概率论与随机过程

GAILÜLUN YU SUIJI GUOCHENG

(第2版)

贾玉心 编著

中国科学技术出版社

概率论与随机过程

第 2 版

贾玉心　编著

中国科学技术出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与随机过程/贾玉心编著. —北京:中国科学技术出版社,2005. 5

ISBN 7-5046-4056-5

Ⅰ. 概... Ⅱ. 贾... Ⅲ. ①概率论-教学参考资料 ②随机过程-教学参考资料 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049831 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码:100081
电话:010-62103210　传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京市迪鑫印刷厂印刷
*
开本:787 毫米×1092 毫米　1/16　印张:20.75　字数:370 千字
2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—5200 册　定价:28.00 元

前　言

概率论与随机过程是研究随机现象的一门数学学科.随着科学技术的发展,它的应用日益广泛深入.本课程是高等院校工科专业,尤其是电子、通信、计算机、自动化等专业的一门重要基础理论课.

通过本课程的学习,培养学生运用概率论与随机过程的方法分析和解决实际问题的能力.本书分两篇(共八章).第一篇概率论部分,主要内容有:随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数学特征、大数定理和中心极限定理,第二篇随机过程部分,主要内容有:随机过程基本知识、泊松过程、马尔可夫链及平稳随机过程.

本书是为非数学专业本科生开设的概率论与随机过程课程编写的教材,随机过程部分亦可作为研究生学习参考.

近几十年来,信息、信息的传输、变换与处理的概念正在渗入各个领域和学科,这些都与概率论及随机过程理论密切相关.为适应这一客观需要,作者在 1995 年出版并使用近十年的《概率论与随机过程》一书的基础上,进行了重新改写与修订.在编写过程中,重点突出了以下几点:第一,充实了随机过程的内容,着重阐述了随机过程的基本知识,重点讲解了泊松过程、马尔可夫链及平稳随机过程;第二,本着既贯彻少而精、又注重理论性的原则,着重基本概念、基本理论、基本计算与应用的论述;第三,对一些重要概念和例题进行了分析,对难点问题由浅入深地启发学生对其基本思想和方法的掌握;第四,为使学生加深对概念的理解和便于自学,在章内和小结部分充实了例题.

本书在出版过程中承蒙姜炳麟教授审阅了全部书稿,并提出了非常宝贵的修改意见,谨此致以诚挚的谢意.

限于编者水平,书中不免存在不妥和疏漏之处,恳请读者给予指正.

编者

2005 年 3 月

内 容 简 介

本书分两篇(共八章),第一篇概率论,第二篇随机过程初步.本书是在1995年版的系统和结构基础上,充实了随机过程的一些内容,以适应不同层次学生学习的要求;每章内对例题和习题做了补充和调整,章后对重点内容进行了小结并给出一定数量的例题解析.书后附有习题答案.

本书可作为高等院校非数学专业的本科生教材,随机过程部分内容也可供工程硕士研究生学习参考.

目　　录

第一篇　概率论

第二篇 随机过程初步

第一篇　概率论

第一章　随机事件及其概率

本章主要介绍概率论的基本概念:事件、概率、概率的性质、条件概率及独立性.这些概念将贯穿全书,要求必须深刻理解和熟练掌握.

1.1　随机事件

为了研究随机现象,首先应当对其有关概念进行确切的表述.

1.1.1　随机试验、随机事件

1. 随机试验

对随机现象的研究必然要联系到对客观事物进行多次的"观察"或"实验",以后统称为试验(trial)或随机试验.

所谓随机试验是指在相同条件下可以重复进行,所有可能结果不止一个且事先是已知的,而每次试验其结果是事先无法预知的试验.随机试验简称为试验,常记为 E.

例如:

E_1:投一颗骰子,观察出现的点数;

E_2:将一枚硬币上抛两次,观察正反面出现的情况;

E_3:观察某电话交换台在某一时间间隔内接到的呼唤次数;

E_4:测量一批晶体管的 β 参数值.

在随机试验中首先重视的是试验的结果.例如,将一枚硬币上抛一次,我们关心的是出现正面或出现反面,这是两种可能出现的结果.又如,考察上面的试验 E_2,则可能出现的结果有(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)四种.如果将硬币上抛三次,则结果也可以描述出来.总之,为了研究随机试验,首先需要知道这个试验可能出现的结果.这些简单的、直接可以观察到的结果称为**样本点**.如 E_3 中接到的呼唤次数 $0,1,2,3,\cdots$ 均为样本点.称试验中样本点的全体构成的集合为**样本空间**(sample space),记为 Ω.

例如:

在 E_1 中,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;

在 E_2 中,若约定用"H"表示"正面",用"T"表示"反面",样本空间 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$;

在 E_3 中,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$;

在 E_4 中,若用 t 表示测得晶体管 β 值,即为样本点,则其样本空间 $\Omega=\{t:0\leqslant t<+\infty\}$.

例 1 一条铁路共 10 个车站,从它们所有车票中任取一张,观察取得车票的票种.此试验样本空间所有样本点的个数为 $N_\Omega=A_{10}^2=90$.

若观察的是取得车票的票价,则该试验样本空间中所有样本点的个数为 $N_\Omega=\binom{10}{2}=45$.

例 2 随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去,观察 15 名新生分配的情况.

此试验的样本空间所有样本点的个数为

$$N_\Omega=\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} \text{或者 } N_\Omega=\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}.$$

2. 随机事件

在试验中,可能出现也可能不出现的事件称为**随机事件**.也可以说,试验的样本空间中的任何子集都是随机事件.随机事件简称为事件,通常记为 $A,B,C,\cdots$.

例如,在 E_1 中"出现 2 点"、"出现偶数点"均为事件,它们可以分别记为 A 和 B,也可以分别记为 $A=\{2\}$ 和 $B=\{2,4,6\}$.

再如,在 E_2 中"恰好出现一次正面"这一事件就可以表示为 $\{(H,T),(T,H)\}$.

显然,在试验 E 中,称某事件发生是当且仅当它所包含的某个样本点 e 出现.即若事件 A 包含样本点 e,意味着事件 A 发生了,记作 $e\in A$.

为了便于研究,把由一个样本点构成的单点集称为基本事件,亦即在试验中那些最简单的、直接能观察到的事件.试验中除了基本事件则还有复合事件.如 E_1 中的$\{1,3,5\}$,E_2 中的$\{(H,H),(T,T)\}$等都是复合事件.

需要指出的是,基本事件与复合事件的划分并不唯一,它依赖于试验的目的.例如,在 E_1 中,如果我们仅关心的是出现奇数点还是偶数点,这时就可以认为此试验只含有两个基本事件:"出现偶数点"和"出现奇数点".

由于样本空间是所有样本点的集合,因此样本空间也是事件,并包括了试验的所有可能结果,因此每次试验它必发生.在试验中必然发生的事件称为**必然事件**,所以样本空间就是必然事件;反之,也对.因为必然事件若视为样本点的集合时,它只能是所有样本点的集合.例如在 E_1 中"出现不大于 10 的点"的事件显然是必然事件,若写成样本点集合的形式它表示为$\{1,2,3,4,5,6\}$.显然必然事件记为 Ω.

在试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.如在 E_1 中"出现 -1 点"就是不可能事件.很显然它不应含有任何样本点,用集合论的术语讲它就是空集.

1.1.2　事件间的关系与运算

一个试验中会有各种各样的事件.概率论的重要研究课题之一是希望从简单的事件的概率推算出复杂的事件的概率.在实际问题中,往往要同时考察几个在同样条件下的事件.为了便于问题的研究,需要介绍事件之间一些常用的重要关系和运算.

1. 包含

若事件 A 的发生必导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如,在 E_1 中,令 A 表示"掷出 2 点"的事件,即 $A=\{2\}$,B 表示"掷出偶数"的事件,即 $B=\{2,4,6\}$,则 $A\subset B$.

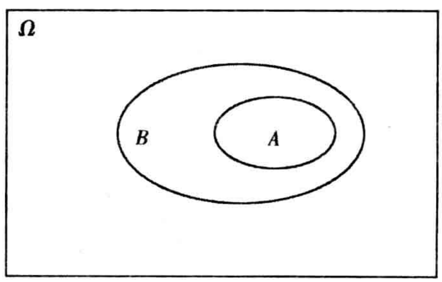

图 1.1　$A\subset B$

不难看出,事件间的包含关系对应于集合论中的包含关系.如果我们用一平面表示样本空间,平面上的点表示样本点,因而平面上的区域就表示事件.在这种约定下,事件间的关系和运算就可以用几何图形形象而直观地表示出来.这种表示法称为文(Venn)图.包含关系的几何表示见图 1.1.

2．相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 等于事件 B，记为 $A=B$.

例如，从一付 52 张的扑克牌中任取 4 张，令 A 表示“取得至少有 3 张红桃”的事件；B 表示“取得至多有一张不是红桃”的事件. 显然 $A=B$.

3．和

称事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件为 A 与 B 的和事件，简称为和，记为 $A\cup B$，或 $A+B$.

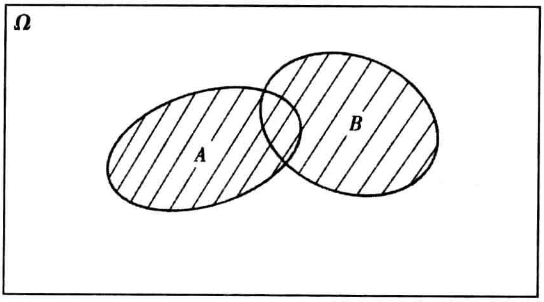

图 1.2 $A\cup B$

例如，甲、乙两人向目标射击，令 A 表示“甲击中目标”的事件，B 表示“乙击中目标”的事件，则 $A\cup B$ 表示“目标被击中”的事件. 和事件对应于集合论中的并集，它的几何表示见图 1.2.

类似地，可以将和的概念推广到任意有限多个和可列多个事件的场合，即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots=\{A_1,A_2,\cdots\text{至少有一个发生}\}$$

4．积

称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A\cap B$ 或 AB.

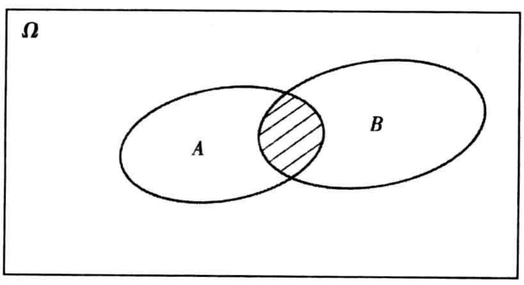

图 1.3 $A\cap B$

例如，在 E_3 中，即观察某电话交换台在某时刻接到的呼唤次数中，令 $A=\{$接到偶数次呼唤$\}$，$B=\{$接到 3 的倍数次呼唤$\}$，则 $A\cap B=\{$接到 6 的倍数次呼唤$\}$.

积事件对应于集合论中的交集. 它的几何表示见图 1.3.

同样，积的概念也可推广到任意有限多个和可列多个事件的场合. 即

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1A_2\cdots A_n=\{A_1,A_2,\cdots A_n\text{ 同时发生}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1A_2\cdots=\{A_1,A_2,\cdots\text{同时发生}\}$$

5. 差

称事件 A 发生但事件 B 不发生的事件为 A 减 B 的差事件,简称为差,记为 $A-B$.它的几何表示见图 1.4.

例如,测量晶体管的 β 参数值,令 $A=\{$测得 β 值不超过 50$\}$,$B=\{$测得 β 值不超过 100$\}$,则,$A-B=\varnothing$,$B-A=\{$测得 β 值为 $50<\beta\leqslant 100\}$.

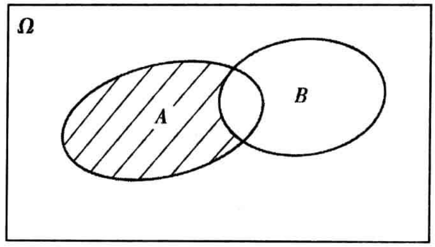

图 1.4　$A-B$

6. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 是互不相容的.它的几何表示见图 1.5.

例,观察某定义通路口在某时刻的红绿灯,若 $A=\{$红灯亮$\}$,$B=\{$绿灯亮$\}$,则 A 与 B 便是互不相容的.

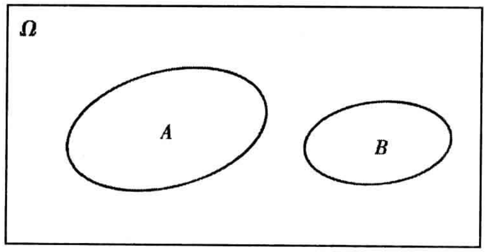

图 1.5　$A\cap B=\varnothing$

7. 对立

称事件 A 不发生的事件为 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$.其几何表示见图 1.6.显然 $A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$,$\overline{\overline{A}}=A$.

例,从有 3 个次品,7 个正品的 10 个产品中任取 3 个,若令 $A=\{$取得的 3 个产品中至少有一个次品$\}$,则 $\overline{A}=\{$取得的 3 个产品均为正品$\}$.

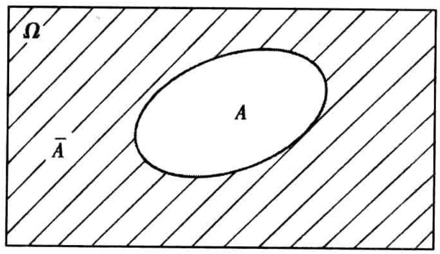

图 1.6　A 与 $\overline{A}$

1.1.3　事件的运算规律

如同集合论中的运算规律一样,事件间也有如下的运算规律:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

此外,还有一些常用性质,如 $A\cup B\supset A$,$A\cup B\supset B$;$A\cap B\subset A$,$A\cap B\subset B$;

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$；$A-B=A-AB=A\overline{B}$等.

例 3　从一批产品中每次取一件进行检验，令 $A_i=\{$第 i 次取得合格品$\}$，$i=1,2,3$，试用事件的运算符号表示下列事件.

$A=\{$三次都取得合格品$\}$

$B=\{$三次中恰有两次取得合格品$\}$　$C=\{$三次中最多有一次取得合格品$\}$

解　$A=A_1A_2A_3$　$B=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$

$C=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

例 4　一名射手连续向某一目标射击三次，令 $A_i=\{$第 i 次射击击中目标$\}$，$i=1,2,3$，试用文字叙述下列事件：

$A_1\cup A_2,\overline{A_2},A_1\cup A_2\cup A_3,A_1A_2A_3,A_3-A_2,\overline{A_1\cup A_2},\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$

解　$A_1\cup A_2=\{$前两次射击中至少有一次击中目标$\}$

$\overline{A_2}=\{$第二次射击未击中目标$\}$

$A_1\cup A_2\cup A_3=\{$三次射击至少有一次击中目标$\}$

$A_1A_2A_3=\{$三次射击都击中目标$\}$

$A_3-A_2=\{$第三次击中目标但第二次未击中目标$\}$

$\overline{A_1\cup A_2}=\{$前两次均未击中目标$\}$（注：$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$）

$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}=\{$前两次射击至少有一次未击中目标$\}$

例 5　设 A,B,C 为三个事件，$D=\{A,B,C$ 至少有一个发生$\}$，试用 A,B,C 及运算符号表示 D.

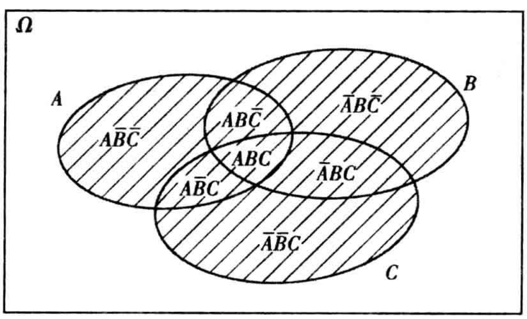

图 1.7　$A\cup B\cup C=A\bar B\bar C\cup\bar A B\bar C\cup\bar A\bar B C\cup AB\bar C\cup A\bar B C\cup\bar A BC\cup ABC$

解　(1) 分解法

$D=A\bar B\bar C\cup\bar A B\bar C\cup\bar A\bar B C\cup\bar A BC\cup A\bar B C\cup AB\bar C\cup ABC$

(2) 取余法

$D=\overline{\overline{D}}=\{\overline{A,B,C\text{ 都不发生}}\}$

$=\overline{\bar A\bar B\bar C}$

(3) 直译法

$D=A\cup B\cup C$

利用对偶律立即可以看出方法(3)与方法(2)所得到的结果是一样的.而方法(1)和方法(3)所得到的结果也可以利用几何表示法看出它们是一样的，见图 1.7.

习 题 1.1

1．写出下列随机试验的样本空间 Ω.

(1) E_1:一袋里有四个球,它们分别标号 1,2,3,4,从袋中任取一球后,不放回袋中,再从袋中任取一球,记录两次取球的结果;

(2) E_2:将 E_1 的取球方式改为一次从口袋里任取两个球,记录取球的结果;

(3) E_3:抛一枚硬币一次,记录正面出现的次数;

(4) E_4:抛一枚硬币,直到抛出正面为止,记录抛硬币的次数;

(5) E_5:在区间$[0,1]$上任取一点,记录它的坐标.

2．填空:(1) 若 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5\}$,则 $A\cup B=$__________,$AB=$__________,$A-B=$__________;(2) 若 $A=\{x\mid x<3\}$,$B=\{x\mid x<1\}$,则 $A\cup B=$__________,$AB=$__________,$A-B=$__________;

(3) 若 $A=\{(x,y)\mid 1<x<2,-\infty<y<+\infty\}$,$B=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,2<y<4\}$,则 $A\cup B=$__________,$AB=$__________,$A-B=$__________.

3．设 A、B 为二事件,证明:

(1) $B=AB\cup\overline{A}B$,且 AB 与$\overline{A}B$ 互不相容;

(2) $A\cup B=A\cup\overline{A}B$,且 A 与$\overline{A}B$ 互不相容.

4．设 A、B、C 为三事件,用 A、B、C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;(2) A、B、C 都发生;(3) A、B、C 中不多于一个发生.

5．一个工人生产了 n 个零件,以 $A_i=\{$生产的第 i 个零件是合格品$\}$,$i=1,2,\cdots,n$,试用 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$表示以下事件:

(1) 没有一个零件是不合格的;

(2) 至少有一个零件是不合格的;

(3) 仅有一个零件是不合格的;

(4) 至少有两个零件是不合格的.

1.2 事件的概率

1.2.1 概率的定义

在随机现象的研究中,只讨论它可能出现什么结果,价值不大,而指出各种结果出现的可能性大小则具有很大意义.实践表明事件发生的可能性大小是客观存在的.例如,在一大批仅含小量次品的产品中,随机地取一个产品进行试验,反复多次以后我们就会发现取得正品的机会总比取得次品的机会要大.

为了能精确地衡量事件发生的可能性大小,很自然要求能将事件发生的可能性大小数值化,即对试验中的每一个事件赋于一个数值,通过这些数值衡量事件发生的可能性大小.

称这种衡量事件发生可能性大小的数值为事件的概率.并把某事件 A 的概率记为 $P(A)$.它是非负的.

出于习惯,自然希望发生可能性大的事件所对应的数值应大一些,发生可能性小的事件所对应的数值应小一些.必然事件发生的可能性最大应对应最大的数,而不可能事件发生的可能性最小应对应最小的数.

为了简单,我们规定:$P(A)\geqslant 0 \qquad P(\Omega)=1$

对于试验中任何事件自然应当有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

下面先研究三种不同类型的试验中事件的概率.

1. 古典概型中概率的定义

古典概型 满足下列两条件的试验模型称为古典概型:(1) 样本空间所含基本事件总数为有限个;(2) 各个基本事件发生的可能性均相等.

在古典概型中,由于样本空间所含基本事件的总数 N_Ω 有限,并且各个基本事件发生的可能性相等为 $\frac{1}{N_\Omega}$,同时试验中的任何事件均是由若干个样本点组成,因此不难看出,包含样本点数越多的事件发生的可能性就越大,而且其大小与所含样本点数成正比.

例如:掷一匀称的骰子,令 $A=\{$掷出 2 点$\}=\{2\}$ $B=\{$掷出偶数点$\}=\{2,4,6\}$
此试验样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
于是,应有 $1=P(\Omega)=6P(A)$, $P(B)=3P(A)$

即
$$P(A)=\frac{1}{6}.$$

而 $$P(B)=3P(A)=\frac{3}{6}=\frac{B\text{ 所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

这个试验就是古典概型.

在古典概型中,任意事件 A 的概率(大小与所含样本点数成正比)就应为

$$P(A)=\lambda N_A,$$

其中 N_A 为事件 A 所含样本点数,λ 为比例常数.当然,必然事件也应满足上述关系,即

$$1=P(\Omega)=\lambda N_\Omega,$$

其中 N_Ω 为样本空间中样本点总数.由此式解得 $\lambda=\frac{1}{N_\Omega}$

代入前式便得到 $P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}$.

通过上面的分析,便可以给出古典概型中事件概率的定义.

定义 1.2.1　在古典概型中,设其样本空间 Ω 所含的样本点总数(即试验的基本事件总数)为 N_Ω 而事件A 所含的样本点数(即有利于事件 A 发生的基本事件数)为 N_A,则事件 A 的概率为:$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{A\text{ 包含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$　(1.2.1)

例 1　将一枚质地均匀的硬币上抛三次,求恰有一次正面向上的概率.

解　用 H 表示正面,T 表示反面,则该试验的样本空间

$\Omega=\{(H,H,H)(H,H,T)(H,T,H)(T,H,H)(H,T,T)(T,H,T)(T,T,H)(T,T,T)\}$.可见 $N_\Omega=8$

令 $A=\{$恰有一次出现正面$\}$,则 $A=\{(H,T,T)(T,H,T)(T,T,H)\}$

可见,$N_A=3$,故 $P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{3}{8}$

古典概型的许多实际问题都能形象化地用摸球模型来描述,这种模型化的方法能使问题更清楚,更容易看出其随机性本质.

例 2　(取球问题)袋中有 5 个白球,3 个黑球,分别按下列三种取法在袋中取球.

(1) (有放回地取球)从袋中取三次球,每次取一个,看后放回袋中,再取下一个球;

(2) (无放回地取球)从袋中取三次球,每次取一个,看后不放回袋中,再取下一个球;

(3)(一次取球)从袋中任取 3 个球.

在以上三种取法中均求 $A=\{$恰好取得 2 个白球$\}$的概率.

解 (1) 有放回取球 $N_\Omega = 8\times8\times8=8^3=512$

$$N_A=\binom{3}{2}5\times5\times3=\binom{3}{2}5^2 3^1=225$$

故
$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{225}{512}=0.44$$

(2) 无放回取球 $N_\Omega=8\times7\times6=A_8^3=336$

$$N_A=\binom{3}{2}5\times4\times3=\binom{3}{2}A_5^2A_3^1=180$$

故
$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{180}{336}=0.54$$

(3) 一次取球 $N_\Omega=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\ 5!}=56$ $N_A=\binom{5}{2}\binom{3}{1}=30$

故
$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{30}{56}=0.54$$

下面是属于取球问题的一个实例:

设有100件产品,其中有5%的次品,今从中随机抽取15件,则其中恰有2件次品的概率便为

$$P=\frac{\binom{5}{2}\binom{95}{13}}{\binom{100}{15}}=0.1377$$

例 3(分球问题) 将 n 个球放入 N 个盒子中去,试求恰有 n 个盒子各有一球的概率($n\leqslant N$).

解 令 $A=\{$恰有 n 个盒子各有一球$\}$

$$N_\Omega=\underbrace{N\cdot N\cdots N}_{n}=N^n,\ N_A=\binom{N}{n}n!$$

故
$$P(A)=\frac{\binom{N}{n}n!}{N^n}$$

下面是属于分球问题的一个实例: