

近代应用光学

(根据西德罗曼教授讲课整理)

清华大学光学仪器教研组

前 言

这份讲义是西德爱尔兰根——纽伦堡 (University of Erlangen — Nurnberg) 大学 Lohmann 罗曼教授 与 Weigelt 博士于 1979 年 8 月 21 日至 9 月 6 日来华在清华大学讲学的内容整理出来的。

由于讲课时有书面讲稿，上课时使用幻灯片较多，而幻灯片又未能留下，故整理时只能根据录音与笔记来进行，整理后又未能请讲授者过目，加以译者、整理者水平所限，恐错误在所难免，希读者能积极提出意见，并协助改正。

全文共 27 讲，其中 2, 4, 25, 26, 27 讲由孙培懋同志整理；5, 7, 9, 10 讲由李达成同志整理；6, 8, 13, 15 讲由戚康男同志整理；11, 14, 16, 22, 24 讲由曹芒同志整理；17, 20, 21, 23 讲由杜玲同志整理；1, 3, 12, 18, 19 讲由金國藩同志整理。

清华大学光学仪器教研组

光学信息处理科研组

一九八〇年二月十五日



录

第一讲	导 言 (L)	1
第二讲	莫尔效应 (W)	13
第三讲	光的本性 (L)	15
第四讲	使用莫尔条纹的光学付立叶计算机 (W)	21
第五讲	衍射理论基础 (L)	29
第六讲	抽样理论 (W)	35
第七讲	泰伯 (Talbot) 效应 (L)	36
第八讲	非线性变换 (W)	40
第九讲	夫朗和费衍射 (L)	46
第十讲	夫朗和费衍射用于字符识别 (L)	49
特殊专题	随机信号的数学描述 (W)	51
第十一讲	粗糙表面的衍射——散斑 (W)	53
第十二讲	似几何光学 (Parageometric Optics) (L)	58
第十三讲	空间滤波 (W)	67
第十四讲	光学传递函数理论 (L)	75
第十五讲	空间带宽积 (The Space-bandwidth Product)	
	(W)	79
第十六讲	成像质量 (L)	85
第十七讲	全息——作为信息处理解释 (L)	91
第十八讲	通过运动雾层的观察 (W)	95
第十九讲	计算全息 (L)	99

第二十讲	用计算全息进行空间滤波(W)	109
第二十一讲	光学的字符识别(L)	112
第二十二讲	天文散斑测角——散斑干涉术(W)	118
第二十三讲	图象处理I (L)	123
第二十四讲	散斑计角学, 测角细度的活动(W)	125
第二十五讲	图象处理系统——II 用电视系统 解微分方程(L)	128
第二十六讲	图象处理III 加大焦距(W)	136
第二十七讲	图象处理IV 电视——光学反馈(L)	143

(L) —— 为 Lohmann 讲授

(W) —— 为 Weigelt 讲授

第一讲 引言

1.1 讲座的结构

本次讲座共分27讲，是由我和 G. Weigelt 博士来讲述的，开始由简单的讲起，以我在美国与德国任教时所用的 *Optical Information Processing* 这本黄皮书出发为主要参考书。

先请大家看一下光学信息处理的一些最近的科研成果。

幻灯片七幅 (Talbot 测眼镜片, 计怀全恩裔·Gabor 像片, 电视反馈等) (略)

在爱尔兰根讲授此课时, 重点在于光学的信息处理, 而不在于能勇与光线问题。

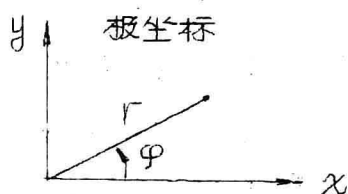
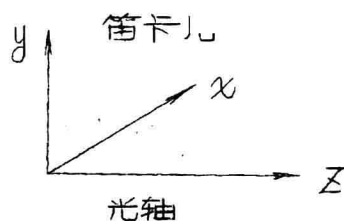
学习此课重要的在于一些思致、概念和一些理论, 在我校学生要花 50% 的时间学习理论, 50% 的时间做些试验。

理论是重要的, 因为有了理论, 做新试验或做新仪口就有了好的想法。

下面给大家看一下在我校学生有关理论的习题 (见本章之后)。

1.2 术语

1) 座标



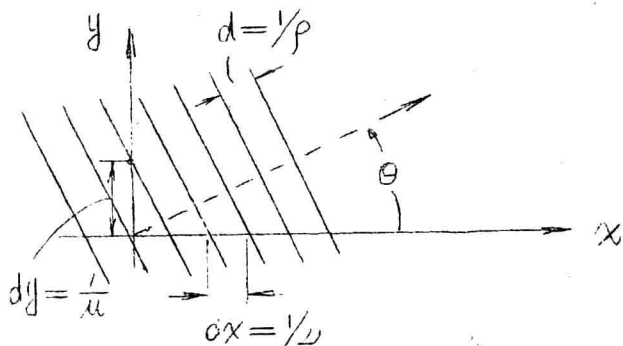
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

矢量 $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ —— 单位矢量

空间频率 ν, μ 或 ν_x, ν_y



$$\cos[2\pi(\nu x + \mu y)]$$

时间频率 $\omega/2\pi = \nu_t$ 或 f

2) 电场

$$\vec{E} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z$$

$$E_x(\vec{r}, t) = E_x(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x, y, z, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

(多色光)

$$E_x(\vec{r}, t) = \text{Rea}[u(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}] \quad (\text{单色光})$$

$u(\vec{r})$ 复振幅

$$I(\vec{r}) = |u(\vec{r})|^2 \quad \text{光强}$$

$$V(\vec{r}, t) = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \tilde{E}_x(x, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{解析信号}$$

$$\int E_x^2 dt = \int |V|^2 dt = \int |\tilde{E}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

3) 图象处理中的映像

$$\begin{cases} \text{振幅: } P(x, y) \\ \text{光强: } F(x, y) = |P(x, y)|^2 \end{cases}$$

在 $z=0$ 平面上的透明片前后的振幅:

$$u_{\text{前}} = u(x, y, z = -0) = u(x, y, -0) = u_-$$

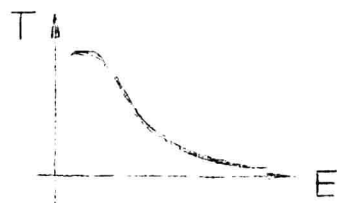
$$u_{\text{后}} = u(x, y, z = +0) = u(x, y, +0) = u_+$$

$$\text{振幅透过率: } \tau(x, y) = |T|^2 = I_+ / I_-$$

$$\text{密度: } D = -\lg_{10}(\tau)$$

$$\text{曝光量: } E(x, y) = \int_0^{\Delta t} I(x, y, t) dt$$

$$\text{曝光时间: } \Delta t$$



4) 角标

O — 物体;

B — 像;

n, m — 透镜角标。

5) 数学符号

$$\text{付氏变换: } \int u(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \tilde{u}(\nu)$$

$$\text{菲涅尔变换: } \int u(x') e^{-i\pi(x-x')^2} dx' = \tilde{u}(x)$$

$$\text{卷积: } \int u(x') p(x-x') dx' = u * p$$

$$\text{相关: } \int u(x'+x) u^*(x') dx = u \oplus u$$

1.3 付氏级数

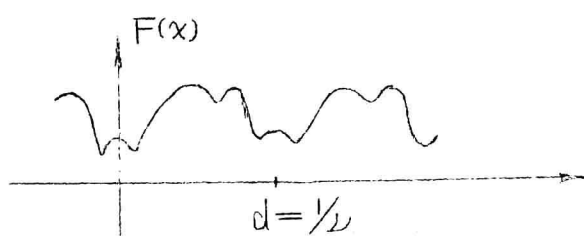
J. B. FOURIER 为法国科学家, 约在 1820 年, 说每一周期函数可由正弦函数与余弦函数合成。

本节的内容, 包括付氏级数的定义, 基本公式:

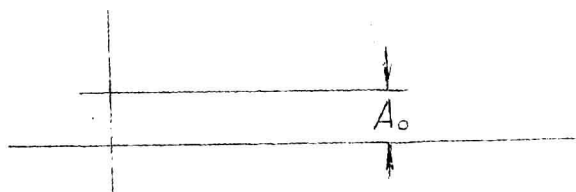
$$C_n = \frac{1}{d} \int F(x) e^{-2\pi i n \nu x} dx$$

的证明。一些一般付氏级数的性质, 和一些示例。

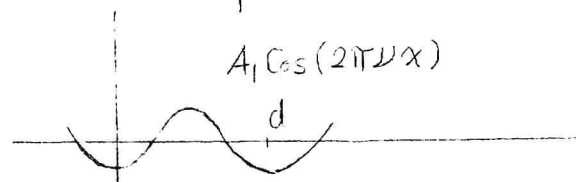
1) 下列一周期函数: 可分解为直流分量, 正弦函数与余弦函数



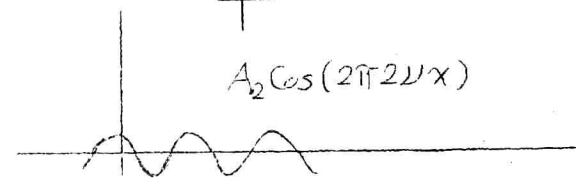
||



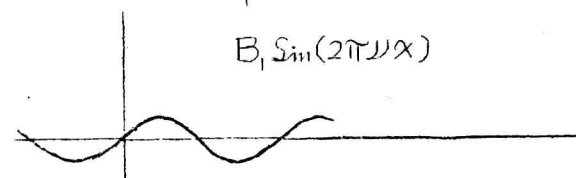
+



+



+



⋮

数的基波，二次谐波，
三次谐波，……等。

即：

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n d x)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n d x)$$

现在的问题是如何选择 a_n, b_n 使表示的函数更接近 $F(x)$,
或误差最小。

由于求和 Σ 是由 $n=0$ 至 $n=\infty$ ，因此式子太长。

只取有限项之和：即 $S_N = \sum_{n=0}^N A_n \cos(2\pi n \nu x) + \sum_{n=0}^N B_n \sin(2\pi n \nu x)$

我们希望： $S_N(x) \approx F(x)$

也就是： $F(x) - S_N(x) = E(x)$ 误差最小。即选取 A_n 与 B_n 使 $E(x)$ 较小。

从均方差小的角度来看：

$$\frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} |E(x)|^2 dx = \sigma^2$$

σ^2 为 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, \dots$ 的函数。

如 $\frac{\partial \sigma^2}{\partial A_0} = 0, \frac{\partial \sigma^2}{\partial A_1} = 0, \dots, \frac{\partial \sigma^2}{\partial B_1} = 0$ 则 σ^2 最小。

现在进行些简化：

设 $F(x)$ 为实数，故 A_n, B_n 亦为实数。

又设 $F(x)$ 为对称函数，故 $B_n = 0$ （因 $F(x) = F(-x)$ ）。

$$\begin{aligned} \text{这时: } \sigma^2 &= \frac{1}{d} \int [F(x) - A_0 - A_1 \cos(2\pi \nu x) - A_2 \cos(2\pi 2\nu x)]^2 dx \\ &= \frac{1}{d} \int F^2(x) dx - 2A_0 \frac{1}{d} \int F dx - 2A_1 \frac{1}{d} \int F \cos(2\pi \nu x) dx - \dots \\ &\quad + A_0^2 \frac{1}{d} \int dx + 2A_0 A_1 \frac{1}{d} \int \cos(2\pi \nu x) dx + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial A_0} = -2 \frac{1}{d} \int F(x) dx + 2A_0 \underbrace{\frac{1}{d} \int dx}_{=1} = 0 \quad \text{故 } A_0 = \frac{1}{d} \int F(x) dx$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial A_1} = -2 \frac{1}{d} \int F(x) \cos(2\pi \nu x) dx + 2A_1 \frac{1}{d} \int dx = 0$$

$$\text{故 } A_1 = \frac{1}{d} \int F(x) \cos(2\pi \nu x) dx$$

但在一般情况下： $F(x)$ 为一复函数。故 A_n, B_n 也是复数。

从欧拉公式可知：

$$\cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{及} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

故 $F(x)$ 可写为:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi i n \nu x}; \quad \nu = 1/d$$

其中 ν —— 空间频率; d —— 空间周期.

因此付氏系数 C_n 为:

$$C_n = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} F(x) e^{-2\pi i n \nu x} dx$$

2) 一些有用的性质

a. 实性对称或厄米特对称

如 $F(x)$ 实数 $= F^*(x)$ (*表示复数共轭)

此时 $C_n = C_{-n}^*$

b. 线性叠加

如 $F_1(x)$ 奥尚系数为 $C_n^{(1)}$ 及 $F_2(x)$ 奥尚系数为 $C_n^{(2)}$

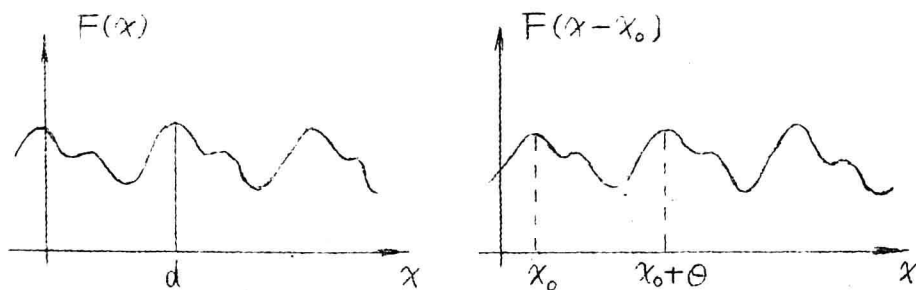
则 $F(x) = [F_1(x) + F_2(x)]$ 奥尚 $C_n = C_n^{(1)} + C_n^{(2)}$

c. 微分

如 $F(x)$ 奥尚 C_n , $G(x)$ 奥尚 D_n 系数.

並设 $F(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ 则 $C_n = 2\pi i n D_n$

d. 移位定理



如 $F(x)$ 移至 $F(x - x_0)$

这时 C_n 也就应变为 $C_n e^{-2\pi i n \nu x_0}$

证明: $F(x) = \sum C_n e^{2\pi i n \nu x}$

$$F(x-x_0) = \sum C_n e^{2\pi i n \nu (x-x_0)} \\ = \sum \underbrace{C_n e^{-2\pi i n \nu x_0}}_{\text{新的付氏系数}} e^{2\pi i n \nu x}$$

e. 卷积

$$F(x) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} G_1(x') G_2(x-x') dx' = G_1 * G_2$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_n & E_n^{(1)} & B_n^{(2)} \end{array}$$

因此:

$$C_n = B_n^{(1)} \cdot B_n^{(2)}$$

f. 相关

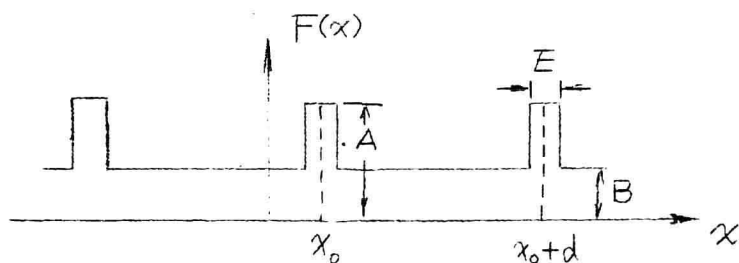
$$F(x) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} G_1(x') G_2^*(x'-x) dx$$

这时

$$C_n = B_n^{(1)} \cdot B_n^{(2)}$$

3) 示例: 目的是应用一些一般性质

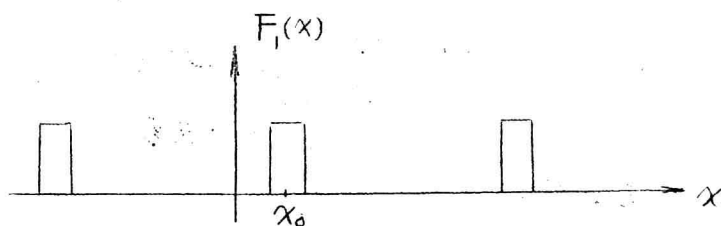
a. 求下列函数的付氏系数



$$F(x) = \sum C_n e^{2\pi i n \nu x} \quad \text{问 } C_n = ?$$

可将此函数看成

$$F(x) = F_1(x) + B;$$

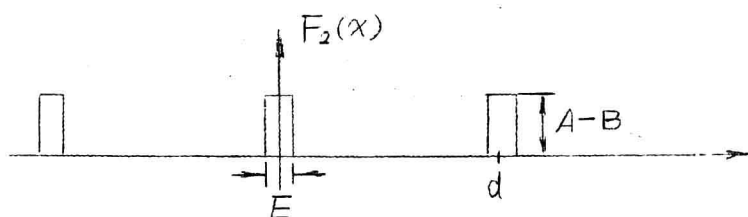


则 $C_n = C_n^{(1)} + B \cdot \delta_{n,0}$

$$\delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & \text{如 } n=0 \\ 0, & \text{如 } n \neq 0 \end{cases}$$

再还可将 $F_1(x)$ 看成 $F_2(x)$ 的移位：

$$F_1(x) = F_2(x - x_0)$$



$$C_n^{(2)} = C_n^{(1)} e^{2\pi i n \nu x_0}$$

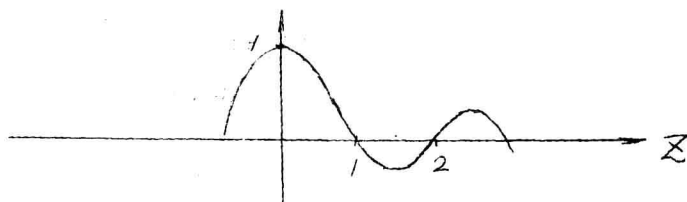
即 $C_n^{(2)} = \frac{1}{d} \int_{-\frac{E}{2}}^{+\frac{E}{2}} (A-B) e^{-2\pi i n \nu x} dx = (A-B) E \text{Sinc}(n \nu E)$

因此 $C_n = C_n^{(1)} + B \delta_{n,0}$

其中 $C_n^{(1)} = C_n^{(2)} e^{-2\pi i n \nu x_0}$

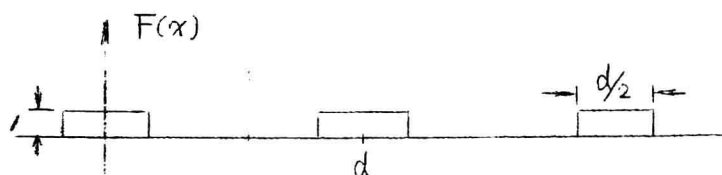
故 $C_n = E(A-B) e^{-2\pi i n \nu x_0} \text{Sinc}(n \nu E) + B \cdot \delta_{n,0}$

注： $\text{Sinc}(z) = \frac{\text{Sin}(\pi z)}{\pi z}$ 即狭缝的衍射情况。



两种特殊情况

a) 矩形槽形黑白相间的光栅 (Ronchi-Grating)



此时 $B=0$, $A=1$, $E=d/2$, $x_0=0$

因此 $C_0 = 1/2$

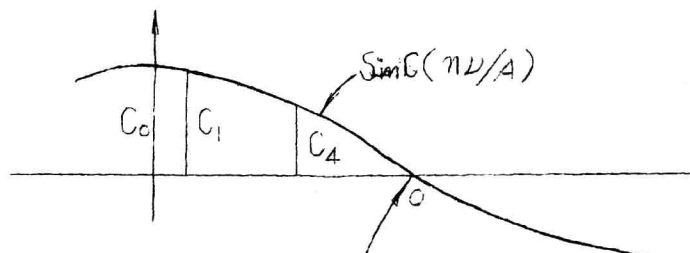
$$C_n = \frac{d}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \quad (n \neq 0)$$

而且 $C_2 = C_4 = C_6 = \dots = 0$

b) 梳状函数

此时 $B=0$, $x_0=0$, $E=1/A$

$$\text{这时 } C_n = \operatorname{sinc}(n\mathcal{V}/A) = \frac{\sin(\pi n\mathcal{V}/A)}{\pi n\mathcal{V}/A}$$

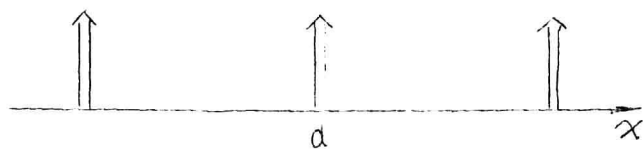


$$\text{当 } n_0\mathcal{V}/A = 1 = \frac{n_0}{A \cdot d}; \quad n_0 = A \cdot d$$

如使 A 值非常之大 ($\rightarrow \infty$)

则 当 $|n| \ll n_0$ 时, $C_n \approx 1$.

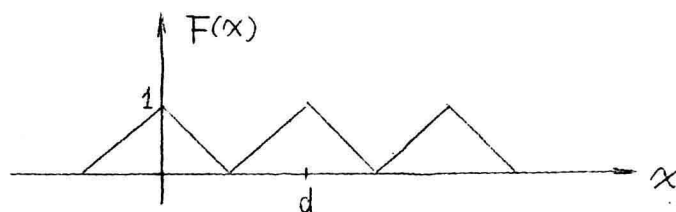
此时即梳状函数:



$$F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n \mathcal{V} x}$$

b. 示例2

如下 $f(x)$ 为一锯齿形函数

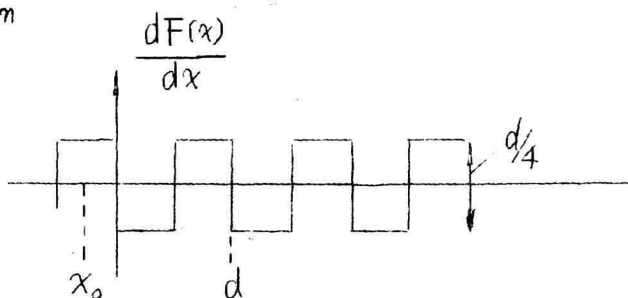


$$F(x) = \sum C_n e^{2\pi i n x / d}$$

我们希望使用此定理:

$$G(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad C_n \quad B_n = 2\pi i n C_n$$

$\uparrow$
 B_n



$$\frac{dF(x)}{dx} \text{ 就相当于 Ronchi 光栅位移 } x_0 = -\frac{d}{4}$$

这时其系数要乘 $1/d$, 并减去 $2/d$.

$$\text{Ronchi 的系数 } C_n = \frac{1}{2} \text{Sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

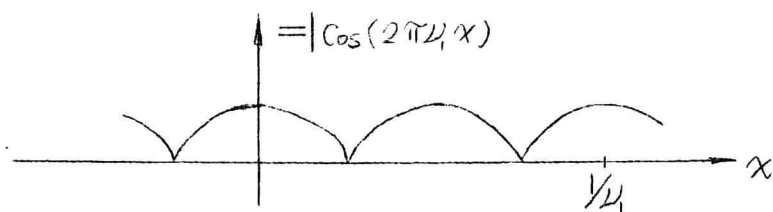
故现在的付氏系数为:

$$B_n = \frac{4}{d} \cdot \frac{1}{2} \text{Sinc}\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{2}{d} \delta_{n,0} = \frac{2}{d} \text{Sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{但 } B_0 = 0$$

$$C_n = \frac{\text{Sinc}\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi i n d}; \quad C_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{d} \int F(x) dx$$

家庭作业 (一)

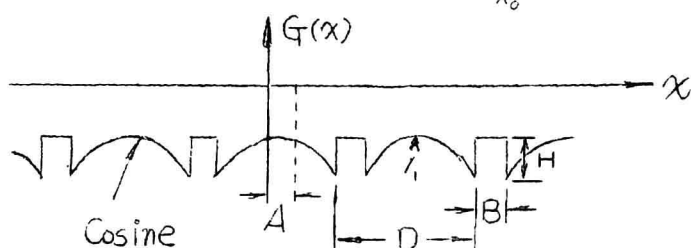
1. 计算 $G(x)$ 的付氏系数:



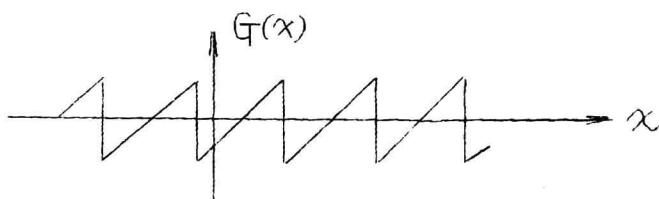
$$G(x) = \sum_{(n)} C_n e^{2\pi i n x/d}; \quad d \text{ 为周期.}$$

2. 计算付氏系数 C_n

使用一些定理: $C_n = \frac{1}{D} \int_{x_0}^{x_0+D} G(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{D}} dx$



3. 计算锯齿形的 C_n .



4. 已知 $G(x)$ 的付氏系数为 C_n , 什么是 $F(x) = -AG^*(-x) + B$ 的付氏系数?

5. A_n 与 B_n 两组付氏系数的关系为:

$$B_n = D \cdot A_{-n+m}^* - E$$

$G_A(x)$ 与 $G_B(x)$ 有何关系?

6. $G(x+d/4) - G(x-d/4) = G(x)/2$

C_n 应为何?

家庭作业 (二)

7. 如 $C_0 = 1/4$, $C_{4n} = 0$, $G(x)$ 应为何?
8. 如 $G(x)$ 具有付氏系数 C_n . 什么是 $H(x) = G(x) \cdot G^*(-x)$ 的付氏系数?
9. 计算 $\int_{-1/2}^{1/2} \sin(\frac{\pi x}{30}) e^{2\pi i x(x-5)/5} dx = ?$
10. 以 W 宽度的狭缝进行扫描 $F(x) = \int_{x-W/2}^{x+W/2} G(x') dx'$
如 $G(x)$ 已知, 是否能计算 $G(x)$ 的付氏系数?
11. 由于振动的影响使照相模糊, 即在曝光时间 $\Delta t = 2\pi/\omega$ 下, $G(x)$ 的每一个点 x 具有运动 $x + A \sin \omega t$, 如 $G(x)$ 的付氏系数 C_n 已知, 计算模糊像的付氏系数 B_n ?

家庭作业 (三)

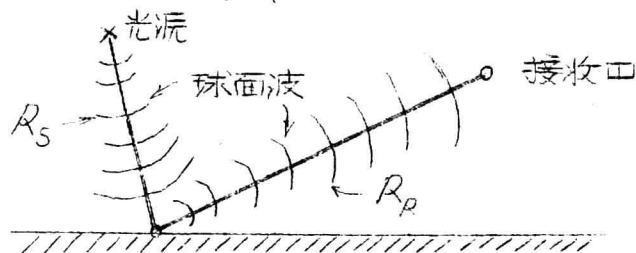
12. 椭圆菲涅尔波带片的条纹为:

$$F(x, y) = \sum_{(n)} C_n e^{2\pi i \left[\left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{y}{B} \right)^2 \right]}$$

使其中的一块 $F(x, y)$ 沿 $(+x_0, -y_0)$ 方向移动, 另一块沿 $(-x_0, -y_0)$ 方向移动, 试计算其莫尔条纹。

13. 如一函数当 $|v| > \Delta v/2$, $\tilde{u}(v) = 0$ 即付氏变换是限带的, 试求出菲涅尔变换 $\hat{u}(x)$ 的取样定理?
14. 应用惠根斯定理及鞍点法, 去证明反射定理。

$$u_R = \iint \frac{e^{ik(R_S + R_R)}}{R_S R_R} dx \cdot dy$$



$$R_s = R_s(x, y)$$

x, y 为反射镜面上的坐标。

15. 如一光栅以发射的球面波照明，试讨论 Talbot 效应。
 16. 试作衍干涉波。如物体为格子形（棋盘形），只有当
 对角付氏系数 C_{nm} 只有在 $n=m$ 下可通过此干涉波中，
 试讨论此像。

第二讲 莫尔效应

2. 1 小位移测量的实验

我们来介绍用莫尔条纹测量小位移的实验。设有二个光栅，
 光栅 1  光栅 1 和光栅 2 如图 2-1。它们的光
 强透射率分别用 $T_1(x)$ 和 $T_2(x)$ 表示，
 光栅 2  相应的空间频率是 ω_1 和 ω_2 。它们是光
 栅间距的倒数。当把两光栅重合在一起
 图 2-1 时，它们的总透射率用 $T(x)$ 表示

$$T(x) = T_1(x) \cdot T_2(x) \quad (2-1)$$

可以实验地看到 $T(x)$ 组成了莫尔 (Moire) 条纹，并且对应于
 光栅的较小的位移会引起莫尔条纹较大的位移。例如，光栅位移
 1 mm，莫尔条纹可能移动 5 或 10 mm 或者更大的位移。这种现
 象可以用来测量小位移。

2. 2 理论分析

由于光栅的透射率分布是周期性的，因此两个光栅的透射率
 分布可分别用付立叶级数展开，即有

$$T_1(x) = \sum_n A_n e^{2\pi i n \omega_1 x} \quad (2-2)$$

$$\text{和} \quad T_2(x) = \sum_m A_m e^{2\pi i m \omega_2 x} \quad (2-3)$$