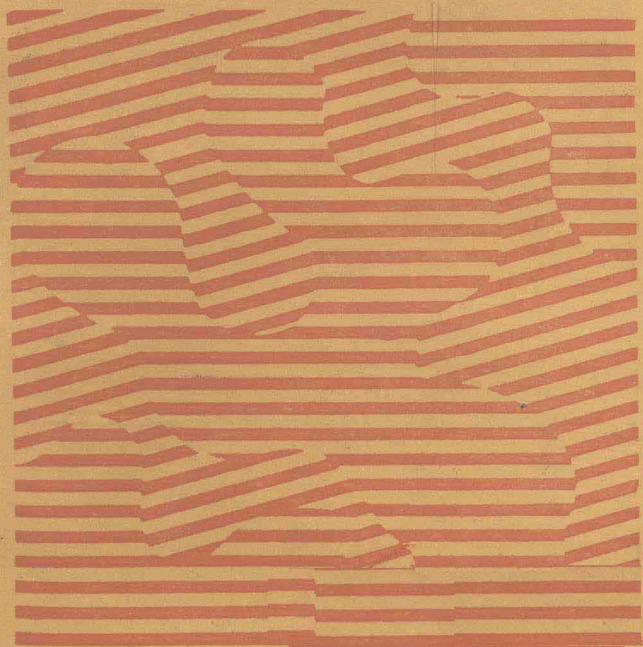


九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

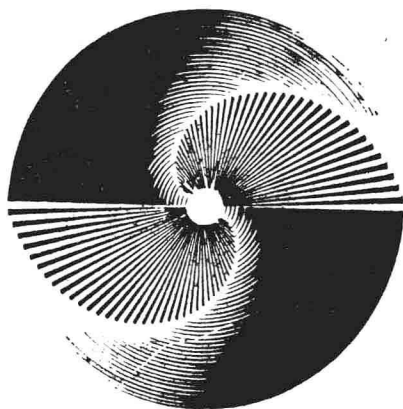
不等式

黄秉镇



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

不等式

黄秉镇

四川教育出版社

一九九二年二月·成都

(川)新登字005号

责任编辑：何伍鸣

封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物

不 等 式

黄 秉 镇

四川教育出版社出版发行
四川省新华书店经销

(成都盐道街三号)
自贡新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32
1992年7月第一版

印张5 插页1 字数86千
1992年7月第一次印刷

印数：1—4810册

ISBN7-5408-1740-2/G·1662

定价：1.75元

前言

这套读物主要是为初中学生而写的，我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生与其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目 录

一 不等式的意义和性质.....	2
§ 1 不等式的意义.....	2
§ 2 不等式的性质.....	4
二 一元一次不等式.....	13
§ 1 解不等式的有关概念.....	13
§ 2 一元一次不等式的概念与求解.....	14
§ 3 一元一次不等式组.....	17
三 二次函数与一元二次不等式.....	23
§ 1 二次函数与一元二次不等式.....	23
§ 2 求解一元二次不等式.....	25
§ 3 一元二次不等式的应用举例.....	28
四 绝对值不等式.....	41
§ 1 “ $ f(x) > a$ ”与“ $ f(x) < a$ ”型不等式.....	41
§ 2 “ $ f(x) > g(x) $ ”型不等式.....	44
§ 3 “ $a < f(x) < b (0 < a < b)$ ”型不等式.....	45
§ 4 有多个绝对值符号的简单不等式.....	46
§ 5 杂例.....	50
五 简单无理不等式.....	56
§ 1 “ $\sqrt{f(x)} > a (< a)$ ”型不等式.....	56

§ 2	“ $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ”型不等式·····	58
§ 3	“ $\sqrt{f(x)} > g(x) (< g(x))$ ”型不等式·····	61
§ 4	错例解析·····	65
六	解不等式的几个特殊方法·····	70
§ 1	序轴法·····	70
§ 2	分段定号法·····	77
§ 3	换元法·····	81
§ 4	图象法·····	84
七	简单不等式的证明·····	94
§ 1	最基本不等式·····	94
§ 2	证明不等式的常见方法·····	96
§ 3	杂例·····	115
八	不等式与平面几何·····	122
§ 1	平面几何问题的不等式证明·····	122
§ 2	简单不等式的平面几何证明·····	130
九	杂例·····	136
附	练习题答案或提示·····	145

我邻居的王奶奶曾笑着告诉我，她的两岁的孙孙饿了去取饼，选择了较大的一个。十几年前，我带着女儿去幼儿园入园应试，第一个题目是“乒乓球大还是皮球大？”。初中数学竞赛，高等学校入学考试，也不乏比较大小的问题。尊敬的读者，从幼儿起，人们就认识并重视比较大小，这种现象并非偶然。

世界之大，宇宙之阔，粒子之微，火箭之速，事物性态，千差万别。从量的角度看，相等关系只是特殊情况，是暂时的、个别的、少量的，而不等关系则是一般情况，是长久的、普遍的、大量的。研究不等问题无疑在生产、生活中具有重要意义，也是进一步学习的基础。本书在初中知识的基础上学习、讨论、研究一些不等关系的问题。下面我自任向导，与读者携手遨游数学王国中“不等式”那间神秘的殿堂，享受其间的妙趣。

一 不等式的意义和性质

§ 1 不等式的意义

初中阶段涉及的数都是实数。实数包含有理数和无理数两部分。实数的全体称为实数集合。实数集合是一个有序集合，因而实数是可以比较大小的。实数集合内每一个数都可以在数轴上找到唯一的一个点与之对应；反过来，数轴上的每一个点也都可以唯一地表示成一个实数（本书所讲的数，若无说明，均为实数）。实数有大有小，在数轴上表现为越靠右（数轴正方向）的点表示的数越大。

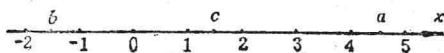


图1—1

图1—1中， a 、 b 、 c 既表示点，又代表该点所表示的实数，这种方便的记法，今后常用。

很明显， a 最大， c 次之， b 最小。这可记为 $a > c > b$ 。诸如 $a > c > b$ ， $a \geq b$ ， $x^2 + 2 \leq x$ 等这种表示不等（大、小）关系的式子，叫做不等式。

对于任意两个实数 a ， b

若 a 与 b 的差是正数，称 a 大于 b ；

若 a 与 b 的差是零，称 a 等于 b ；

若 a 与 b 的差是负数，称 a 小于 b 。

这些话反过来说也是对的。如 a 大于 b 则 a 与 b 的差是正数，等等。

用数学符号来表示，就是

$$a - b > 0 \iff a > b;$$

$$a - b = 0 \iff a = b;$$

$a - b < 0 \iff a < b$. (符号“ $\iff$ ”读作“等价于”，“等价”表示左端可以推出右端，右端可以推出左端.)

任意两个实数，对于上面三种情况，有且仅有一种关系式成立。要比较两个数的大小，只要考察它们的差就可以了。

“或”和“且”是数学里，特别是不等式里常用的两个字，要搞清它们的含义。

“ A 或 B ”，是指 A 或者 B ，二者有一即可；
“ A 且 B ”，是指 A 而且 B ，二者均有。如 $a \geq b$ 读作“ a 大于或等于 b ”，是指 $a > b$ 或 $a = b$ 之一成立。 $a > c > b$ 读作“ a 大于 c ， c 大于 b ”，或“ c 小于 a 且大于 b ”，是指 $c < a$ 而且 $c > b$ 两个式子同时成立。

需要特别注意，不等式 $2 \leq 3$ 是成立的。如上述， $2 \leq 3$ 表示 $2 < 3$ 或 $2 = 3$ ，前者成立，故“ $2 \leq 3$ ”成立。

“不小于”，“不大于”两个词语也用得较多。“不小于”即大于或等于的意思。如 $a \geq 3$ ，即 a 不小于3。“不大于”即小于或等于的意思。如 $a \leq 5$ ，即 a 不大于5。

例2 用不等式表示下列数量关系

1. a 的3倍不大于6;
2. a 是不小于 -2 的数;
3. b 是大于2且不大于3的数;
4. x 是非负数; y 是非正数;
5. k 是不大于5且不小于 -2 的数;
6. a 是不小于 -5 的非正数.

解: 1. $3a \leq 6$; 2. $a \geq -2$; 3. $2 < b \leq 3$;
4. $x \geq 0$; $y \leq 0$; 5. $-2 \leq k \leq 5$; 6. $-5 \leq a \leq 0$

§ 2 不等式的性质

数 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 且 $a \neq b$, 是 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 还是 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 呢? 有人说当 $a = 3$, $b = 4$ 时, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; $a = -2$, $b = -3$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

……. 问题说清楚了, 解答完整了吗? 远没有. 要知道, 实数有无穷多个, 这样举例, 不过沧海一粟耳. 要解决这样的问题, 就要知道不等式的性质.

在解不等式或证明不等式时, 经常要对不等式变形, 变形后的不等式要与原不等式等价, 或能由原不等式推出, 以下就是不等式变形和推断中常用到的性质.

$$1. a > b \iff b < a \quad (\text{对称性})$$

$$2. a > b, b > c \implies a > c \quad (\text{传递性})$$

$$3. a > b \implies a + c > b + c \quad (\text{加法保序性})$$

$$\text{推论 } (1) a > b, c > d \implies a + c > b + d$$

$$(2) a > b, c < d \implies a - c > b - d$$

$$4. a > b, c > 0 \implies ac > bc \quad (\text{乘正数保序性})$$

$$5. a > b, c < 0 \implies ac < bc$$

$$\text{推论 } (1) a > b > 0, c > d > 0 \implies ac > bd$$

$$(2) a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$(3) a > b > 0, c > d > 0 \implies \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$$

$$6. a > b \geq 0, n \text{ 是自然数} \implies a^n > b^n$$

$$7. a > b \geq 0, n \text{ 是自然数} \implies \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

以上性质是不等式的重要基本性质，对它们的理解并不很困难，但要注意条件。

对以上性质，只能根据不等式的意义，实数四则运算法则及前面已证明过的性质来加以证明。以下仅举二例说明。

$$\text{求证 } a > b, b > c \implies a > c. \quad (\text{传递性})$$

$$\text{证明: } \because a > b \quad (\text{已知})$$

$$\therefore a - b > 0 \quad (\text{不等式的意义})$$

$$\text{同理 } b - c > 0$$

$$\therefore (a - b) + (b - c) > 0 \quad (\text{正数之和为正数})$$

$$\text{即 } a - c > 0$$

$$\therefore a > c. \quad (\text{不等式的意义})$$

求证 $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$. (性质5)

证明: $\because a > b$ (已知)

$\therefore a - b > 0$ (不等式的意义)

又 $\because c < 0$ (已知)

$\therefore (a - b)c < 0$ (实数乘法符号法则)

即 $ac - bc < 0$

$\therefore ac < bc$ (不等式的意义).

要充分认识以上性质的重要性,它是解不等式和证明不等式的依据,也是本书的理论基础.譬如

观察 $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$, 得到这样的启示: 要证明 $a > b$, 只需要证明 $a - b > 0$ 就行了. 这就是不等式证明中最基本、最重要的“比差法”的理论根据.

又如性质5的推论(2):

$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 反之, 当 $a > 0, b > 0$ 时,

用 a 乘右端可得 $1 < \frac{a}{b}$, 于是, 再用 b 乘, 得 $a > b >$

0 , 即 $a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1 (b > 0)$. 这是不等式证明中又一最基本的“比商法”的理论依据, 要证明

$a > b$, 在 $b > 0$ 时, 只需证明 $\frac{a}{b} > 1$.

下面看看上述性质的直接应用.

例1 单项选择题 (即几个选择支中有且只有一个选择支正确)

(1) 如果 $a < b < 0$, 那么成立的不等式是 ()

(A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $ab < 1$

$$(C) \frac{a}{b} < 1 \quad (D) \frac{a}{b} > 1$$

(2) 已知 $abcd > 0$, $a < c$, $bcd < 0$, 则正确的式子是 ()

$$(A) a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$$

$$(B) a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$$

$$(C) a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$$

$$(D) a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$$

$$(E) a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$$

(3) 若 $a > b$, 则成立的不等式是 ()

$$(A) a^3 > b^2 \quad (B) 2^a > 2^b$$

$$(C) \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad (D) \frac{a}{b} > 1.$$

解: (1) 由 $a < b < 0$, 用 b 除之, 不等号反向, 得 $\frac{a}{b} > 1$, 填 D . 也可令 $a = -2$, $b = -1$, $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$, 否定 A ; $(-2)(-1) > 1$, 否定 B ; $\frac{-2}{-1} > 1$, 否定 C , 故 D 正确. 此法称“特殊值法”, 主要用于排除不可取的.

(2) 由 $abcd > 0$ 知负数有偶数个, 故去掉 A 、 B 、 E . 又 $bcd < 0$, 知 b 、 c 、 d 中负数为奇数个, 去 C , 故选 D . 由解的过程可见条件 $a < c$ 是多余的.

(3) 用特殊值法排除不成立的式子. 令 $a = 1$, $b = 2$, 则 A 、 C 、 D 都不成立, 故选 B .

例2 单项选择题

(1) 已知 $a < 0$, $-1 < b < 0$, 则 a , ab , ab^2 之

间的大小关系是()

(A) $a > ab > ab^2$ (B) $ab^2 > ab > a$

(C) $ab > a > ab^2$ (D) $ab > ab^2 > a$

(2) 已知 $6 < a < 10$, $\frac{a}{2} \leq b \leq 2a$, $c = a + b$,

则正确的式子为()

(A) $9 \leq c \leq 30$ (B) $15 \leq c \leq 30$

(C) $9 < c \leq 18$ (D) $9 \leq c < 30$

(E) $9 < c < 30$

(3) 设 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$,

则成立的不等式为()

(A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$

(C) $b < a < c$.

解: (1) $\because a < 0$, $b < 0$, $\therefore ab > 0$, $ab^2 < 0$,

只需比较 a , ab^2 .

法1. $-1 < b < 0 \implies 1 > -b > 0$ (为了能平方)

平方后得 $1 > b^2 > 0$, 再用 a (< 0) 乘得

$a < ab^2$, 故选D.

法2. 令 $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$,

则 $ab^2 = -\frac{1}{4} > -1 = a$.

(2) 由 $6 < a < 10$, $\frac{a}{2} \leq b \leq 2a$, 则 $3 < b < 20$

(注意无等号). 故 $6 + 3 < c = a + b < 10 + 20$, 即

$9 < c < 30$, 故选E.

(3) 从题设知, a 、 b 、 c 均为正数. 3, 2, 6的

最小公倍数为6，将各数6次方得

$$a^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad 6^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad c^6 = \frac{1}{6}.$$

$$\therefore c^6 > a^6 > b^6 > 0$$

$$\therefore \sqrt[6]{c^6} > \sqrt[6]{a^6} > \sqrt[6]{b^6} \quad (\text{性质7})$$

即 $c > a > b$ ，选C.

一般说来，比较两实数大小并非都很容易，对于初中学生，可掌握“比差法”、“比商法”、“乘(开)方法”。上面例2(3)就是乘方法的例子。

再看下面几个题。

例3 (1) 单项选择题

数 3^{555} ， 4^{444} ， 5^{333} 的大小关系是 ()

$$(A) \quad 3^{555} < 4^{444} < 5^{333}$$

$$(B) \quad 4^{444} < 3^{555} < 5^{333}$$

$$(C) \quad 5^{333} < 4^{444} < 3^{555}$$

$$(D) \quad 5^{333} < 3^{555} < 4^{444}.$$

(2) 已知二数 a ， b 都大于2，试比较这两个数的和与积的大小。

(3) 比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小。

(1) 分析 三个数都大于0，且指数有公因数111，可考虑先开111次方后再比较大小。

$$\text{解: } (3^{555})^{\frac{1}{111}} = 3^5 = 243$$

$$(4^{444})^{\frac{1}{111}} = 4^4 = 256$$

$$(5^{333})^{\frac{1}{111}} = 5^3 = 125$$

$$\therefore (4^{444})^{\frac{1}{111}} > (3^{555})^{\frac{1}{111}} > (5^{333})^{\frac{1}{111}} > 0$$

$$\therefore 4^{44} > 3^{55} > 5^{33} \text{ (性质6)}.$$

(2) 分析 用“比差法”，再确定差的正负。

$$\begin{aligned} \text{解: } ab - (a+b) &= ab - a - b + 1 - 1 \\ &= a(b-1) - (b-1) - 1 \\ &= (a-1)(b-1) - 1. \end{aligned}$$

$$\because a > 2, \therefore a-1 > 1. \text{ 同理 } b-1 > 1.$$

$$\therefore (a-1)(b-1) > 1, \text{ 故 } ab - (a+b) > 0.$$

即 $a > 2, b > 2$ 时, a 与 b 的积大于 a 与 b 的和.

(3) 分析 这二数的指数的最大公约数为2, 开平方后, $16^9, 18^8$ 仍难于比较大小. 若用比差法, 不易变形. 可考虑用比商法.

解: $16^{18} > 0, 18^{16} > 0$, 两数相除, 得

$$\begin{aligned} \frac{16^{18}}{18^{16}} &= \left(\frac{16}{18}\right)^{16} \cdot 16^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^{16} (\sqrt{2})^{16} \\ &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{9}\right)^{16} > 1 \end{aligned}$$

$$\therefore 16^{18} > 18^{16}.$$

当 n 为自然数时, “ $n!$ ” 读作 “ n 的阶乘”,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. 如 $3! = 1 \times 2 \times 3$,

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ 等.

例4 比较 $(8!)^{\frac{1}{8}}$ 与 $(9!)^{\frac{1}{9}}$ 的大小.

解: $(8!)^{\frac{1}{8}} > 0, (9!)^{\frac{1}{9}} > 0$, 用“比商法”.

$$\frac{(8!)^{\frac{1}{8}}}{(9!)^{\frac{1}{9}}} = \left[\frac{(8!)^9}{(9!)^8} \right]^{\frac{1}{72}}$$