

名校 名

根据新大纲及人教版最新教材编写
全国十所名校同步导学

大课堂

高一数学

本书主编 张金兰



名校强强联合

特级教师随堂解题

解法立体指导

典题秘题同步传真



00614373

5

全国十所名校同步导学

G634.6

名校大课堂

093

高一数学

[配套最新修订版教材]

编委	北京师范大学附属实验中学	马成瑞
	数学特级教师	李新黔
	中国人民大学附中化学特级教师	韩新生
	首都师范大学附中数学特级教师	陈桂芬
	天津耀华中学语文高级教师	刘志忠
	河北省石家庄一中语文特级教师	邱飞洲
	河北省石家庄一中化学特级教师	夏炎
	江苏省苏州中学数学特级教师	杨正杰
	江苏省启东中学政治高级教师	谷寿平
	安徽省安庆一中物理特级教师	潘祖英
江西师范大学附中英语特级教师	韩相河	
山东省实验中学数学高级教师		



CS1008044

本书主编 张金兰
 编著 马冬青 马辉 张帆
 蔡丽洁 薛凤琳 张金兰

重庆师大图书馆



机械工业出版社

39

本书是依据教育部颁布的课程标准和人教版最新教材编写的同步辅导书。它紧跟教学与考试形势，采集名校名师多年积累起来的学习方法和解题思路，紧跟高考改革形势，总结了历年高考题型。

全书依据课本章节顺序编写。每节之下均设有重点难点突破、名师随堂解题、名校最新秘题（附答案与提示）三个板块。每章后均有本章知识结构与学法指导、本章综合训练（附答案与提示及配分）。书末还附有两个学期的期末测试题（附答案与提示及配分），供学生复习和自测用。本书可供高中师生配合课本同步学习使用。

图书在版编目（CIP）数据

名校大课堂·高一数学 / 张金兰主编. —北京：机械工业出版社，2003.6

（全国十所名校同步导学）

ISBN 7-111-02929-1

I. 名… II. 张… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 049352 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划：邝 鸥 潘海鸥

责任编辑：于奇慧

版式设计：郑文斌

封面设计：鞠 杨

责任印制：闫 焱

中国农业出版社印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 6 月第 2 版第 1 次印刷

880mm×1230mm 1/32·10.75 印张·384 千字

定价：14.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326294

封面无防伪标均为盗版

携手走进名校大课堂

(代前言)

名校名师，打造“名校大课堂”

近年来，随着素质教育呼声的日渐高涨及教育改革的不断深化，一批实力雄厚、成就斐然的重点中学渐渐“浮出水面”。它们长期在本地中、高考大战中稳拔头筹；它们培养了一个又一个中考、高考“状元”。一流的教师队伍，一流的教学体系，一流的训练方法，这些也许就是它们屡战屡胜的“秘笈”。从“推广名校经验，普及精英教育”的理念出发，我们组织了北京师范大学附属实验中学、中国人民大学附中、首都师范大学附中、天津耀华中学、河北省石家庄一中、江苏省苏州中学、江苏省启东中学、安徽省安庆一中、江西师范大学附中、山东省实验中学等 10 所全国著名重点中学的资深特、高级教师，编写了这套包括初中、高中各学科，供中学生课前预习、随堂练习、课后复习的“名校大课堂·全国十所名校同步导学”丛书。

三个特点，树立“名校大课堂”“双高双新双紧跟”的品牌

起点高 要求高 本丛书的编写宗旨是：“弘扬名校精神，传播名校经验，奉献名校真题”。在十几位编委的主持下，来自重点中学教学第一线的 100 多位特、高级教师集思广益，精诚合作，制定了本丛书科学、严谨的编写体例和内容要求，进而宵衣旰食，殚精竭虑，如期拿出了高质量的书稿。在这里，简明透彻的重难点介绍，独具特色的例题评析，经典实用的训练题的遴选，无不浸透着众多教师孜孜以求的汗水。名校的高起点、高要求在这里得到充分的体现。

版本新 知识新 本丛书依据教育部颁布的各学科课程标准，以及经全国中小学教材审定委员会 2003 年审查通过的人教版最新初、高中教材编写。新标准，新教材，新思路，新题型，品质自然不凡。

紧跟教学与考试新形势 紧跟教育改革新动向 本丛书在新的教育改革精神指导下，采集名校名师多年积累起来的学习方法和解题思路，科学提炼，科学组合，使之贯穿全丛书每一分册。并且，紧跟中考、高考改革形势，总结历年中考、高考题型，尤其是深入分析近年来全国各地中考试卷和全国各种高考试卷，群策群力，携手攻关，对下一年度中考及高考方向、特点乃至题型，都作了科学预测。其中不乏许多前瞻精辟之见。

三大板块，凸显“名校大课堂”优良品质

本丛书依据课本章节顺序编写。每节(课)之下，设有**重点难点突破**、**名师随堂解题**、**名校最新秘题**三大板块。

重点难点突破 在对本节知识整体把握的基础上，将其中的学习重点、难点提炼出来，深入分析，精心讲解。讲解中强调深入浅出，准确实用。对重点，着重谈需注意和强调之处；对难点，指出其难在何处，提示应如何克服，具有很强的针对性。

名师随堂解题 通过对不同形式、不同风格例题的解析，帮助学生掌握分析、解决各种试题的基本能力。[基础题]、[易错题]、[创新题]、[名校模拟试题与高考题]各有侧重，其中的导析、错误原因分析等言简意赅，一语中的。在例题的安排上，既强调“基础”和“同步”，又兼顾“综合”与“发散”，题型多样，难度深浅结合。为便于学生使用，我们在例题前标出了代表难易程度的1~3级星号，具有很强的实用性。

名校最新秘题 集10所重点中学多年复习、应考的经验，选取其历年经典试卷试题，分类列出，从基础、综合两个层面对学生进行整体培训。试题经众人遴选，专家把关，具有一定的典型性和代表性。

由于横跨语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史、地理、生物数科，我们从各学科实际出发，在体例结构的设置中向该学科作了适当倾斜，以使之更加适合学生需要。

本丛书在编写过程中，得到了各参编学校的大力支持；丛书的统稿工作亦得到了有关专家的协助，在此特致谢忱！

丛书编委会

2003年6月

目 录

第一章 集合与简易逻辑	1
1.1 集合.....	1
1.2 子集、全集、补集.....	6
1.3 交集、并集.....	10
1.4 含绝对值的不等式解法.....	17
1.5 一元二次不等式解法.....	21
1.6 逻辑联结词.....	25
1.7 四种命题.....	28
1.8 充分条件与必要条件.....	32
本章知识结构与学法指导.....	36
本章综合训练.....	37
第二章 函数	41
2.1 函数.....	41
2.2 函数的表示法.....	51
2.3 函数的单调性.....	57
2.4 反函数.....	67
2.5 指数.....	75
2.6 指数函数.....	84
2.7 对数.....	94
2.8 对数函数.....	100
2.9 函数的应用举例.....	110
本章知识结构与学法指导.....	122
本章综合训练.....	123
第三章 数列	128
3.1 数列.....	128
3.2 等差数列.....	135
3.3 等差数列的前 n 项和.....	142
3.4 等比数列.....	150
3.5 等比数列的前 n 项和.....	159
3.6 研究性课题.....	166

注：每节均包含重点难点突破、名师随堂解题、名校最新秘题三个板块。

本章知识与学法指导	173
本章综合训练	173
第四章 三角函数	177
4.1 角的概念的推广	177
4.2 弧度制	182
4.3 任意角的三角函数	188
4.4 同角三角函数的基本关系式	195
4.5 正弦、余弦的诱导公式	201
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切	207
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切	215
4.8 正弦函数、余弦函数的图像和性质	224
4.9 函数 $y=Asin(ax+\varphi)$ 的图像	234
4.10 正切函数的图像和性质	244
4.11 已知三角函数值求角	252
本章知识与学法指导	259
本章综合训练	260
第五章 平面向量	263
5.1 向量	263
5.2 向量的加法与减法	267
5.3 实数与向量的积	272
5.4 平面向量的坐标运算	278
5.5 线段的定比分点	286
5.6 平面向量的数量积及运算律	292
5.7 平面向量数量积的坐标表示	298
5.8 平移	304
5.9 正弦定理、余弦定理	310
5.10 解斜三角形应用举例	318
本章知识与学法指导	324
本章综合训练	325
第一学期期末测试题	329
第二学期期末测试题	334



第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合

重点难点突破

1. 本小节主要讲述了集合的有关概念及表示方法. 重点是集合的基本概念与表示方法. 难点是运用集合的常用表示方法正确表示一些简单的集合.

2. 集合、元素的概念是数学中的原始概念, 应注意把握集合中元素的确定性、互异性、无序性, 运用集合的观点分析问题. 要辩证理解集合与元素这两个概念. 集合的三种表示方法各有优点, 用什么方法来表示集合, 要具体问题具体分析. 要理解空集的意义. 本小节的特点是概念多、符号多, 正确理解概念和准确使用符号是学好本节的关键.

名师随堂解题

基础题

★例1 下列各组对象能否构成一个集合?

- (1) 高一数学课本中所有的难题;
- (2) 直角坐标平面内横坐标与纵坐标互为相反数的点;
- (3) 某中学的大胖子;
- (4) 某学校身高超过 1.80 米的高个子;
- (5) 奥运会中的比赛项目;
- (6) 1, 1, 2, 3.

思路: 依据集合中元素的“确定性”、“互异性”进行判断.

解: 因为“难题”“大胖子”的概念是模糊不确定的, 没有一定的标准, 所以(1)、(3)不能构成集合. 又因为(6)中有两个相同的元素 1, 所以(6)也不能构成集合. 因



此只有(2)、(4)、(5)才能构成集合.

此题主要考查集合中元素的性质

★例2 下面一组集合中各个集合的意义是否相同?为什么?

$$\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}, \{2, 1\}$$

思路: 对于这个集合问题, 只有明确集合中元素的具体意义才能作出正确解答.

注意判断集合中的元素是否相同

解: $\{1, 2\}$ 是由两个数1, 2组成的集合, 根据集合中元素的无序性, 它与 $\{2, 1\}$ 是同一集合; $\{(1, 2)\}$ 是由一个点 $(1, 2)$ 组成的单元素集合, 由于 $(1, 2)$ 和 $(2, 1)$ 表示两个不同的点, 所以 $\{(1, 2)\}$ 和 $\{(2, 1)\}$ 是两个不同的集合.

★★例3 设 a, b 为非零实数, 用列举法表示由数 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$ 构成的集合.

思路: 讨论 a, b 的符号.

解: 若 a, b 同正, 原式值为2; 若 a, b 同负, 原式值为-2; 若 a, b 一正一负, 原式值为0. 所以, 所求集合为 $\{-2, 0, 2\}$.

说明: 本题一要注意绝对值的含义, 二要注意集合的表示方法, 列举法就是将集合中元素不重复、不计顺序、不遗漏地一一列出.

★★例4 用描述法写出直角坐标系中, 坐标轴上的点的集合.

思路: 坐标轴上的点为 $(x, 0)$ 或 $(0, y)$, 故有 $xy=0$

$$\text{解: } \{(x, y) | xy=0\}$$

其中“ $xy=0$ ”的意义是“ $x=0$ 或 $y=0$ ”. 用“ $xy=0$ ”表示较简便

说明: 描述法就是先选定代表元素, 再将代表元素具有的属性在竖线后面描述出来.

请同学们思考: 不在坐标轴上的点的集合如何表示? $\{(x, y) | xy \neq 0\}$.

★★例5 求数集 $\{1, x, x^2\}$ 中 x 的取值集合.

思路: 本题要注意考虑集合中的元素是互异的这个特征.

解: x 的取值集合为 $\{x | x \neq 0 \text{ 且 } x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 1, x \in \mathbf{R}\}$.

易错题

★例 下面各组中各个集合的意义是否相同?为什么?

(1) $\{x | x=0\}, \{x=0\}, \{(x, y) | x=0, y \in \mathbf{R}\}$;

(2) $\{x | x^2 - ax - 1 = 0\}, \{a | \text{方程 } x^2 - ax - 1 = 0 \text{ 有实数根}\}$.

思路: 准确分析集合中元素的含义.

解: (1) $\{x | x=0\}$ 中的元素是一个0, 与集合 $\{0\}$ 相同; $\{x=0\}$ 是由方程 $x=0$



为元素的集合： $\{(x, y) | x=0, y \in \mathbf{R}\}$ 中的元素是直角坐标平面内的一系列点，即直线 $x=0$ (y 轴) 上的点。所以这三个集合的元素根本不同，它们是三个不同的集合。

对比分析！这三个集合中的元素的含义是不同的

(2) 集合 $\{x | x^2 - ax - 1 = 0\}$ 中的元素 x 是一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的解；集合 $\{a | \text{方程 } x^2 - ax - 1 = 0 \text{ 有实根}\}$ 中的元素 a 是使一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 有实数根的字母系数的取值范围，这两个集合中的元素的含义是不同的，所以是两个不同的集合。

说明：准确地理解描述法表示的集合中元素的含义，是解答本题的关键。

创新题

★★例 用列举法表示下列集合：

$$(1) A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{3}{2-x} \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$(2) B = \left\{ y \mid y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N} \right\}$$

$$(3) C = \left\{ (x, y) \mid y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N} \right\}$$

思路：(1) 集合 A 中的元素 x 是整数，它必须满足 $\frac{3}{2-x}$ 也是整数，即 $2-x$ 必须是 3 的约数。

(2) 集合 B 中的元素 y 是自然数，它必须满足的条件是二次函数 $y = -x^2 + 4$ ($x \in \mathbf{N}$) 的函数值的取值范围。

(3) 集合 C 中的元素是点的坐标，这些点必须满足两个条件：①它是抛物线 $y = -x^2 + 4$ 上的点，②这些点的横坐标、纵坐标都必须是自然数。

解：(1) 要使 $x, \frac{3}{2-x}$ 都是整数， $2-x$ 必须是 3 的约数，即 $2-x = \pm 1, \pm 3$ ，即 $x = 1, 3, -1, 5$ 。 $\therefore A = \{-1, 1, 3, 5\}$

注意不要丢了负整数

(2) 由 $y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$ 知，当 $x = 0, 1, 2$ 时， $y = 4, 3, 0$ 符合题意

$$\therefore B = \{0, 3, 4\}$$

0也是自然数！

在给定范围内取特殊值验证是解此类题常用的方法

(3) 点 (x, y) 满足条件 $y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$ ，则有 $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ ； $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ；

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

注意与上题元素的区别

$$\therefore C = \{(0, 4), (1, 3), (2, 0)\}$$



基础题

一、选择题

1. 下列各组对象可以构成集合的个数是 ()
- ①适合 $x+1 > x$ 的 x 值 ϕ ②适合 $|x-2| < 0.1$ 的 x 值
- ③使 $|x-2|$ 最小的 x 值 ④使 $x \neq x$ 的数 x ϕ
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. $A = \{\text{面积为 1 的矩形}\}$, $B = \{\text{面积为 1 的正三角形}\}$, 则 ()
- A. A, B 都是有限集
- B. A, B 都是无限集
- C. A 是有限集, B 是无限集
- D. A 是无限集, B 是有限集
3. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, \sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合, 最多含有元素 ()
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

二、填空题

4. 用列举法表示“两边分别在坐标轴的非负半轴上, 且边长为 1 的正方形的顶点”的集合为 $\{(x, y) | (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$
5. 用描述法表示“直角坐标平面内横坐标与纵坐标互为倒数的点”的集合为 $\{(x, y) | xy = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$
6. 用描述法表示“直角坐标平面内, 以 x 轴为中心轴线, 宽度为 2 的带形区域(包括边界)中的点”的集合为 $\{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$
7. 已知集合 $A = \{2, 3x^2 + 3x - 4, x^2 + x - 4\}$, 且 $2 \in A$, 则满足条件的实数 x 组成的集合为 $\{x | x = 2, x = -3\}$

综合题

一、选择题

8. 集合 $A = \{(x, y) | y = -1 + x - 2x^2, x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$, 若点 P 的坐标 $(x, y) \in A$, 则 P 在 () 象限.
- A. 一或二 B. 二或三 C. 三或四 D. 四或一
9. 被 5 除余 1 的整数集合用描述法可表示为 ()



- A. $\{x|x=5k+1, k \in \mathbf{N}\}$
 B. $\{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$
 C. $\{x|x=5k-4, k \in \mathbf{Z}\}$
 D. $\{x|x=5k+4, k \in \mathbf{Z}\}$

10. 已知集合 $M = \{x|x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则下列元素中不属于集合 M 的元素个数是 ()

① $x = 3 - 2\sqrt{2}\pi$

② $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

③ $x = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$

④ $x = \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

二、填空题

11. 给出下列集合:

① {太阳系中的行星}

② {小于 $\frac{1}{10^{1000}}$ 的正有理数}

③ {户口在北京市的全体公民}

④ {某试验田收获的麦粒}

⑤ $\left\{x \in \mathbf{Q} \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\right\}$

其中是无限集的有(填序号)_____.

三、解答题

12. 数集 A 满足条件: 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A (a \neq 1)$

(1) 若 $2 \in A$, 试求出 A 中其它所有元素: $-1, \frac{1}{2}$.

(2) 自己设计一个数属于 A , 然后求出 A 中其它所有元素: $a \in A, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(3) 从上面两小题中, 你能发现什么规律? $a, \frac{1}{1-a}$

答案与提示

1. D 2. D 3. A 4. $\{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$ 5. $\{(x,y)|xy=1\}$

6. $\{(x,y)|-1 \leq y \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$ 7. $\{-3,2\}$ 8. C 9. C 10. B 11. ②⑤ 12. (1)

$-1, \frac{1}{2}$ (2) 若 $3 \in A$, 则 A 中其它所有元素为 $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (3) A 中只能有 3 个元素,

它们分别是 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}$, 且三个数的乘积为 -1 .



1.2 子集、全集、补集

重点难点突破

1. 本小节主要讲述了集合与集合之间的关系. 主要应掌握: 子集、补集的概念; 包含、相等关系的意义; 空集、全集的意义; 有关术语和符号.

2. 明确集合包含关系的性质: ① $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$; ② 空集是任何非空集合的真子集; ③ $A \subseteq B, B \subseteq C, \text{则 } A \subseteq C$; ④ $A \subseteq B, B \subseteq C, \text{则 } A \subseteq C$.

3. 有 n 个元素的集合的子集的个数是 2^n , 真子集的个数是 $2^n - 1$.

4. 补集的概念要明确全集是什么. 能借助图形知: $C_S S = \emptyset, C_S \emptyset = S, C_S (C_S A) = A$.

5. 本小节的重点是子集、补集的概念. 难点是子集和真子集、全集的意义.

名师随堂解题

基础题

★例1 用适当的符号表示下列各题中元素与集合、集合与集合之间的关系:

(1) 0 与 \emptyset (2) \emptyset 与 $\{0\}$ (3) \emptyset 与 $\{\emptyset\}$ (4) 1 与 $\{(0,1)\}$

思路: (1)、(4)是元素与集合之间的关系; (2)是集合与集合之间的关系; (3)既可以看作是元素与集合之间的关系, 又可以看作是集合与集合之间的关系.

解: (1) $\because \emptyset$ 是不含任何元素的集合 $\therefore 0 \notin \emptyset$

(2) $\because \emptyset$ 是任何非空集合的真子集 $\therefore \emptyset \subsetneq \{0\}$

(3) $\because \{\emptyset\}$ 是以 \emptyset 为元素的单元素集合 $\therefore \emptyset \in \{\emptyset\}$

又 \emptyset 是任何非空集合的真子集 $\therefore \emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$

要深刻理解此题的两种表示方法

(4) $\because \{(0,1)\}$ 是以数对 $(0,1)$ 为元素的单元素集合 $\therefore 1 \notin \{(0,1)\}$

说明: 本题的关键是要弄清有关符号的意义及辩证地理解集合与元素的关系.

★★例2 设集合 $A = \{x - y, x + y, xy\}, B = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2, 0\}$, 且 $A = B$, 求实数 x 和 y 的值及集合 A, B .

思路: 依据集合中元素的确定性、互异性、无序性, 再由条件 $A = B$, 可知 $0 \in A$, 然后由此讨论求解.

$$A = B = \{0, 1, -1\}$$



解: $\because A=B, 0 \in B, \therefore 0 \in A$

若 $x+y=0$ 或 $x-y=0$, 则 $x^2-y^2=0$, 这样集合 $B=\{x^2+y^2, 0, 0\}$, 这与集合中元素的互异性矛盾, 所以 $x+y \neq 0, x-y \neq 0$.

$$\therefore \begin{cases} xy=0 \\ x-y=x^2-y^2 \\ x+y=x^2+y^2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{或} \quad \begin{cases} xy=0 \\ x-y=x^2+y^2 \\ x+y=x^2-y^2 \end{cases} \quad (2)$$

分类讨论要层次清楚, 不重不漏

由(1)得: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

由(2)得: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

当 $x=0, y=0$ 时, $x-y=0$, 故舍去

当 $x=1, y=0$ 时, $x-y=x+y=1$, 故也舍去

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\therefore A=B=\{0, 1, -1\}$$

说明: 在确定集合中特定字母的值时, 容易产生与集合中元素的性质相矛盾的增解, 因此在求得结果后, 应带入原题中进行检验.

★★例3 设集合 $A=\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$, $B=\{x|a+1 \leq x < a+5\}$, 若 $A \supseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

思路: 因为 A, B 都是数集, 且 B 是 A 的子集, 故可借助数轴来解答此题.

解: 如图 1-1 $\because A \supseteq B \therefore a+5 \leq -2$ 或 $a+1 > 4$, 即 $a \leq -7$ 或 $a > 3$

要注意等号何时有时没有, 看图验证

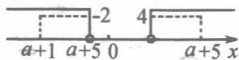


图 1-1

说明: 注意此题的两种情况及边界点的取值, 含有还是不含有的.

★★例4 设集合 $A=\{x|x^2-px+q=0\}$, $B=\{y|y^2+(p-1)y+q-3=0\}$, 且 $A=\{3\}$, 求集合 B .

思路: A, B 都是一元二次方程的解集, 由条件 $A=\{3\}$, 说明集合 A 中的一元二次方程的两根均为 3, 由韦达定理可求出 p, q 的值, 从而确定集合 B .

解: $\because A=\{x|x^2-px+q=0\}=\{3\}$

$$\therefore \begin{cases} 3+3=p \\ 3 \times 3=q \end{cases} \therefore \begin{cases} p=6 \\ q=9 \end{cases}$$

$$\therefore B=\{y|y^2+5y+6=0\}=\{-2, -3\}$$



易错题

★★例 1 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | a+1 \leq x \leq 2a-1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.



$$\begin{aligned} 2a-1 &< a+1 \\ a &< 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{① } B \subseteq A & \begin{cases} a+1 \leq 2a-1 \\ a+1 \geq -2 \end{cases} \\ \text{② } B \subseteq A & \begin{cases} 2a-1 \leq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

思路: $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 时, 均有可能存在 a 符合条件.
解: 当 $B = \emptyset$ 时, $B \subseteq A$ 成立, 此时 $a+1 > 2a-1 \therefore a < 2$

要记住讨论 $B = \emptyset$ 这种情况

当 $B \neq \emptyset$ 时, 要使 $B \subseteq A$, 则需

$$\begin{cases} a+1 \leq 2a-1 \\ a+1 \geq -2 \\ 2a-1 \leq 5 \end{cases} \therefore \begin{cases} a \geq 2 \\ a \geq -3 \\ a \leq 3 \end{cases} \text{ 即 } 2 \leq a \leq 3$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为: $a \leq 3$

★★例 2 已知全集 $S = \{1, 3, x^3 + 3x^2 + 2x\}$ 和它的子集 $A = \{1, |2x-1|\}$, 如果 $C_S A = \{0\}$, 则这样的实数 x 是否存在? 若存在, 求出 x ; 若不存在, 请说明理由.

思路: 由 $C_S A = \{0\}$, 可知 $0 \in S$, 但 $0 \notin A$.

解: $\because C_S A = \{0\} \therefore 0 \in S$, 但 $0 \notin A$

$\therefore x^3 + 3x^2 + 2x = 0$, 解得 $x = 0, -1, -2$

当 $x = 0$ 时, $|2x-1| = 1$, A 中已有元素 1, 所以, 不合题意, 舍去;

当 $x = -1$ 时, $|2x-1| = 3 \in S$, 适合题意;

一定要验证 x 是否适合题意

当 $x = -2$ 时, $|2x-1| = 5 \notin S$, 不合题意, 舍去

所以, 这样的实数 x 存在, 它只能是 -1 .

说明: 解答此题时, 求出 x 后, 验证其是否符合题意是必要的.

创新题

★★例 (1) 设 $\emptyset \subset A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则符合条件的集合 A 的个数为 ()

- A. 32 B. 31 C. 30 D. 29

(2) 非空集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且满足条件: 若 $a \in S$, 则 $6-a \in S$, 符合要求的集合 S 的个数为 ()

- A. 4 B. 5 C. 7 D. 31

思路: (1) 集合 A 是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的非空子集, 个数是 $2^5 - 1 = 31$.

(2) 集合 S 是 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的非空子集, 共有 31 个, 再找出符合条件的集合: $\{3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 共 7 个. 答案: (1) B; (2) C

先写出符合条件的最基础的前 3 个集合, 再补充组合出后 4 个集合

说明: 有 n 个元素的集合的子集个数是 2^n , 非空子集的个数是 $2^n - 1$.

高考题

★★例 1 (1984 年, 全国) 数集 $X = \{(2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$ 与数集 $Y = \{(4k+1)\pi, k \text{ 是整}$



数)之间的关系是()

- A. $X \subset Y$ B. $X \supset Y$ C. $X = Y$ D. $X \neq Y$

思路一: 可用列举法写出两个集合中的各一部分元素, 进行对比, 例如:

$X = \{\dots, -5\pi, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$, $Y = \{\dots, -5\pi, -3\pi, -\pi, \pi, \dots\}$, 可得, $2n+1$ 与 $4k+1$ 均为奇数 $\therefore X = Y$.

思路二: 由 $2n+1 = \begin{cases} 4k+1 & (n=2k) \\ 4k-1 & (n=2k-1) \end{cases} \therefore X = Y$.

思路三: 集合 X 为 π 的奇数倍, 由已知可得 $Y \subset X$; 任取 $x \in X$, 则 $x = (2n+1)\pi$, 当 $n = 2k$ 时, $x = (4k+1)\pi \in Y$, 当 $n = 2k-1$ 时, $x = (4k-1)\pi \in Y \therefore X \subset Y \therefore X = Y$

答案: C

★例2 (2002年, 全国) 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

则()

- A. $M = N$ B. $M \subset N$ C. $M \supset N$ D. $M \cap N = \emptyset$

思路: 集合 M 中当 $k = 2n$ 时, $x = n + \frac{1}{4}$, 当 $k = 2n+1$ 时, $x = n + \frac{3}{4}$; 集合 N

中当 $k = 4n$ 时, $x = n + \frac{1}{2}$, 当 $k = 4n+1$ 时, $x = n + \frac{3}{4}$, 当 $k = 4n+2$ 时, $x = n+1$,

当 $k = 4n+3$ 时, $x = n+1 + \frac{1}{4}$; 因此 $M \subset N$ 答案: B

名校最新秘题

④ 基础题 ④

一、选择题

1. 集合 $\{x \mid x = -y^2 + 8, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ 的真子集的个数是 ()

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

2. 设全集 $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $A = \{\text{不大于10的质数}\}$, 则 $C_S A$ 为 ()

- A. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ B. $\{2, 4, 6, 8\}$ C. $\{1, 4, 6, 8, 9\}$ D. $\{4, 6, 8, 9\}$

3. 若 $S = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$, 则 $C_S A = ()$

- A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$

- C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{1, 2\}$



二、填空题

4. 已知 $S = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 0\}$, 用列举法表示集合 $C_S A$ 是 $\{(x, y) | x=0, y=0\}$.

5. 设全集 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 且 $A = \{x \in S | x^2 - 5x + a = 0\}$, 若 $C_S A = \{2, 3\}$, 则 a 为 4 .

6. 设全集为 \mathbf{Z} , $A = \{x \in \mathbf{Z} | x < 6\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | x \leq 4\}$, 则 $C_Z A$ 与 $C_Z B$ 的关系是 $C_Z A \subsetneq C_Z B$.

综合题

一、选择题

7. 设 $A = \left\{x \mid \frac{1}{x} > 0\right\}$, $S = \mathbf{R}$, 则 $C_S A = (\quad)$

A. $\left\{x \mid \frac{1}{x} \leq 0\right\}$

B. $\{x | x < 0\}$

C. $\{x | x \leq 0\}$

D. $\{x | x \geq 0\}$

二、填空题

8. 已知三个元素的集合 $A = \{m, mn, m-n\}$, $B = \{0, |m|, n\}$, 如果 $A=B$, 那么 $m+n$ 的值为 0 .

三、解答题

9. 设全集 $S = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $C_S A = \{x | ax - 1 = 0\}$, 求由实数 a 组成的集合.

10. 已知集合 $A = \{-1, x^2 - 3, x^2 + 1\}$, $B = \{x - 3, x - 1, x + 1\}$, 若 $\{-2\} \subsetneq A$ 且 $\{-2\} \subsetneq B$, 求实数 x 组成的集合的子集的个数.

11. 设全集 $S = \{2, 3, x^2 + 2x - 3\}$, $A = \{2, |x - 1|\}$, $C_S A = \{5\}$, 求实数 x 的值.

答案与提示

1. C

2. C

3. A

4. $\{(0, 0)\}$

5. 4

6. $C_Z A \subsetneq C_Z B$

7. C

8. -2

9. $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$

10. 4个, 提示: x 组成的集合为 $\{-1, 1\}$

11. 不存在. 提示:

解得 $x = -4, 2$, 均不合题意

1.3 交集、并集

重点难点突破

1. 本小节主要讲述了集合的两种运算, 交集和并集的概念和性质.