"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教材

卫生部"十二五"规划教材配套教材

全国高等医药教材建设研究会"十二五"规划教材配套教材

全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

学习指导

第3版

主　编　张选群

副主编　马建忠　吕　丹　刘春扬

人民卫生出版社

PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教材

卫生部"十二五"规划教材配套教材
全国高等医药教材建设研究会"十二五"规划教材配套教材
全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

学习指导

第3版

主　编　张选群

副主编　马建忠　吕　丹　刘春扬

编　者（以姓氏笔画为序）

马建忠（中国医科大学）　李　海（四川大学）
王　颖（吉林大学）　张　力（武汉大学）
吕　丹（温州医科大学）　张选群（武汉大学）
何穗智（中山大学）　张喜红（长治医学院）
刘春扬（福建医科大学）　张福良（大连医科大学）

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学学习指导 / 张选群主编. —3 版. —北京：人民卫生出版社，2013

ISBN 978-7-117-17220-2

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①医用数学－医学院校－教学参考资料 Ⅳ. ①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 102393 号

医用高等数学学习指导

第 3 版

主　　编：张选群
出版发行：人民卫生出版社（中继线 010-59780011）
地　　址：北京市朝阳区潘家园南里 19 号
邮　　编：100021
E - mail：pmph @ pmph.com
购书热线：010-59787592　010-59787584　010-65264830
印　　刷：潮河印业有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：787 × 1092　1/16　　印张：11
字　　数：289 千字
版　　次：2004 年 6 月第 1 版　　2013 年 3 月第 3 版
　　　　　2013 年 3 月第 3 版第 1 次印刷（总第 13 次印刷）
标准书号：ISBN 978-7-117-17220-2/R · 17221
定　　价：19.00 元
打击盗版举报电话：010-59787491　E-mail：WQ @ pmph.com
（凡属印装质量问题请与本社市场营销中心联系退换）

前 言

人民卫生出版社出版的《医用高等数学》一直是全国医学基础教育深受教师和学生欢迎的高等数学教材。人民卫生出版社最新出版的《医用高等数学》(第6版)切实反映了我国医学教育改革与发展的成果,充分体现了“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材的先进性、科学性与适用性等方面的优势。本版《医用高等数学学习指导》是专门为新版《医用高等数学》配套编写的教学指导用书。

针对医学生的知识结构,本版《医用高等数学学习指导》首先对每一章的学习目标和全章要点给予了注释,然后对学生容易产生误解的疑难问题一一作出了分析与解答,是引导医学生学好高等数学,提高科学分析能力的有效工具。

本套教材还配有能够扩大学生视野,增加学习高等数学兴趣,提高学生理解能力的《医用高等数学》网络增值服务。

我真诚地欢迎使用本套教材的师生们多提宝贵建议。对教材最权威的评价在于广大的教师与学生!

张选群

2013. 2. 28

目录

例 3　求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$

解　$\because \lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right]=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right]=2-1=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$ 不存在

例 4　求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解　$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\tan^2x)^{\frac{1}{\tan^2x}}\right]^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=e^2$

例 5　已知 $f(x)=\begin{cases}\ln(\cos x)x^{-2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a

解　$f(0)=a$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\therefore f(0)=-\dfrac{1}{2}$ 即 $a=-\dfrac{1}{2}$

例 6　已知 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\leqslant0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型

解　显然 $x=1$ 为一个间断点（因函数在 $x=1$ 外无定义）

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

$\therefore x=1$ 为第二类无穷间断点

又，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{e}$

故 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的间断点，且为第一类跳跃型间断点

例 7　比较当 $x\to0$ 时，无穷小量 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 与 x 的阶

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{2x}\cdot\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}\right]$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{1-x} = 1$$

$\Rightarrow x\to0$ 时, $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 与 x 是等价无穷小

例 8　证明方程 $\sin x - x\cos x = 0$ 在 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 之间有根

证　令 $f(x) = \sin x - x\cos x$, 显然初等函数 $f(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上连续,且

$$f(\pi) = \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi > 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} = -1 < 0$$

$$\Rightarrow f(\pi)\cdot f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$$

由闭区间上连续函数的介值定理 $\Rightarrow$ 存在 $\xi\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即 $\sin\xi - \xi\cos\xi = 0$, 也即 $\sin x - x\cos x = 0$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 之间有根.

例 9　若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续 $(a>0)$, 且 $f(0) = f(a)$, 则方程 $f(x) = f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内至少有一个实根

证　令 $g(x) = f(x) - f\left(x+\frac{a}{2}\right)$, $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上连续

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) - f(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - f(0) = -\left[f(0) - f\left(\frac{a}{2}\right)\right] \Rightarrow g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right) \leqslant 0$$

若 $f(0) = f\left(\frac{a}{2}\right)$, 则 $x = 0$ 或 $x = \frac{a}{2}$ 满足要求;

若 $f(0) \neq f\left(\frac{a}{2}\right)$, 则 $g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$, 由零点定理存在 $x_0\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$, x_0 是 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内 $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 的根.

四、思考与练习解答

(一) 函数

1. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为相同的函数:

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$;

解　$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 因为对应规律不同, 所以 $f(x) \neq g(x)$.

(2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$；

解　$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的定义域为 $x \neq \pm 1$，而 $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ 的定义域为 $x \neq -1$，

所以 $f(x) \neq g(x)$.

(3) $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$ 与 $g(x) = 1$；

解　$f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$，两个函数的定义域和对应规律均相同，所以 $f(x) = g(x)$.

(4) $f(x) = \arcsin x$ 与 $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$.

解　函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域相同，都是 $x \in [-1,1]$，且对应规律也相同，

所以 $f(x) = g(x)$

2. 设 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，考察下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)g(x)$

解　$\because f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$　$\therefore f(x)g(x)$ 是奇函数.

(2) $f[g(x)]$

解　$\because f[g(-x)] = f[g(x)]$　$\therefore f[g(x)]$ 是偶函数.

(3) $f[f(x)]$

解　$\because f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$　$\therefore f[f(x)]$ 是奇函数.

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x) = x^3 + |\sin x|$；

解　$f(-x) = (-x)^3 + |\sin(-x)| = -x^3 + |-\sin x| = -x^3 + |\sin x|$，非奇非偶函数.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}(2^x + 2^{-x})\cos x$；

解　$f(-x) = \dfrac{1}{2}(2^{-x} + 2^x)\cos(-x) = \dfrac{1}{2}(2^x + 2^{-x})\cos x = f(x)$，偶函数.

(3) $f(x) = \arctan(\sin x)$

解　$f(-x) = \arctan(\sin(-x)) = \arctan(-\sin x) = -\arctan(\sin x) = -f(x)$，奇函数.

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期：

(1) $y = \arctan(\tan x)$；

解　$\because f(x+\pi) = \arctan(\tan(x+\pi)) = \arctan(\tan x) = f(x)$

$\therefore y = \arctan(\tan x)$ 是周期函数，$T = \pi$.

(2) $y = \sin \pi x + \cos \pi x$；

解　$\because f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x = \sqrt{2}(\sin \pi x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \cos \pi x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\sin \pi x + \dfrac{\pi}{4})$

而　$f(x+2) = \sqrt{2}\sin[\pi(x+2) + \dfrac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\sin[\pi x + 2\pi + \dfrac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\sin(\pi x + \dfrac{\pi}{4}) = f(x)$

$\therefore y = \sin \pi x + \cos \pi x$ 是周期函数，$T = 2$.

(3) $y = x\sin \dfrac{1}{x}$；

解　令 $x\sin \dfrac{1}{x} = 0$；解此方程得出曲线 $y = x\sin \dfrac{1}{x}$ 与 x 轴的交点的横坐标是 $x = \dfrac{1}{k\pi}(k \in Z)$.

由于 k 越小而 x 越大,亦即在正半轴上随着 x 远离坐标原点,k 越来越小.

又因为曲线 $y = x\sin\frac{1}{x}$ 与 x 轴的相邻两交点的间隔

$$d = \frac{1}{(k-1)\pi} - \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{k(k-1)\pi}$$

当 $k \to 0$ 时,$d \to \infty$,即 d 随着自变量远离坐标原点的程度而越来越大,故有 $y = x\sin\frac{1}{x}$ 不是周期函数.

(4) $y = 1 + \cos 2x$.

解　$\because f(x+\pi) = 1 + \cos 2(x+\pi) = 1 + \cos(2x + 2\pi) = 1 + \cos 2x = f(x)$

$\therefore y = 1 + \cos 2x$ 是周期函数,$T = \pi$.

(二) 极限

1. 在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 中,x 能否取 x_0?$f(x)$ 能否取值 A?

解　在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 中,$x \to x_0$ 是指 x 与 x_0 无限接近,并不要求 x 必须取值 x_0 ;x 既可以取 x_0,亦可以不取 x_0.

在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 中,当 x 无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的函数值无限地趋近一个常数 A,对 $f(x)$ 是否取值 A 没有明确要求;$f(x)$ 既可以取值 A,亦可以不取值 A.

2. 无穷小量是否是0?0是否是无穷小量?

解　如果 $\lim f(x) = 0$,称函数 $f(x)$ 为某一变化过程中的无穷小量.按照定义,无穷小量是以0为极限的变量,因此它不是0;

而 $\lim 0 = 0(x \to \infty$ 或 $x \to x_0)$,即常数0的极限仍是0,它是唯一的可作为无穷小量的一个常数函数.

3. 当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos x$ 是 x 的几阶无穷小?

解　$\because \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x \to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right] = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时,$1 - \cos$ 是 x 二阶无穷小.

4. 下面的计算过程对否:$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} x}{\lim\limits_{x \to 1}(x-1)} = \infty$

解　错.分母的极限 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$,故不能用商的极限运算法则.应为

$\because \lim\limits_{x \to 0}(x-1) = 0$,则 $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x-1}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x \to 1} x} = \frac{0}{1} = 0$,由无穷小与无穷大的关系,

$\therefore \lim\limits_{x \to 1}\frac{x}{x-1} = \infty$

5. 无穷小可通过它们比值的极限来比较其趋于零的快慢程度,无穷大是否也可类似地比较它们趋于无穷的快慢程度呢?

解　可以.

6. 当 $x \to \infty$ 时,$f(x) = x^3\cos x$ 是无穷小量吗?它是无穷大量吗?它有界吗?

解　我们以 $x \to +\infty$ 来分析.

在 x 中选项取两个子数列：$x_{n_k}=2k\pi, x'_{n_k}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, (k=0,1,2,\cdots)$

讨论了函数 $f(x)=x^3\cos x$ 在这两个子数列上的取值情况，有

$f(x_{n_k})=(2k\pi)^3\cdot 1=(2k\pi)^3\to+\infty(k\to+\infty)$，

$f(x'_{n_k})=(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^3\cdot 0=0\to 0(k\to+\infty)$，

由此我们看到当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 上的取值越来越大，在子数列 $\{x'_{n_k}\}$ 上的取值始终为0，因此，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=x^3\cos x$ 既不是无穷小量；也不是无穷大量，并且是无界的.

所以当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x^3\cos x$ 不是无穷小量；也不是无穷大量，且是无界的.

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}{3}=\underline{\quad 1 \quad}$.

8. 试证：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_n},m=n\\0,m>n\\\infty,m<n\end{cases}$

证　当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}}=\frac{a_n}{b_m}$；

当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{a_n}{x^{m-n}}+\frac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}}+\cdots+\frac{a_0}{x_m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}}=\frac{0}{b_m}=0$

当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{b_m}{x^{n-m}}+\frac{b_{m-1}}{x^{n-m+1}}+\cdots+\frac{b_0}{x^n}}{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}}=\frac{0}{a_n}=0$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\infty$

（三）函数的连续性

1. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，能断言 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在吗？

解　不能.

例如：$f(x)=\begin{cases}x^2,x\neq 0\\2,x=0\end{cases}$，显然 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

2. 分段函数是否一定有间断点？

解　不一定.

例如：$f(x)=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\-x,x<0\end{cases}$ 是一个分段函数，但 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内均连续.

3. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断？若 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 都间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 间断？

解　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，可以断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断；因

为若$f(x)+g(x)$在点x_0处连续,则

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]=(f(x_0)+g(x_0))-f(x_0)=g(x_0)$成立,

说明$g(x)$在点x_0连续,与题设$g(x)$在点x_0间断矛盾,故$f(x)+g(x)$在点x_0必间断;

若$f(x)$、$g(x)$在点x_0都间断,则不能断定$f(x)+g(x)$在点x_0间断;

例如函数$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$、$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$在$x=0$处无意义,即在该点间断,但$f(x)+g(x)=(1+\dfrac{1}{x})+(1-\dfrac{1}{x})=2$在$x=0$点连续.

4. 开区间连续的函数是否必有最大值、最小值?又是否必定没有最大值、最小值?

解　开区间连续的函数未必有最大值、最小值;例如函数$y=x$在开区间$(-1,1)$内连续,但它在该区间内没有最大值、最小值.

开区间连续的函数未必没有最大值、最小值;例如函数$y=\sin x$在开区间$(0,2\pi)$内连续,它在该区间内有最大值$f(\dfrac{\pi}{2})=1$;也有最小值$f(\dfrac{3\pi}{2})=-1$.

5. 若$f(x)$在$[a,b]$上有定义,在(a,b)内连续,且$f(a)f(b)<0$,能否保证方程$f(x)=0$在(a,b)内必有实根?

解　不能.

例如函数$f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 3, & 1<x<2\\ -1, & x=2\end{cases}$,显然$f(x)$在$[1,2]$上有定义,在$(1,2)$内连续,且$f(1)f(2)=-1<0$,但方程$f(x)=0$在$(1,2)$内没有实根.

6. 证明方程$x=\sin x+2$至少有一个不超过3的实根.

证　设$\phi(x)=x-\sin x-2$,显然$\phi(x)$是一个初等函数,在$(-\infty,+\infty)$内连续,在$[-3,+3]$上当然连续;

又$\phi(3)=3-\sin 3-2=1-\sin 3>0$,$\phi(-3)=-3-\sin(-3)-2=-5+\sin 3<0$;

由闭区间上连续函数的介值定理,在$(-3,3)$内至少存在一点δ,使得$\phi(\delta)=0$,即有$\delta-\sin\delta-2=0$,也即方程$x=\sin x+2$至少有一个不超过3的实根δ.

五、习题一详解

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{(x+2)(x-1)}$

解　$(x+2)(x-1)\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 1$或$x\leqslant -2\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

(2) $y=\arccos(x-3)$

解　$-1\leqslant x-3\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4\Rightarrow x\in[2,4]$

(3) $y=\lg\dfrac{x-1}{x+2}$

解　$\dfrac{x-1}{x+2}>0\Rightarrow(x-1)(x+2)>0\Rightarrow x>1$或$x<-2\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

(4) $y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$

解 $\begin{cases}\ln(2+x)\geqslant 0\\ 2+x>0\\ x(x-4)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+x\geqslant 1\\ x>-2\\ x\neq 0 \text{且} x\neq 4\end{cases}\Rightarrow x\geqslant -1 \text{且} x\neq 0, x\neq 4$

$\Rightarrow x\in[-1,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$

解 $\begin{cases}2-x^2>0\\ -1\leqslant\dfrac{1}{2}x-1\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}\Rightarrow x\in[0,\sqrt{2})$

(6) $y=\dfrac{x}{\sin x}$

解 $\sin x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi\Rightarrow x\in\{x: x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})\}$　　$\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ \dfrac{1}{2}, x=0,\\ -x, x>0\end{cases}$ 求 $f(0), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)$

解 $f(0)=\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}, f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=1+\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)^2=1+(\lg 1-\lg 2)^2=1+(\lg 2)^2$

3. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

解 $\begin{cases}0\leqslant x+\dfrac{1}{3}\leqslant 1\\ 0\leqslant x-\dfrac{1}{3}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$

(2) $f(\sin x)$

解 $0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\Rightarrow x\in[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbb{Z})$

(3) $f(\ln x+1)$

解 $\because 0\leqslant\ln x+1\leqslant 1$　$\ln e^{-1}=-1\leqslant\ln x\leqslant 0=\ln 1$　$\therefore\dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1$　即 $x\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$

(4) $f(x^2)$

解 $\because 0\leqslant x^2\leqslant 1$　$(x+1)(x-1)\leqslant 0$　$\therefore -1\leqslant x\leqslant 1$ 即 $x\in[-1,1]$

4. 写出 y 关于 x 的复合函数:

(1) $y=\lg u, u=\tan(x+1)$

解 $y=\lg\tan(x+1)$　　$x\in\left(k\pi-1,k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1\right)(k\in\mathbb{Z})$

(2) $y=u^3, u=\sqrt{x^2+1}$

解 $y=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $y=u+\sin u, u=1-v, v=x^3$

解 $y=1-x^3+\sin(1-x^3)$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

(4) $y=e^u, u=v^2, v=\sin\omega, \omega=\dfrac{1}{x}$

解　$y = e^{\sin^2\frac{1}{x}}$　　$x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

5. 指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成:

(1) $y = e^{\arctan(2x+1)}$

解　$y = e^u, u = \arctan v, v = 2x+1$;

(2) $y = \sqrt{\sin^3(x+2)}$

解　$y = u^{\frac{3}{2}}, u = \sin v, v = x+2$;

(3) $y = \tan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

解　$y = \tan u, u = v^{\frac{1}{2}}, v = \dfrac{1+x}{1-x}$;

(4) $y = \cos \ln^3\sqrt{x^2+1}$

解　$y = \cos u, u = v^3, v = \dfrac{1}{2}\ln \omega, \omega = x^2+1$.

6. 已知$f(e^x+1) = e^{2x}+e^x+1$, 求$f(x)$的表达式.

解1　令$e^x+1=t$则$e^x=t-1$; 于是由$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$得

$$f(t) = (t-1)^2+(t-1)+1 = t^2-t+1$$

即有　$f(x) = x^2-x+1$

解2　$f(e^x+1) = e^{2x}+e^x+1 = (e^{2x}+2e^x+1)-e^x = (e^x+1)^2-(e^x+1)+1$

即有　$f(x) = x^2-x+1$

7. 已知$f(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}) = \tan^2 x+\dfrac{1}{\tan^2 x}+3$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 求$f(x)$的表达式.

解　$f(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}) = \tan^2 x+\dfrac{1}{\tan^2 x}+3 = \tan^2 x+2\tan x\cdot\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan^2 x}+1$

$$= (\tan x+\frac{1}{\tan x})^2+1$$

即有　$f(x) = x^2+1$

8. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}$

解　$|\sin n| \leqslant 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}=0$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

9. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to-1}(x^2+x+1)=(-1)^2+(-1)+1=1$

或解　$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(x-1)}=\frac{(-1)^3-1}{-1-1}=\frac{-2}{-2}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1+1}{2\times1+1}=\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}=\frac{1-0}{3-0-0}=\frac{1}{3}$

(4) $\because\ \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-1)}=\frac{1^2-5\times1+4}{2\times1-1}=\frac{0}{1}=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-1}{x^2-5x+4}=\infty$$

(5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+13)-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13}+2\sqrt{3+1})}=\frac{-3}{6(4+4)}$$

$$=-\frac{1}{16}$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x})=\sqrt{1+0}-0=1$

(7) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2})=\lim\limits_{x\to1}\frac{(1+x)-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\times(\frac{x}{2})^2\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}\times1^2\times1=\frac{1}{2}$

或解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}\cdot\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{\frac{\pi}{2}}=1\times\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

或解　设 $1-x=t$，当 $x\to 1$ 时，有 $t\to 0$；于是

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{t\to 0}t\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-t)\right]=\lim_{t\to 0}t\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)=\frac{2}{\pi}\times 1\times 1=\frac{2}{\pi}$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\times 1\times 1^2\times 1=\frac{1}{2}$$

(11) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}[1-(1-x)]^{\frac{-1}{1-x}\cdot(-2)}=\left[\lim\limits_{x\to 1}[1-(1-x)]^{\frac{-1}{1-x}}\right]^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}\cdot(-3)}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}\right]^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x-2}{1+x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^{2\cdot\frac{1+x}{2}-2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^{-\frac{1+x}{2}}\right]^{-2}\cdot\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^{-2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^{-\frac{1+x}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^{-2}=e^{-2}\times 1=\frac{1}{e^2}$$

或解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x-1}\right)^{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot(-2)}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{3x-\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x}\ln(1+x)}{3-\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{3-\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1+\ln e}{3-\ln e}=1$

(15) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)}{\sqrt[3]{1+2x}+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)\left[\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2-\sqrt[3]{1+2x}+1\right]}{\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^3+1^3}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\ln(2+x)[(\sqrt[3]{1+2x})^2 - \sqrt[3]{1+2x} + 1]}{2(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to -1} \ln[1+(1+x)]^{\frac{1}{1+x}}[(\sqrt[3]{1+2x})^2 - \sqrt[3]{1+2x} + 1]$$

$$= \frac{1}{2} \ln \lim_{x \to -1} [1+(1+x)]^{\frac{1}{1+x}} \cdot \lim_{x \to -1} [(\sqrt[3]{1+2x})^2 - \sqrt[3]{1+2x} + 1]$$

$$= \frac{1}{2} \ln e \cdot (1+1+1) = \frac{3}{2}$$

(16) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \left[1 + \frac{2}{2x+1}\right]^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left\{\left[1 + \frac{2}{2x+1}\right]^{\frac{2x+1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{2}{2x+1}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{2}{2x+1}\right]^{\frac{2x+1}{2}} \cdot \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{2}{2x+1}\right]^{\frac{1}{2}} = e \cdot 1 = e$$

10. 已知 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + bx + 6}{1-x} = 5$，试确定 b 的值.

解　$\lim\limits_{x \to 1}(1-x) = 0$，由已知 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+bx+6}{1-x} = 5$，则 x^2+bx+6 中必含有因子 $(1-x)$，于是有 $x^2+bx+6 = (1-x)(6-x) = x^2-7x+6$

$\therefore b = -7$

11. 已知极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$ 存在，试确定 a 的值，并求出极限值.

解　$\lim\limits_{x \to +\infty}(2x - \sqrt{ax^2-x+1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - (ax^2 - x + 1)}{2x + \sqrt{ax^2-x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(4-a)x^2 + x - 1}{2x + \sqrt{ax^2-x+1}}$

已知该极限存在，必有 $4 - a = 0$，即 $a = 4$

且　$\lim\limits_{x \to +\infty}(2x - \sqrt{ax^2-x+1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x+\sqrt{4x^2-x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{4}$

12. 当 $x \to 0$，将下列函数与 x 进行比较，哪些是高阶无穷小？哪些是低阶无穷小？哪些是同阶无穷小？哪些是等价无穷小？

(1) $\tan^3 x$

解　$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^3 x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x \cos^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \cdot \frac{x^2}{\cos^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \cdot \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{\cos^3 x}\right)$

$= 1^3 \times 0 = 0$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$\tan^3 x$ 是 x 的高阶无穷小.

(2) $\sqrt{1+x^2} - 1$

解　$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{1+1} = 0$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2} - 1$ 是 x 的高阶无穷小.

(3) $\csc x - \cot x$

解　$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}$