只在受敌机攻击时，中弹数由47%降到29%。"二战"后，英、美军队中又相继成立了更为正式的运筹研究小组，以兰德公司(RAND)为首的一些部门开始着重研究战略性问题；未来的武器系统的设计和其可能合理运用的方法等。到了20世纪60年代，除军事方面的应用研究外，运筹学在更为广阔的领域得到运用，从事这项工作的许多专家转到了经济部门、民用企业、大学或研究所，继续从事决策的数量方法的研究，运筹学作为一门学科逐步形成并得以迅速发展。这种发展主要表现在两个方面：

一是在方法论上形成了运筹学的许多分支，如数学规划(线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)，图论与网络，排队论，存贮论，对策论，决策论，维修更新理论，搜索论，可靠性和质量管理等。

二是计算机科学的发展，新型计算机的出现，为运筹学的运用开辟了新天地，使得运筹学的方法论能成功及时地解决大量经济管理中的决策问题，并且随着计算机软硬件的

发展使运筹学不再只为专家所掌握和使用，也成为了广大管理工作者进行最优决策和有效管理的常用工具之一。

毫无疑问，运筹学是一门应用科学，虽然至今没有统一且确切的定义，但其性质和特点还是很鲜明的。其一，它是一种科学方法，即不单是某种研究方法的分散和偶然的应用，而是可用于整个一类问题上；其二，它强调以量化为基础，必然要用数学，需要建立各种数学模型，为决策者的决策提供定量依据；其三，它具有多学科交叉的特点，如综合运用经济学、心理学、物理学、系统学等的一些方法；其四，它强调最优决策，但在实际生活中又常常用次优、满意等概念代替最优。

对于生活节奏日益加快的今天，运筹学是安排我们工作、学习、娱乐生活的一门有效工具。而运筹学的魅力在于，它运用数学模型，如一把梳子，梳理着经济、军事、生活的各个方面，而且把纷繁复杂的现象数学化。运筹学即是研究在实现整体目标的全过程中实现统筹管理的有关理论、模型、方法和手段，在经济研究、经营决策方面被广泛应用。它通过对整体目标的分析，选择适当的模型来描述整体的各个部分，用以分析并求出全局的最优决策。

CHAPTER 2 第2章

线性规划及单纯形法

【本章学习要求】

1. 掌握线性规划的图解法及其几何意义。
2. 理解线性规划的标准型和规范型。
3. 掌握单纯形法原理。
4. 掌握运用单纯形表计算线性规划问题的步骤及解法。
5. 能运用两阶段法和大 M 法求解线性规划问题，以及运用人工变量法求解非规范型的线性规划问题。
6. 掌握任何基可行解原表及单纯形表的对应关系。

【主要概念及算法】

1. 线性规划问题的数学模型

目标函数：　$\max(\text{或 }\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

约束条件：　$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0, & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$

其中，$x_j\,(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量；$a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$为工艺系数；$b_i\,(i=1,2,\cdots,m)$为资源系数；$c_j\,(j=1,2,\cdots,n)$为价值系数。

其标准型为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0, & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

2. 图解法

对于只含两个变量的线性规划问题，可通过在平面上作图的方法求解。

图解法的步骤如下：

(1) 建立平面直角坐标系；

(2) 图示约束条件，找出可行域；

(3) 图示目标函数，即为一条直线；

(4) 将目标函数直线沿其法线方向在可行域内向可行域边界平移直至目标函数达到最优值为止，目标函数达到最优值的点就为最优点。

3. 线性规划问题的解的概念

线性规划问题：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad (i=1,2,\cdots,m) & (2\text{-}2) \\ x_j \geqslant 0, \quad (j=1,2,\cdots,n) & (2\text{-}3) \end{cases}$$

(1) 可行解：满足约束条件(2-2)和(2-3)的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

(2) 最优解：使目标函数(2-1)达到最大值的可行解。

(3) 基：设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组(2-2)的 $m\times n$ 阶系数矩阵，设 $n>m$，其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，则称 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中每一个列向量 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基向量，与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为基变量。除基变量以外的变量为非基变量。

(4) 基本解：在约束方程组(2-2)中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，此时方程组(2-2)有唯一解 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{B}}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，将此解加上非基变量取 0 的值有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基本解。

(5) 基本可行解：满足非负条件(2-3)的基本解。

(6) 可行基：对应于基本可行解的基。

4. 单纯形法迭代原理

(1) 数学模型化为标准型

具备以下条件的数学模型称为单纯形法标准型：

① 等式约束条件；

② 右边常数非负；

③ 变量非负；

④ 目标函数为 max 型。

(2) 数学模型化为规范型

具备以下条件的数学模型称为单纯形法规范型：

① 标准型；

② 约束条件系数矩阵中至少含有一个单位子矩阵，对应的变量为基变量；

③ 目标函数中不含基变量。

(3) 确定初始基本可行解

在规范型数学模型中，令非基变量 $x_j=0$，求出基变量 x_i，即得初始基本可行解。

(4) 最优性检验

在得到初始基本可行解后，要检验一下是否为最优解。若是，则停止迭代；否则，则继续迭代，但每次迭代后都要检验一下当前解是否为最优解。有如下的判别准则：

① 最优解判别定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解，且对于一切 $j=m+1,m+2,\cdots,n$ 有 $\sigma_j\leqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为最优解，其中，σ_j 为检验数，$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{n}c_ia_{ij}'$。

② 无穷多最优解判别定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解对于一切 $j=m+1,m+2,\cdots,n$，有 $\sigma_j\leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

③ 无界解判别定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解，有一个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}>0$，并且对 $i=1,2,\cdots,m$，有 $a_{i,m+k}\leqslant 0$，那么该线性规划问题为无界解。

5. 单纯形法的计算步骤

(1) 单纯形表

将目标函数与约束条件一起组成 $n+1$ 个变量，$m+1$ 个方程的方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad x_2 \qquad + a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ -z+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m+c_{m+1}x_{m+1}+\cdots+c_nx_n=0 \end{cases} \tag{2-4}$$

将上述式(2-4)写成增广矩阵形式

$$\left[\begin{array}{ccccccccc:c} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & & b \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & & 0 \end{array}\right] \tag{2-5}$$

将 z 看作不参与基变换的基变量，它的系数与 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的系数构成一个基，这时可用初等行变换将 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 变为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵，得

$$\begin{bmatrix} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{i,m+1} & \cdots & c_n-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{in} & -\sum_{i=1}^{m}c_ib_i \end{bmatrix} \quad (2\text{-}6)$$

可根据式(2-6)的增广矩阵，设计一种计算表，即单纯形表，如表 2-1 所示。

表 2-1

$c_j\rightarrow$			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
$-z$		$-\sum_{i=1}^{m}c_ib_i$	0	0	$\cdots$	0	$c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{in}$	

对于表 2-1：

$\boldsymbol{X}_B$ 列中填入基变量，这里是 $x_1,x_2,\cdots,x_m$；

$\boldsymbol{C}_B$ 列中填入基变量的价值系数，它们是与基变量相对应的，这里是 $c_1,c_2,\cdots,c_m$；

$\boldsymbol{b}$ 列中填入约束方程组右端的常数。

c_j 行中填入各变量的价值系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$；θ_i 列的数字是在确定换入变量后，按 θ 规则计算后填入，最后一行是检验数行，对应各变量 x_j 的检验数 σ_j 是

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}, \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

表 2-1 称为初始单纯形表，以它为起点进行迭代，每迭代一次就得到一个新的单纯形表。

(2) 单纯形法的计算步骤

① 找出初始可行基，确定初始基本可行解，建立初始单纯形表；

② 检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$，若

$$\sigma_j \leqslant 0, \quad (j=m+1,m+2,\cdots,n)$$

则已得到最优解，停止计算。否则转入下一步；

③ 在 $\sigma_j>0, j=m+1, m+2, \cdots, n$ 中，若有某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k \leqslant 0$，则此问题为无界解，停止计算。否则转入下一步；

④ 根据 $\max\limits_j(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定 x_k 为换入变量，按 θ 规则计算

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\middle| a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

由此确定 x_l 为换出变量，转入下一步。

⑤ 以 a_{lk} 为主元素进行迭代，把 x_k 所对应的列向量

$$\boldsymbol{P}_k=\begin{bmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{mk}\end{bmatrix}, \text{变换为} \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } l \text{ 个分量}$$

将 $\boldsymbol{X}_B$ 列中的 x_l 换为 x_k，得到新的单纯形表，重复步骤②～步骤⑤直到终止。

注意：

i）当进行迭代后，在 b 列中出现 0，此时为退化情况；

ii）当在计算中遇到两个或更多的相同 θ 值时，则从相同 θ 所对应的基变量中，选择下标最大的那个基变量为换出变量。

6. 单纯形法的进一步讨论

当规划模型化为标准型后，当其约束条件的系数矩阵中不存在单位矩阵时，需再添加新的变量，使其含有单位矩阵，此时的新加变量为人工变量，这种化为标准型的方法称为人工变量法。

对于解决有人工变量的线性规划问题，有以下两种方法：

(1) 大 M 法

在一个线性规划问题的约束条件中加入人工变量后，要求人工变量对目标函数取值不受影响，假定人工变量在目标函数中的系数为 $(-M)$（M 为任意大的正数），这样目标函数要实现最大化时，必须把人工变量换出，否则目标函数不可能实现最大化。

(2) 两阶段法

第一阶段：求解一个目标函数仅含人工变量，且为最小化的线性规划问题，其有两种可能结果：

① 目标函数最优值为 0，则去掉人工变量转入第二阶段；

② 目标函数最优值不为 0，则原问题无可行解，停止计算。

第二阶段：去掉第一阶段中的人工变量，将第一阶段得到的最优解作为初始基本可行解，利用单纯形法继续进行迭代，直至终止。

7. 单纯形法小结

如何化为规范型及如何选取初始基变量，见表 2-2。

表 2-2

		线性规划模型	化为规范型
变量		$x_j\geqslant 0$	不变
		$x_j\leqslant 0$	令 $x_j'=-x_j$ 则 $x_j'\geqslant 0$
		x_j 无约束	令 $x_j=x_j'-x_j''$，且 $x_j',x_j''\geqslant 0$
约束条件	右端项	$b_i\geqslant 0$	不变
		$b_i\leqslant 0$	约束条件两端乘以－1
	形式	$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$	$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{si}=b_i$
		$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$	$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{ai}=b_i$
		$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$	$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{si}+x_{ai}=b_i$
目标函数	极大或极小	$\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$	不变
		$\min z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$	令 $z'=-z$，则 $\max z'=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$
	变量前的系数	加松弛变量 x_{si} 时	$\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum\limits_{i}0\cdot x_{si}$
		加人工变量 x_{ai} 时	$\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j-\sum\limits_{i}Mx_{ai}$

【课后习题全解】

2.1 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解？

(1) $\max z=x_1+3x_2$

$$\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\ x_1+x_2\geqslant 1\\ x_2\leqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=x_1+1.5x_2$

$$\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=2x_1+2x_2$

$$\begin{cases}x_1-x_2\geqslant -1\\ -0.5x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 0\\ 3x_1-x_2\leqslant -3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 (1) 图 2-1 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=x_1+3x_2$，即 $x_2=-\frac{1}{3}x_1+\frac{z}{3}$ 是斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的一族平行线，易知 $x_1=3,x_2=0$ 为可行解，由线性规划的性质知，其最值在可行域的顶点取得，将直线 $x_1+3x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向上平移，直至 A 点，A 点坐标为(2,4)。

所以

$$\max z=2+3\times 4=14$$

此线性规划问题有唯一最优解。

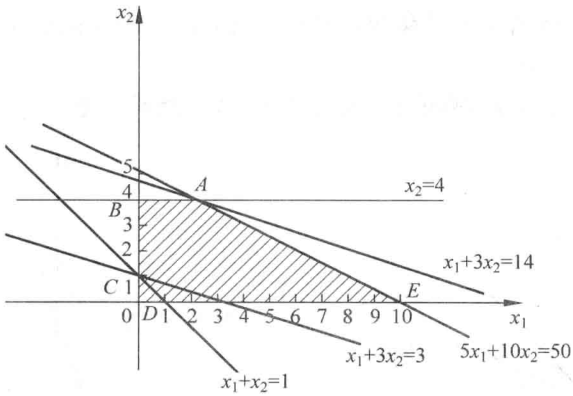

图 2-1

(2) 图 2-2 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=x_1+1.5x_2$，即 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}z$ 是斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的一族平行线，易知 $x_1=3,x_2=0$ 为可行解，由线性规划的性质知，其最值在可行域的顶点取得。

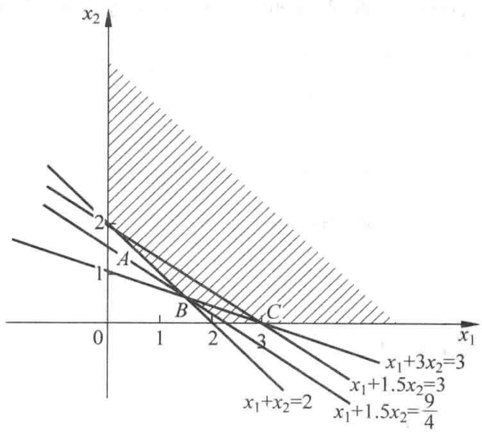

图 2-2