高等院校“十二五”规划教材·数字媒体技术
示范性软件学院系列教材

离散数学

丛书主编 肖刚强
本书主编 张振琳
副主编 郑 魏 宁 涛 李孝贵
主 审 赵 波

辽宁科学技术出版社
LIAONING SCIENCE AND TECHNOLOGY PUBLISHING HOUSE

高等院校“十二五”规划教材·数字媒体技术
示范性软件学院系列教材

离散数学

丛书主编 肖刚强
本书主编 张振琳
副主编 郑 巍 宁 涛 李孝贵
主 审 赵 波

辽宁科学技术出版社
沈 阳

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 张振琳主编. —沈阳：辽宁科学技术出版社，2012.8

高等院校“十二五”规划教材·数字媒体技术
ISBN 978-7-5381-7470-0

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第084638号

出版发行：辽宁科学技术出版社
（地址：沈阳市和平区十一纬路29号 邮编：110003）
印 刷 者：沈阳天正印刷厂
经 销 者：各地新华书店
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：10
字　　数：210千字
印　　数：1~3000
出版时间：2012年8月第1版
印刷时间：2012年8月第1次印刷
责任编辑：于天文
封面设计：何立红
版式设计：于　浪
责任校对：李淑敏

书　　号：ISBN 978-7-5381-7470-0
定　　价：21.00元

投稿热线：024-23284740
邮购热线：024-23284502
E-mail:lnkjc@126.com
http://www.lnkj.com.cn
本书网址：www.lnkj.cn/uri.sh/7470

序 言

当前，我国高等教育正面临着重大的改革。教育部提出的“以就业为导向”的指导思想，为我们研究人才培养的新模式提供了明确的目标和方向，强调以信息技术为手段，深化教学改革和人才培养模式改革，根据社会的实际需求，培养具有特色显著的人才，是我们面临的重大问题。我们认真领会和落实教育部指导思想后提出新的办学理念和培养目标。新的变化必然带来办学宗旨、教学内容、课程体系、教学方法等一系列的改革。为此，我们组织学校有多年教学经验的专业教师，多次进行探讨和论证，编写出这套“数字媒体技术”专业的系列教材。

这套系列教材贯彻了“理念创新，方法创新，特色创新，内容创新”四大原则，在教材的编写上进行了大胆的改革。教材主要针对软件学院数字媒体技术等相关专业的学生，包括了多媒体技术领域的多个专业方向，如图像处理、二维动画、多媒体技术、面向对象计算机语言等。教材层次分明，实践性强，采用案例教学，重点突出能力培养，使学生从中获得更接近社会需求的技能。

本套系列教材在原有学校使用教材的基础上，参考国内相关院校应用多年的教材内容，结合当前学校教学的实际情况，有取舍地改编和扩充了原教材的内容，使教材更符合本校学生的特点，具有更好的实用性和扩展性。

本套教材可作为高等院校数字媒体技术等相关专业学生使用，也是广大技术人员自学不可缺少的参考书之一。

我们恳切的希望，大家在使用教材的过程中，及时给我们提出批评和改进意见，以利于今后我们教材的修改工作。我们相信经过大家的共同努力，这套教材一定能成为特色鲜明、学生喜爱的优秀教材。

肖刚强

2012年新年于大连

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的一门核心课程，也是IEEE&ACM确定的计算机专业核心课程，离散数学是以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。离散数学为许多专业课程提供理论基础，例如数据结构、操作系统、编译原理、算法分析、逻辑设计、系统结构等课程，本书的编写目的就是为计算机专业的学生提供必要的数学基础。适用于数学、计算机科学、工程、数字媒体技术等专业的学生，其先修课程是大学代数。

本书整体上包括数理逻辑、集合论、代数结构、图论等四方面的内容，具体包括命题逻辑、谓词逻辑、集合论、二元关系、函数、代数系统、群、环、域、格与布尔代数、图的基本概念、欧拉图、哈密尔顿图、树等内容。全书充分考虑应用性本科学生培养目标和教学特点，注重基本概念的同时，对于一些代表性题目给出了分析解题的过程。

本书是参考国内外多所院校应用多年的教材内容，结合作者本校学生的实际情况和教学经验，在保持知识体系完整的基础上，本书尽量做到内容精炼，重点突出，讲解详实，并且对全部习题给出了完整答案，并针对某些难点给出了分析。这样使本书更符合本科学生的特点，具有更好的实用性和扩展性。

由于水平所限，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

张根琳

目 录

第 1 章　命题逻辑

数理逻辑是用数学方法研究思维规律和推理过程的科学，它的显著特征是符号化和形式化，即把推理过程所涉及的内容用符号来表示，用形式系统来刻画。数理逻辑和计算机的发展有着密切的联系，它是计算机软件理论技术和硬件逻辑设计、人工智能等学科的重要理论基础。命题逻辑是数理逻辑中最基本，最简单的部分，也是谓词逻辑的基础。

1.1　命题和连接词

在数理逻辑中，我们将把每个能分辨真假但不能既真又假的陈述句称作一个命题。也就是说，一个命题要么为真，要么为假，两者只能居其一，但不能兼而有之。真值就是语句为真或为假的性质。当命题对其判断为真时，就说这个命题的真值为真，称其为真命题；当一个命题对其判断为假时，就说它的真值为假，称其为假命题。

【例题 1–1】判断下列句子中哪些是命题。

1）5 大于 10。

2）这朵花多么好看啊！

3）今天下午开会吗?

4）请把门关上！

5）地球是平的。

6）2 是偶数。

7）在火星上存在着生物。

8）$x + 2 = 10$

解：判断句子是否为命题的要点就是两点：首先必须是陈述句，而疑问句、祈使句、感叹句等都不是命题；其次必须有唯一的真值。应注意的是，一个具有真值与是否知道它的真值是两件事。可以知道 2)是感叹句，3)是疑问句，4)是祈使句，所以都不是命题，另外 8)不是命题，因为此式的真值随着 x 的取值而变化，当 x=8 时，x+2=10 为真，而 x 取其他值时，x+2=10 为假，所以它不是命题。其余的 1)、5)、6)、7)都是命题，其中 1)、5)是假命题，6)是真命题，7)的真值也是唯一的，只是现在不知道而已，所以它也是命题。

在例题 1–1 中的命题都一个特点，也就是它们都是简单的陈述句，都不能分解成更简单的陈述句。我们称不能再分解的命题为原子命题或简单命题，否则称为复合命题，复合命题使用命题连接词联结简单命题而得到。

【例题 1–2】判断下列语句是否是命题。

1）姐姐学习不是很用功。

2）姐姐和妹妹学习都很用功。

3）姐姐或者妹妹学习很用功

4）如果姐姐学习用功，那么妹妹学习也用功。

5）姐姐学习用功当且仅当妹妹学习用功。

解：这些命题都是具有唯一真值的陈述句，所以都是命题，这些命题中使用了“不

是”、“和”、“或者”、“如果……那么”、“当且仅当”等连接词。所以【例题 1–2】中给出的命题都是复合命题。

在数理逻辑中，为了能用数学方法来研究命题之间的逻辑关系和推理，我们需要将命题符号化，也就是用英文字母 P，Q，R……或带下标的字母 P_i，Q_i，R_i……等表示简单命题，一般将符号放在它所表示的命题之前。例如：

P：5 大于 10。

Q：地球是平的。

我们把表示命题的符号称为命题标识符。

此外，我们将命题的真值也符号化了，其中用 0（或 F）代表“假”，用 1（或 T）代表“真”。对于一个确定的命题而言，它的真值不是 1 就是 0，所以有时候我们用 0（或 F）表示抽象的“假命题”，用 1（或 T）表示抽象的“真命题”。

在日常生活中，我们常常使用“不是”、“和”、“或者”、“如果……那么”等连接词，对于这些连接词的使用，没有给出很严格的定义，有些时候不是很确切，在数理逻辑中，复合命题是由命题连接词联结简单命题而得到的。连接词是复合命题中的重要组成部分，下面我们介绍连接词的定义及其符号表示。

定义 1.1　设 P 为任意一命题，复合命题“非 P”称为 P 的否定式，记作 $\neg P$。符号“$\neg$”称为否定连接词。

若 P 为真，$\neg P$ 为假；若 P 为假，$\neg P$ 为真。

下面我们用类似表 1.1 的所谓真值表来规定连接词的意义，描述复合命题的真值状况其中 0 代表假，1 代表真。表 1.1 规定了否定词 $\neg$ 的意义，表示 $\neg P$ 的真值状况。

表 1.1

P	$\neg P$
1	0
0	1

在例题 1–2 中，如果用 P 表示“姐姐学习很用功”，则 $\neg P$ 表示“姐姐学习不是很用功”。

定义 1.2　设 P，Q 为任意两个命题，复合命题“P 并且 Q”称为 P，Q 的合取式，记作 $P \wedge Q$。符号“$\wedge$”称为合取连接词。

当且仅当 P，Q 同时为真时，$P \wedge Q$ 为真，其余情况，$P \wedge Q$ 为假。

合取连接词 $\wedge$ 的定义如表 1.2 所示。

表 1.2

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

在例题 1–2 中，如果用 P 表示“姐姐学习很用功”，Q 表示“妹妹学习很用功”，则 $P \wedge Q$ 表示“姐姐和妹妹学习都很用功”。

在自然语言中，“既……又……”，“不仅……而且”，“虽然……但是”等都可以符号化为合取连接词∧。

【例题 1–3】将下列命题符号化。

1）姐姐既美丽又聪明。

2）姐姐不仅美丽，而且聪明。

3）姐姐虽然不美丽，但是她很聪明。

4）姐姐和妹妹都很美丽。

5）姐姐和妹妹是好朋友。

解：设 P：姐姐很美丽，Q：姐姐很聪明，R：妹妹很美丽，1）、2）、3）、4）分别符号化为 $P\wedge Q$，$P\wedge Q$，$\neg P\wedge Q$，$P\wedge R$，但是 5)是简单命题，直接符号化为 T：姐姐和妹妹是好朋友。

在这里强调一下，不能简单地将命题中出现的所有“和”都看做两个命题的合取。

定义 1.3　设 P，Q 为任意两个命题，复合命题“P 或者 Q”称为 P，Q 的析取式，记作 $P\vee Q$，符号“∨”称为析取连接词。

当且仅当 P，Q 同时为假时，$P\vee Q$ 的真值为假，否则 $P\vee Q$ 的真值为真。

析取连接词∨的定义如表 1.3 所示。

表 1.3

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

在例题 1–2 中，如果用 P 表示“姐姐学习很用功”，Q 表示“妹妹学习很用功”，则 $P\vee Q$ 表示“姐姐或者妹妹学习很用功”。

在自然语言中的“或”具有二义性，用“或”联结的命题，有时具有相容性，有时又具有排斥性。分别考虑下面两个命题。

1）王明擅长跳舞或者唱歌。

2）王明住在 302 房间或 303 房间。

在 1）中，王明可能既擅长跳舞又擅长唱歌，只要擅长其中一项，命题就为真，只有王明跳舞、唱歌都不擅长时，此命题才是假的，所以 1）中的这个“或”具有相容性，但是 2）中，王明不可能既住在 302 房间又住在 303 房间，换句话说，如果王明住在 302 房间是真的，则王明住在 303 房间就是假的，也就是 2）中的这个“或”具有排斥性。

从析取连接词的定义中可以看出，析取连接词表达了相容性“或”。

定义 1. 4　给定两个命题 P 和 Q，复合命题“如果 P，那么 Q”称为 P 与 Q 的蕴涵式，记作 $P\rightarrow Q$。称 P 是蕴涵式的前件，Q 是蕴涵式的后件，符号“→”称为蕴涵连接词。

当且仅当 P 的真值为真，Q 的真值为假时，$P\rightarrow Q$ 的真值为假，其余情况 $P\rightarrow Q$ 的真值为真。

蕴涵连接词→的定义如表 1.4。

表 1.4

P	Q	$P\to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

由蕴涵连接词定义可以知道，在 $P\to Q$ 中前件为假，那么后件 Q 不论取真或取假，$P\to Q$ 的真值为真。

除了“如果 P，那么 Q”可以符号化为 $P\to Q$ 外，“若 P，则 Q”，“只要 P 就 Q”，“只有 Q 才 P”“P 是 Q 的充分条件”，“Q 是 P 的必要条件”也都可以。

在自然语言中，“如果 P，那么 Q”中的 P，Q 往往有着某种内在的联系，而在数理逻辑中却不是这样，数理逻辑中的蕴涵称为“实质蕴涵”，它不要求 $P\to Q$ 中的 P，Q 有什么关系，P，Q 可以是意义毫不相干的命题。只要 P，Q 为命题，$P\to Q$ 就有意义。也就是说，只要各个简单命题的真值是确定的，则不管它们之间是否有什么内在联系，都可以由连接词组成真值确定的复合命题，例如：

“如果雪是黑的，那么太阳从东方升起”。

在日常生活中看起来似乎很荒谬，但是在数理逻辑中这是一个有意义的命题，且据定义其值为“真”。

【例题 1–4】将下列命题符号化。

1）若 2+2=4，则太阳从西方升起。

2）若 2+2=4，则太阳不从西方升起。

3）若 2+2≠4，则太阳从西方升起。

4）若 2+2≠4，则太阳不从西方升起。

5）只要 2+2=4，则太阳从西方升起。

6）只有 2+2=4，太阳才从西方升起。

解：设 P：2+2=4，Q：太阳从西方升起，这里 P，Q 显然没有什么内在联系，但仍然可以组成蕴涵式。符号化后的结果是：1）、5）：$P\to Q$，2）：$P\to\neg Q$，3）：$\neg P\to Q$，4）：$\neg P\to Q$，6）$Q\to P$。

定义 1.5　给定两个命题 P 和 Q，复合命题“P 当且仅当 Q”称作 P，Q 的等价式，记作 $P\leftrightarrow Q$，符号“$\leftrightarrow$”称为等价连接词。

当 P 与 Q 的真值为相同时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为真，否则 $P\leftrightarrow Q$ 的真值假。

等价连接词 $\leftrightarrow$ 的定义如表 1.5。

表 1.5

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例如：P 表示“两个三角形全等”，Q 表示“两个三角形的三组边对应相等”则 $P\leftrightarrow Q$ 表示“两个三角形全等当且仅当它们的三组边对应相等”。

与前面的蕴涵连接词一样，等价连接词也可以不考虑具体的命题的含义，而只是根据连接词的意义确定真值。例如“2+2=4 当且仅当太阳不从西方升起”也可以用等价连接词表示。

以上介绍了五种连接词，其中¬是一元连接词，其余的都是二元连接词，这些连接词反映了复合命题和简单命题之间的抽象的逻辑关系，我们可以注意到：

1）复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值，而与它们的内容含义无关。与连接词所连接的两原子命题之间有无关系无关。

2）$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$具有对称性，$\neg$，$\rightarrow$无对称性。

一般的复合命题，都可以根据上面的各个连接词的定义和方法进行形式化，具体的步骤如下：

(1) 找出各个简单命题，分别符号化。

(2) 根据复合命题表达的含义，找出各个连接词，把简单命题逐个联结起来。

【例题 1–5】将下列命题符号化。

(1) 只要我有时间，我就去书店买书。

(2) 如果我没有淋湿，那么天不在下雨。

(3) 王明在坐车时，他在看书但他没有思考问题。

(4) 如果我吃饭前完成家庭作业并且天不下雨的话，那么，我就去看足球。

解：(1) 设 P：我有时间，Q：我去书店买书，命题符号化为：$P\rightarrow Q$。

(2) 设 P：天下雨。Q：我淋湿了。

命题符号化为：$\neg Q\rightarrow\neg P$。

(3) P：王明在坐车；Q：王明在看书；R：王明在思考问题。

命题符号化为：$(P\wedge Q)\wedge\neg R$。

(4) 令 P：我吃饭前完成家庭作业；Q：天不下雨；R：我就去看足球。

命题符号化为：$P\wedge Q\rightarrow R$。

1.2　命题公式和真值表

在上一节中，我们介绍了命题符号化，也就是用字母 P，Q，R 表示命题，这其实和代数中用 a，b 表示数字一样，在代数中，当字母 a 表示某个确定的数字时，我们称它为常元，当 a 表示某个不确定的数字时，我们称它为变元，在数理逻辑中也是类似，当一个命题标识符 P 表示确定命题时，就称为命题常元，如果命题标识符 P 表示不确定命题时，就称为命题变元，因为命题变元可以表示任意命题，所以它的真值不确定，因此命题变元不是命题。当命题变元 P 用一特定命题去代替，此时 P 可以确定真值，这也称作对 P 的指派。

命题常元、变元及连接词是形式化描述命题及其推理的基本语言成分，用它们可以形形式化地描述更为复杂的命题。但是并非由这三类符号组成的所有符号串都是某个命题的符号化。下面归纳定义命题公式。

定义 1.6　命题公式是由命题常元和命题变元用连接词按以下规则组成的符号串。

(1) 单个的命题常元和命题变元是命题公式，也称为原子公式或原子。

(2) 如果 A，B 是命题公式，那么 $(\neg A)$，$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$ 也是命题公式。

(3) 只有有限步引用条款 (1)、(2) 所组成的符号串是命题公式。

命题公式简称公式。

在命题公式的定义中，我们引入了 A，B，C 等符号，它们表示的是任意的公式。

按照定义可以知道，$\neg(P\to(Q\wedge R))$是命题公式，但(PQ)、$PQ\to R$，$P\vee Q\vee$，均非公式。

从公式的定义可以看出，公式的结构可以很简单，也可以很复杂，所以为了方便讨论公式的真值变化情况，首先给出了公式的层次的定义。

定义 1.7　公式的层次的定义如下：

（1）若 A 是单个的命题常元和命题变元，则称 A 是 0 层公式；

（2）称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$层公式，是指 A 满足如下情况之一：

① $A=\neg B$，B 是第 n 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 B，C 分别是第 i 层和第 j 层公式，且 $\max(i,j)=n$；

③ $A=B\vee C$，其中 B，C 的层次同②；

④ $A=B\to C$，其中 B，C 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 B，C 的层次同②；

例如$\neg P\to(Q\vee(R\wedge Q\leftrightarrow S))$是 4 层公式，$P\wedge(Q\vee((R\leftrightarrow Q)\leftrightarrow S)\to\neg R)$是 5 层公式。

定义 1.8　设 A_i 是公式 A 的一部分且 A_i 是一个命题公式，称 A_i 是 A 的子公式。

为使公式的表示更为简练，我们作如下约定：

（1）公式最外层括号一律可省略。

（2）连接词的结合能力强弱依次为

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$

（3）结合能力平等的连接词在没有括号表示其结合状况时，采用从左到右的顺序进行运算。

例如，$\neg P\to(Q\vee(R\wedge Q\leftrightarrow S))$所表示的公式是$(\neg P)\to(Q\vee((R\wedge Q)\leftrightarrow S))$

一个含有命题变元的命题公式是没有确定真值的。只有在命题公式中每个命题变元用指定的命题常量代替后，命题公式才有确定的真值，成为命题。例如，在命题公式 $P\vee Q\to R$ 中，若将 P 解释成命题：2 是素数，Q 解释成：1 是偶数，R 解释成：3 是奇数，则命题公式 $P\vee Q\to R$ 就被解释成了一个命题：若 2 是素数或 1 是偶数，则 3 是奇数。因为 P，Q，R 的真值为 1，0，1，所以 $P\vee Q\to R$ 是真命题；另一方面，如果 P，Q 的解释不变，而将 R 解释成：3 不是奇数，则 $P\vee Q\to R$ 就被解释成了一个假命题。

定义 1.9　设 P 为一命题公式，P_1，P_2，…，P_n 为出现在 P 中的所有命题变元，对 P_1，P_2，…，P_n 指定一组真值称为对 P 的一种指派（赋值）。若指定的一种指派，使 P 的值为真，则称这组值为成真指派（成真赋值）；若指定的一种指派，使 P 的值为假，则称这组值为成假指派（成假赋值）。

含 n（$n\geqslant 1$）个命题变元的命题公式，共有 2^n 组指派。

在本书中，含 n 个命题变元的命题公式的指派形式有如下约定：

（1）在命题公式 A 中，命题变元为 P_1，P_2，…，P_n，给定一种指派 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$（$\alpha_i=0$ 或 $\alpha_i=1$，$i=1$，2，…，n），其对应关系是：$P_1=\alpha_1$，$P_2=\alpha_2$，…，$P_n=\alpha_n$。

（2）在命题公式 A 中，命题变元为 P，Q，$R\cdots$，给定一种指派 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$（$\alpha_i=0$ 或 $\alpha_i=1$，$i=1$，2，…，n），其对应关系是：$P=\alpha_1$，$Q=\alpha_2$，$R=\alpha_3\cdots$，即按字典序对应。

例如：命题公式 $P\wedge(\neg Q\to R)$的成假指派为 000（$P=0$，$Q=0$，$R=0$），001（$P=0$，$Q=0$，$R=1$），010（$P=0$，$Q=1$，$R=0$），011（$P=0$，$Q=1$，$R=1$），100（$P=0$，$Q=0$，$R=0$），其余指派均为成真指派。

【例题 1–6】给出命题对应的指派。

（1）命题公式 $P\vee(\neg Q\to R)$的成假指派。

（2）命题公式 $G=P\to\neg(Q\vee R)$的成假指派。

（3）命题公式 $G=P\wedge(\neg Q\vee R)$的成真指派。

解：（1）$P\vee(\neg Q\to R)$的真值为 0，则 P 和$(\neg Q\to R)$的解释只有一种情况，就是 P 和$(\neg Q\to R)$都为 0，而$(\neg Q\to R)$真值为 0时，也只有一种解释，就是$\neg Q$ 为 1，即 Q 为 0，R 为 0。所以，命题公式 $P\vee(\neg Q\to R)$的成假指派为 000。

（2）由蕴涵连接词的含义可知，若公式 $G=P\to\neg(Q\to R)$为假，则前件 P 的真值为 1，而后件$\neg(Q\to R)$真值为 0，即 $(Q\to R)$的真值为 1，当条件式真值为 1 时，有 3 种解释，分别是，前件真值为 0，后件真值为 0；前件真值为 0，后件真值为 1；前件真值为 1，后件真值为 1。所以可知，公式 $G=P\to\neg(Q\to R)$为假的指派 3 个，分别是 101，111，100。

（3）由连接词的含义可知，命题公式 $G=P\wedge(\neg Q\vee R)$的成真指派有 3 个，分别为：100，101，111。

定义 1.10　将命题公式 P 在所有指派下取值情况列成表，称为 P 的真值表。在真值表中，分别用 1，0 代表真、假。

构造真值表的步骤如下：

（1）找出给定命题公式的所有命题变项 P_1，P_2，…，P_n（$n\geqslant1$），列出所有可能的指派（2^n 个）；

（2）按从低到高的顺序写出命题公式的各个层次；

（3）对应每个指派，计算命题公式各个层次的值，直到最后计算出整个命题公式的值。

【例题 1–7】求下列命题公式的真值表。

（1）$P\to(Q\to R)$

（2）$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$

（3）$((P\wedge Q)\vee\neg R)\to P$

解：（1）（2）（3）式的真值表分别如表 1.6、表 1.7、表 1.8 所示。

表 1.6　$P\to(Q\to R)$的真值表

P　Q　R	$(Q\to R)$	$P\to(Q\to R)$
0　0　0	1	1
0　0　1	1	1
0　1　0	0	1
0　1　1	1	1
1　0　0	1	1
1　0　1	1	1
1　1　0	0	0
1　1　1	1	1

表 1.7 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

表 1.8 $((P\wedge Q)\vee\neg R)\rightarrow P$ 的真值表

P	Q	R	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\vee\neg R$	$((P\wedge Q)\vee\neg R)\rightarrow P$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

定义 1.11 设 A 为一命题公式，

（1）若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为真，则称公式 A 为重言式或永真式。

（2）若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为假，则称公式 A 为矛盾式或永假式。

（3）若 A 在各种真值指派下至少存在一组成真指派，则称 A 是可满足式。

从定义可以看出，重言式是可满足式，但是反之不成立，重言式和矛盾式的性质截然相反，而且它们之间可以相互转化，也就是重言式的否定是矛盾式；矛盾式的否定是重言式。在数理逻辑中，重言式很重要，在推理时所引用的公理和定理都是重言式。由于一个公式的真值表刻划了它的逻辑含义，因此，可以用真值表法判定公式的类型。如果真值表的最后一列全为 1，则公式是重言式，若最后一列全为 0，则公式为矛盾式。若最后一列既有 1 又有 0，则公式为非重言式的可满足式。

【例题 1–8】用真值表判断下列公式是否是重言式、矛盾式、可满足式。

（1）$\neg P\leftrightarrow Q$

（2）$\neg(P\rightarrow Q)\ \wedge Q$

（3）$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$

解：

（1）式真值表如表 1.9 所示。

表 1.9

P	Q	$\neg P$	$\neg P\leftrightarrow Q$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

因此公式（1）为满足。

（2）式真值表如表 1.10 所示。

表 1.10

P	R	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg(P \to Q) \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

因此公式（2）为矛盾式。

（3）式真值表如表 1.11 所示。

表 1.11

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

因此公式（3）为重言式。

但是当公式中所含的命题变元较多时，真值表法很麻烦，计算量大。真值表法也是一个乏味的方法，它对于培养逻辑思维和推理能力的帮助很少，在后面两节我们将介绍其他方法。

1.3　等值演算

给定 n 个命题变元，按命题公式的形成规则可以形成无数的命题公式，但是这些无数的命题公式中有些具有相同的真值表。这些无数的命题公式对应的真值表只有限个。对于任意含有 2 个命题变元的公式来说，共有 4 种不同的赋值 00，01，10，11。而在每个赋值下，公式的真值只能为 1 或 0，因此 2 个命题变元组成的命题公式共可以产生 $2^{2^2}=16$ 种不同的取值情况。同理，对于 n 个命题变元，可能的赋值有 2^n 个，对于每个赋值，公式的取值又有 1、0 两种可能。可以知道，n 个命题变元组成的命题公式共可以产生 2^{2^n} 种不同的取值情况。换句话说，n 个命题变元可以形成 2^{2^n} 个不同真值的命题公式。

定义 1.12　给定两个命题公式 A 和 B，设 P_1，P_2，…，P_n 为所有出现于 A 和 B 中的命题变元，若给 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值指派，A 和 B 的真值相同，称 A 和 B 是等值的或逻辑等价的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

因此，逻辑等价式 $A \Leftrightarrow B$ 可以从两个角度去理解：

（1）$A \Leftrightarrow B$ 表示断言“$A \leftrightarrow B$ 是重言式”。

（2）$A \Leftrightarrow B$ 表示“A，B 等值”，或理解为“当 A 真时 B 亦真，当 A 假时 B 也假”，甚至理解为“由 A 真可推出 B 真，且由 B 真可推出 A 真”。

注意：“$\Leftrightarrow$”不是连接词而是公式间的等值的一种表示方法，所以 $A \Leftrightarrow B$ 不表示一个公式，这一点要与“$\leftrightarrow$”区分，注意不要混淆。

【例题 1-9】用真值表法判断 $P \to (Q \to R)$ 与 $Q \to (P \to R)$ 是否等值。

解：用真值表法判断两公式是否等值。两式真值表如表 1.12 所示。

表 1.12

P	Q	R	$(Q \to R)$	$P \to (Q \to R)$	$(P \to R)$	$Q \to (P \to R)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

因为 $P \to (Q \to P)$ 与 $Q \to (P \to R)$ 对应的列取值完全相同，所以 $P \to (Q \to R)$ 与 $Q \to (P \to R)$ 等值。

【例题 1-10】证明：$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$

证明：公式 $P \to (Q \to R)$ 与 $P \wedge Q \to R$ 的真值表如下。

表 1.3　公式 $P \to (Q \to R)$ 与 $P \wedge Q \to R$ 的真值表

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to R$	$P \to Q \to R \leftrightarrow P \wedge Q \to R$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

由表知，公式 $P \to (Q \to R) \leftrightarrow P \wedge Q \to R$ 重言，故 $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$。

下面列出常用的重要等值式，这是学好数理逻辑的基础，在下面的公式中，A，B，C 代表任意的命题公式。

（1）双重否定律：$A \Leftrightarrow (\neg(\neg A))$

（2）等幂律：　$A \Leftrightarrow (A \vee A)$　　　　$A \Leftrightarrow (A \wedge A)$