普通高等教育"十二五"规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

郭运瑞 主编

高等数学同步学习辅导

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

高等数学同步学习辅导

主　编　郭运瑞
副主编　宋林森　胡丽平
　　　　李巧萍　马巧云
编　者　（按姓氏拼音排序）
　　　　白春阳　何春花　刘　娟
　　　　陆　博　杨小飞　原冠秀
　　　　张清山　赵营峰

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等数学的学习指导书，主要内容与郭运瑞主编的、科学出版社出版的《高等数学》教材同步，是根据“高等数学本科质量与教学改革工程”的需要，参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，应同学们的热切要求编写而成的.

本书以章为序，每章分为学习目标、内容提要、典型例题及方法和课后习题精解四个部分，对高等数学的理论与概念进行了梳理和总结，对典型例题与课后习题给出了详细解答，并结合问题探究与方法点击两种方式，对问题进行了深入剖析，以帮助读者进一步掌握分析问题的数学思想和解决问题的数学方法与技巧. 主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与矢量代数，多元函数的微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，微分方程，无穷级数等.

本书可以作为高等院校理工类专业的高等数学配套辅导书，也可供学生自学和考研学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导/郭运瑞主编．—北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材·理工类大学数学教学丛书·河南省精品课程配套教材
ISBN 978-7-03-038244-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 176707 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：胡小洁
责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013 年 8 月第一次印刷 印张：18 1/2
字数：395 000

定价：36.00 元

《理工类大学数学教学丛书》编委会

丛书序

随着我国高等教育进入“大众化教育”的阶段，高等教育在培养目标和教学要求等方面更加呈现出多层次、多元化的趋势. 不同层次高校的学生和学科对数学课程的需求也是不同的. 地方普通高校的大学数学课程如何改革，如何提高教学质量，以及数学课程如何配合所在高校各专业的人才培养，成为当前我国地方普通高校的一个重要研究课题. 尤其是对于地方普通高校的一线教师，非常需要适用于该层次的生源特点和学生基础的大学数学教材. 特别是 2004 年高中施行新课改以来，其中的变化也必然影响到高校的数学教学，高校应该及时地做出适当的调整. 河南省教学名师奖获得者、河南省精品课程的主持人郭运瑞教授，2005 年以来主持的“大学数学分层次教学的研究与改革实践”和“高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践”作为重要的研究课题，被列入“河南省普通高等教育教学改革项目”，并获得了“河南省普通高等教育省级教学成果奖”. 这套《理工科大学数学教学丛书》是她带领的教学团队与兄弟院校的教学团队多年来奋斗在教学改革第一线的研究和实践成果.

这套丛书的特色在于，它适应大众化教育时代地方普通高校的学生和学科的特点和要求，能更好地适应学生专业学习与发展的要求，适应学生自身条件和发展目标个性化的需求，适应普通高校大学数学分层次教学的需要. 该套丛书内容加强了数学概念与相关背景的联系，加强了数学内容与实际问题的联系，将数学建模的思想和方法渗透到教材中去，重视培养学生运用数学知识以及数学软件解决实际问题的意识与能力. 同时该套丛书注意到对教学内容主线的适当延伸，这有助于开拓学生的思路和眼界，加强数学与其他学科和实践之间的联系，也体现了数学广泛的应用性. 该套丛书中注意了数学思想的传授，渗透了数学文化的理念，注重了学生数学素质的培养. 该套丛书内容繁简得当，叙述简洁明了，前后衔接自然，对学生把握知识间的联系十分有益.

作者借鉴了国内外同类教材的长处，吸收了众多最新的教学和科研成果，融入了自己多年的经验，使内容更加充实和有新意. 相信这套丛书在满足广大读者

的学习需要的同时，也会在我国大学数学课程的教学改革过程中发挥积极有益的作用.

感谢丛书的作者们和他们团队为我国大学数学教学改革和发展所作的努力.

顾沛

2012 年 3 月于南开园

前　言

高等数学是高等学校一门重要的基础课程，它不仅是理工类专业课程的基础，同时也是一门理工类专业硕士研究生入学考试的必考课程．本书是根据“高等学校本科教学质量与教学改革工程”的需要，参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，应同学们的热切要求编写而成的，是编者多年教学实践的总结．编者是省级教学名师奖获得者，主讲的高等数学是省级精品资源课程，获得了省级教学改革“大学数学分层次教学的研究与改革实践”和“高中数学新课改后大学数学教学改革的研究与实践”两项教学成果奖．

本书与科学出版社出版的郭运瑞主编的《高等数学》同步，为了方便读者学习与提高，本书主要设置了以下几个栏目：

(1)学习目标　指出每章读者需要理解、掌握及了解的内容，帮助读者明确目标，做到心中有数；

(2)内容提要　对每章涉及的基本概念、基本定理进行梳理、凝练与归纳，以供读者学习、回顾教材内容，从而进一步夯实基础；

(3)典型例题及方法　以《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》为据，精选大量不同难度、不同类型的相关例题，给出详细解答，并进行相应的问题探究与方法点击，以帮助读者进一步掌握分析问题的数学思想和解决问题的数学方法与技巧；

(4)课后习题精解　对每节的全部习题作了详细解答，同时以注解的形式对解题要点、关键与方法进行警示．

本书融入了编者多年的教学经验，相信它能对读者更好地理解抽象的数学概念，掌握分析问题和解决问题的数学思想、方法和技巧，更好地把握数学的教学要求，进一步提高高等数学课程的教学质量，帮助读者继续进行深造起到重要的作用，能成为读者的良师益友．

本书由郭运瑞主编，宋林森、胡丽平、李巧萍、马巧云、白春阳、何春花、刘娟、陆博、杨小飞、原冠秀、张清山、赵营峰参加了编写工作．由郭运瑞、宋林森统一定稿．

在本书出版过程中，得到了科学出版社的大力支持，在此深表感谢！

由于编者学识水平所限，书中难免有错误和不妥之处，敬请同行专家和读者不吝指教．

编　者

2012 年 6 月

目　录

第 1 章　函数 极限和连续

函数是高等数学的主要研究对象，它是对客观世界中变量与变量之间依存关系的反映. 极限概念是由研究变量的变化趋势而产生的，极限方法是深入研究函数的重要方法，它是高等数学微积分理论的基础. 连续性是很广泛的一类函数所具有的重要特性. 本章主要内容为初等函数、函数的极限及连续性等基本概念及其主要性质，它们是学习高等数学的基础.

学习目标　理解函数的概念，掌握函数的表示方法，了解函数的奇偶性、单调性、周期性等性质；理解极限的概念，掌握极限性质及四则运算法则、极限存在准则；掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限；理解连续性概念，会判断间断点的类型；理解闭区间上连续函数的性质，并会运用这些性质.

一、内 容 提 要

1. 函数与初等函数　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数；由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算用一个表达式表示的函数，称为初等函数.

2. 复合函数　复合函数是复合映射的一种特例，可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成，与复合映射一样，g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 R_g 必须含在函数 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数.

3. 分段函数　在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数. 所有解析式对应的自变量取值的并集是该函数的定义域.

4. 函数的几种性质

(1)有界性. 设函数 $y=f(x)$ 在 X 内有定义，若存在正数 M，使 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的.

(2)奇偶性. 设区间 X 关于原点对称，若对 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是奇函数；若对 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶

函数.

(3)单调性. 设 $f(x)$ 在 X 上有定义,若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的或单调减少的.

(4)周期性. 设 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 $T \neq 0$,使得任意 $x \in X, x+T \in X$,都有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期. 并非每个周期函数都有最小正周期.

5. 极限的形式

(1)数列的极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$;

(2)函数的极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

6. 极限的基本性质

(1)极限的唯一性 如果 $\lim f(x)$ 存在,则这极限唯一.

(2)极限的不等式性质 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,若 x 变化一定程度以后,总有结论 $f(x) \geqslant g(x)$,则 $A \geqslant B$ 成立;反之,若 $A > B$,则 x 变化一定程度以后,有 $f(x) > g(x)$.

(3)极限的局部有界性 设 $\lim f(x) = A$,则当 x 变化一定程度后,有 $f(x)$ 有界.

7. 无穷小与无穷大

(1)无穷小 若 $\lim f(x) = 0$,则称 $f(x)$ 为这一变化过程中的无穷小. 无穷小与 x 的变化过程有关,说明函数为无穷小必须指明自变量的变化过程.

(2)无穷大 任给 $M > 0$,当 x 在某个变化过程中,总有 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 为这一变化过程中的无穷大. 说明函数为无穷大也必须指明自变量的变化过程.

(3)无穷小与无穷大的关系 在 x 的同一个变化过程中,若 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小,若 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

8. 无穷小的比较 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$,且 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$,则

(1)若 $l = 0$,称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小,记作 $f(x) = o[g(x)]$;

(2)若 $l \neq 0$,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小;

(3)$l = 1$,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等阶无穷小,记作 $f(x) \sim g(x)$.

常见的等价无穷小有:当 $x \to 0$ 时,有 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

9. 函数在一点连续的概念 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续;函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续,又是右连续. 若函数在区间内任一点处连续,称函数在区间内连续.

10. 极限的运算

(1)运算性质　设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则有

$\lim[f(x)+g(x)]=A+B$;　　$\lim[f(x)-g(x)]=A-B$;

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;　　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$;

$\lim[f(x)]^{g(x)}=A^B(A>0)$.

(2)两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(3)初等函数的连续性　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

(4)数列的夹逼准则　如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足下列条件:

①从某项起,有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,

②$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,那么有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【注】 数列极限的存在定理"单调有界数列一定存在极限"通常用来证明数列极限的存在性.

(5)等价无穷小的替换.

(6)有界变量乘无穷小仍是无穷小.

(7)洛必达法则(第 3 章).

11. 函数的间断点及其分类

(1)函数的间断点　如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不连续,则称 x_0 为 $f(x)$的间断点.

(2)函数的间断点分类

①第一类间断点.左、右极限都存在的间断点,称为函数 $f(x)$的第一类间断点,第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点;

②第二类间断点.左、右极限至少有一个不存在的间断点,称为函数 $f(x)$的第二类间断点,常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点.

12. 闭区间上连续函数的性质

定理 1(最大值和最小值定理)　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m.

定理 2(零点定理)　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则在(a,b)内至少存在一个点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.

定理 3(介值定理)　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且其最大值和最小值分别为 M 和 m,则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c,在$[a,b]$上至少存在一个 ξ,使得 $f(\xi)=c$.

【注】 零点定理与介值定理通常可以解决方程有根问题.

二、典型例题及方法

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(\cdots f(x))]=f_n(x)$（n 重复合）.

解 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，若 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\Bigg/\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

根据数学归纳法可知，对正整数 n，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 2 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f(0)=0$，即有 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

例 3 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)-x\right]$ 的间断点，并判别其类型.

解 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，$f(x)=-1-x$，当 $|x|=1$ 时，$f(x)=-x$，当 $|x|>1$ 时，$f(x)=1-x$. 所以 $f(x)=\begin{cases} -1-x, & |x|<1, \\ -x, & |x|=1, \\ 1-x, & |x|>1 \end{cases}$ 是分段函数，分段点为 ±1，$f(1)=-1$，$f(1-0)=-2$，$f(1+0)=0$，$f(-1)=1$，$f(-1-0)=2$，$f(-1+0)=0$. 所以 $x=\pm1$ 皆是第一类间断点（跳跃间断点）.

例 4 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则 $n=$（　　）.

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

解 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，由 $2<n+1<4$ 可知 $n+1=3$，故 $n=2$. 选 B.

例 5 设 $a_m\neq0$，$b_n\neq0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{m-n}[a_m+a_{m-1}x^{-1}+\cdots+a_1x^{1-m}+a_0x^{-m}]}{b_n+b_{n-1}x^{-1}+\cdots+b_1x^{1-n}+b_0x^{-n}}$

$=\begin{cases}0, & \text{当 } m<n \text{ 时},\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & \text{当 } m=n \text{ 时},\\ \infty & \text{当 } m>0 \text{ 时}.\end{cases}$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{-2}{x+1}\right)\right]^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)\left(\frac{-2x}{x+1}\right)}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

解 令 $x_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$，$y_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$，则 $0<x_n<y_n$，于是$0<x_n^2<x_ny_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=0$，于是原极限为 0.

例 8 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=f(1)$. 求证：在$[0,1]$上至少存在一点 ξ 使 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$（$n\geqslant 2$ 正整数）.

证明 令 $G(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$，$x\in\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$，则 $G(0)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)$.

$G\left(\dfrac{1}{n}\right)=f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$G\left(\dfrac{2}{n}\right)=f\left(\dfrac{3}{n}\right)-f\left(\dfrac{2}{n}\right)$，$\cdots$，$G\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=f(1)-f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

于是 $G(0)+G\left(\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+G\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$.

(1) 如 $G\left(\dfrac{i}{n}\right)$（$i=0,1,\cdots,n-1$）有项为 0，则已证；因为 $\xi=\dfrac{i}{n}$，$G(\xi)=0$，$f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$成立.

(2)如果 $G\left(\dfrac{i}{n}\right)$（$i=0,1,\cdots,n-1$）全不为 0，则不可能同号，否则相加后不为 0，矛盾.

所以其中一定有异号，不妨假设 $0\leqslant i_1<i_2\leqslant n-1$，$G\left(\dfrac{i_1}{n}\right)$与$G\left(\dfrac{i_2}{n}\right)$异号.

根据零点定理可得，至少存在 $\xi\in\left(\dfrac{i_1}{n},\dfrac{i_2}{n}\right)$使 $G(\xi)=0$，则 $\xi\in(0,1)$，使

$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$成立.

三、课后习题精解

习题 1.1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同,为什么?

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $g(x)=\operatorname{sgn}x$;　　(2) $f(x)=\frac{x}{x}$, $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$;

(3) $f(x)=\ln(x^2-4)$, $g(x)=\ln(x-2)+\ln(x+2)$;　　(4) $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$.

解　(1)两函数不是相同的函数,因为它们定义域不相同,函数 $f(x)$的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$,而函数 $g(x)$的定义域是 $x\in\mathbf{R}$.

(2)两函数不是相同的函数,因为它们定义域不同,函数 $f(x)$的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$,而函数 $g(x)$的定义域是 $x\in\mathbf{R}$.

(3)两函数不是相同的函数,因为它们定义域不同,函数 $f(x)$的定义域为 $x>2$ 或 $x<-2$,而函数 $g(x)$的定义域是 $x>2$.

(4)两函数不是相同的函数,因为它们定义域不同,函数 $f(x)$的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,而函数 $g(x)$的定义域是 $x\geqslant0$.

【注】 两个函数相同是指两个函数的定义域和对应法则分别相同.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x^2-4}$;　　(2) $y=\sqrt{3x+2}+\frac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\ln\arcsin x$;　　(4) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$.

解　(1)当 $x^2-4\geqslant0$ 时函数有意义,$x^2-4\geqslant0\Rightarrow|x|\geqslant2\Rightarrow x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2$,所以该函数的定义域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$;

(2)当 $3x+2\geqslant0$ 且 $1-x^2\neq0$ 时函数有意义,而 $3x+2\geqslant0\Rightarrow x\geqslant-\frac{2}{3}$,另外再由 $1-x^2\neq0\Rightarrow x\neq1$,于是可知,该函数的定义域为$\left[-\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$;

(3)当 $\arcsin x>0$ 时函数有意义,而由 $\arcsin x>0\Rightarrow x\in(0,1]$,所以可得原函数 $y=\ln\arcsin x$ 的定义域即为$(0,1]$;

(4)当 $x^2-3x+2\neq0$ 时函数有意义,而 $x^2-3x+2\neq0\Rightarrow x\neq1$ 且 $x\neq2$ 所以原函数 $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

3. 求下列函数值:

(1) $f(x)=x^2-9x+14$,求函数值 $f(2)$, $f(-1)$, $f(a+1)$, $f(x_0+h)$;

(2) $f(x)=3x^4+1$,求 $f(1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$;