主　编●白淑敏
副主编●骆川义 吴小丹

经济类院校基础课程本科系列教材

概率论与数理统计教程

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI JIAOCHENG

西南财经大学出版社

经济类院校基础课程本科系列教材

概率论与数理统计教程

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI JIAOCHENG

主　编　白淑敏
副主编　骆川义 吴小丹

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程/白淑敏主编. —成都:西南财经大学出版社,
2012.12
ISBN 978-7-5504-0928-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①白… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 309666 号

概率论与数理统计教程

主　编:白淑敏
副主编:骆川义　吴小丹

责任编辑:李　雪
封面设计:杨红鹰
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	17.75
字　　数	330 千字
版　　次	2012 年 12 月第 1 版
印　　次	2012 年 12 月第 1 次印刷
印　　数	1—3000 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-0928-6
定　　价	35.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的数量特征及统计规律性的一门学科．在经济管理及决策分析中，大量的问题都具有一定的不确定性，即所谓随机性，因此，对于经济管理类各专业的本科学生来说，掌握概率论与数理统计的知识是十分必要的．同时，概率论与数理统计这门课程也是学生学习金融、财经等理论的基础课程．

本书是根据经济管理类各专业对概率论与数理统计课程的教学要求并结合作者多年来在财经类大学数学教学和科研实践中积累的经验而编写的．考虑到经济管理类本科生的学科特点，在本教材的编写中，我们更加注重有关概率和数理统计的基本概念、基本理论和基本方法的阐释，而相对削减了一些定理的详细证明和某些性质的冗长推导．在内容的选取和体系的安排上，我们力求重点突出、逻辑清晰、深广适中，同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学考试数学考试大纲中对概率论与数理统计知识的要求．在书中例题的解析中，我们力求思路简明清晰，解法富有启发性，旨在培养学生分析问题和解决问题的能力。同时，在符合教学大纲规定的内容和学时要求的前提下，书中尽可能多地在例题的选取和习题的配备上体现概率论与数理统计知识在经济管理方面的应用，以便为学生的专业学习打下良好的基础．

本书配备习题的原则是由浅入深、层次分明、题型全面．旨在培养读者的理解能力和应用能力．为此，在每节后面，配有一定数量的习题；在每章后面还配有一定数量的复习题，以供读者选用，书末给出了习题参考答案，供读者参考．

为了满足不同层次读者的需要，我们把书中部分内容标注＊号，教师可根据各学校、各专业所给定的课时数对这些内容进行取舍，教学中跳过这些内容，不影响本书的体系．

本书由白淑敏、骆川义、吴小丹担任主编，孙疆明、马捷、丁川、徐风、吴萌等老师也参与了部分编写工作.

本书的编写，得到了西南财经大学数学学院的帮助和支持，在此表示感谢．同时感谢西南财经大学出版社对本书出版的大力支持．由于水平所限，书中有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

编者

2012 年 10 月于成都

目录

第1章

事件与概率

在客观世界中，我们发现许多现象在一定的条件下或者一定发生，或者一定不发生．例如“水从高处流向低处”，又如，“太阳不会从西边升起”“同性电荷必然互斥”“函数在间断点处不存在导数”等．这些现象，我们称之为确定性现象．

但是在自然界和社会生活中，也广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象，即随机现象．这种现象的特点是，在一定条件下，既可以发生这样的结果，也可以发生那样的结果．比如，掷一枚硬币，观察哪面向上，结果可能正面向上，也可能反面向上；又如，在抽样检查产品质量时，如果任意从被检产品中抽100件，那么其中的次品可能有5件，可能有10件，也可能只有1件；再如，汽车行驶到马路的交叉路口，可能遇到红灯，也可能遇到绿灯，等等．

概率论以随机现象为研究对象，我们的目的是以数学的方式研究随机现象，因此需要首先建立逻辑基础．

§1.1 逻辑基础的建立(一)——引入集合

一、基本概念

概率论是研究随机现象的数学学科,旨在揭示随机现象背后的规律. 而观测与试验是人们在早期研究随机现象的重要方法,如:

(1) 将一枚硬币连续掷两次,观察出现正面和反面的情况;

(2) 掷一枚硬币 100 次,记录正面朝上的次数.

这类试验有如下特征:试验的所有可能结果可以事先知道;任何一次试验的确定结果无法事先知道;可以在同一条件下重复做此试验. 符合这三个特征的试验称之为随机试验,简称试验,记为 E.

随机试验会出现一些可能结果,如试验(1) 中的可能结果有(正正)、(正反)、(反正)、(反反),试验(2) 中的可能结果有0,1,2,…,100. 我们把随机试验的每一个可能的基本结果称为一个**样本点**,记作 ω. 如:试验(1) 中的样本点有 ω_1 = (正正),ω_2 = (正反),ω_3 = (反正),ω_4 = (反反). 称全体样本点的集合为随机试验的**样本空间**,记作 Ω,如试验(2) 中的样本空间为 $\Omega = \{0,1,2,\cdots,100\}$.

在对随机现象的研究中,人们并不一定对随机试验的每个结果(样本点) 都感兴趣,而是对某些样本点的集合感兴趣,如在试验(1) 中,某人对“两次都出现正面” 这个事情感兴趣;试验(2) 中,某人对“正面向上的次数不少于 60 次” 这个事情感兴趣.

定义 1.1 样本空间的满足某种条件的子集称为随机事件,简称事件. 常用大写的英文字母 A,B,C,… 表示.

我们把样本空间 Ω 中只包含一个样本点的子集称为基本事件,而把样本空间 Ω 的最大子集(即 Ω 自身) 称为必然事件,把样本空间 Ω 的最小子集(即空集 $\varnothing$) 称为不可能事件;称至少含有两个样本点的集合为复合事件.

试验(1) 中,记 A = “两次都出现正面”,B = “两次出现正面或反面”;试验(2) 中,记 C = “正面向上的次数不少于60 次”,D = “正面向上的次数大于 100 次”,则 A = {(正正)},B = {(正正),(正反),(反正),(反反)},$C = \{60,61,\cdots,100\}$,$D = \varnothing$ 均为为随机事件. 其中,B 为必然事件,D 为不可能事件.

注:(1) 样本空间中的元素可以是数,也可以不是数.

(2) 样本空间含有样本点的个数可以是有限个,也可以是无限个. 我们将

样本点个数为有限个或可列个的样本空间统称为**离散样本空间**,而将样本点个数为无限不可列个的样本空间称为**连续样本空间**. 一般,对于离散样本空间,可以将其任意一个子集称作事件. 而对于连续样本空间,根据实际意义,只是将我们感兴趣(满足某种条件)的那些子集称作事件.

(3) 在某次随机试验中,若事件 A 中某个样本点出现了,则称事件 A 发生了.

例 1 试给出下列各随机现象的样本空间.

(1) 掷一枚骰子,观察出现的点数.

(2) 考察一天中进入某商场的顾客数.

(3) 考察某种电子产品的使用寿命.

解 (1)$\Omega_1 = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,这里 ω_i 表示"出现 i 点",$i = 1, 2,\cdots,6$. 也可简记为 $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(2)$\Omega_2 = \{0,1,2,\cdots,10\,000,\cdots\}$,这里"0"表示"一天内无人光顾此商场",而"10 000"表示"一天内有一万人光顾此商场". 虽然这两种情况发生的可能性很小,但我们不能说它们是不可能发生的. 因此,用所有非负整数表示该样本空间的样本点,应该是合理的.

(3)$\Omega_4 = \{t/t \geqslant 0\}$.

二、随机事件的关系和运算

根据定义 1.1,随机事件都是样本点的集合. 因此,集合的关系及诸种运算也同样适用于事件. 在下面的讨论中,设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,A、B、C,$A_i(i = 1,2,\cdots)$ 等是 Ω 的子集,即为 E 的随机事件.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即属于 A 的样本点都属于 B,则称 A 包含于 B,记作 $A \subset B$.

对任何事件 A,显然总有 $A \subset \Omega$. 又,为了以后讨论的方便,我们约定不可能事件 $\varnothing$ 包含于任何事件 A 中,即 $\varnothing \subset A$. 于是,总有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 事件相等

如果事件 A 与 B 满足 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A = B$. 显然相等的事件包含相同的样本点.

例如在掷一枚骰子的试验中,如果记事件 A = "出现的点数不小于5",B = "出现的点数大于4",则 $A = B$.

第1章 事件与概率

3. 事件的并(和)

表示"A 或 B 至少有一个发生"的事件,即由事件 A 与 B 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的集合,称为 A 与 B 的并,记作 $A \cup B$.

例如在掷一枚骰子的试验中,如果记事件 A = "出现奇数点",B = "出现的点数大于4",则 $A \cup B = \{1,3,5,6\}$.

4. 事件的交(或乘积)

表示"A 与 B 同时发生"的事件,即由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的集合,称为事件 A 与 B 的交(或积),记作 $A \cap B$ 或 AB.

例如在掷一枚骰子的试验中,如果记事件 A = "出现奇数点",B = "出现的点数大于4",则 AB = "出现5点".

事件的并和交的概念可以推广到有限个和可列个事件的情形:

n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 为一个新事件,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,当且仅当"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"时,该事件发生;

n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 为一个新事件,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,当且仅当"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"时,该事件发生.

类似地,可定义可列个事件的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 及可列个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 逆事件(对立事件)

表示"A 不发生"的事件,即由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的集合,称为事件 A 的逆事件,或称 A 的对立事件,记作 $\bar{A}$.

利用上述事件的并和交的运算符号,有

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ 及 } A\bar{A} = \varnothing$$

显然,A 与 $\bar{A}$ 互为逆事件.

例如,在掷骰子的试验中,若 $A = \{1,3\}$,则 $\bar{A} = \{2,4,5,6\}$;若 A = "点数小于3",则 $\bar{A}$ = "点数不小于3".

6. 事件的差

表示"A 发生而 B 不发生"的事件,即由在事件 A 中且不在 B 中的样本点组成的集合,称为事件 A 与 B 之差,记为 $A-B$. 显然有 $A-B=A\bar{B}$.

例如在掷一枚骰子的试验中,如果记事件 A = "出现奇数点",B = "出现的点数大于4",则 $A-B=\{1,3\}$.

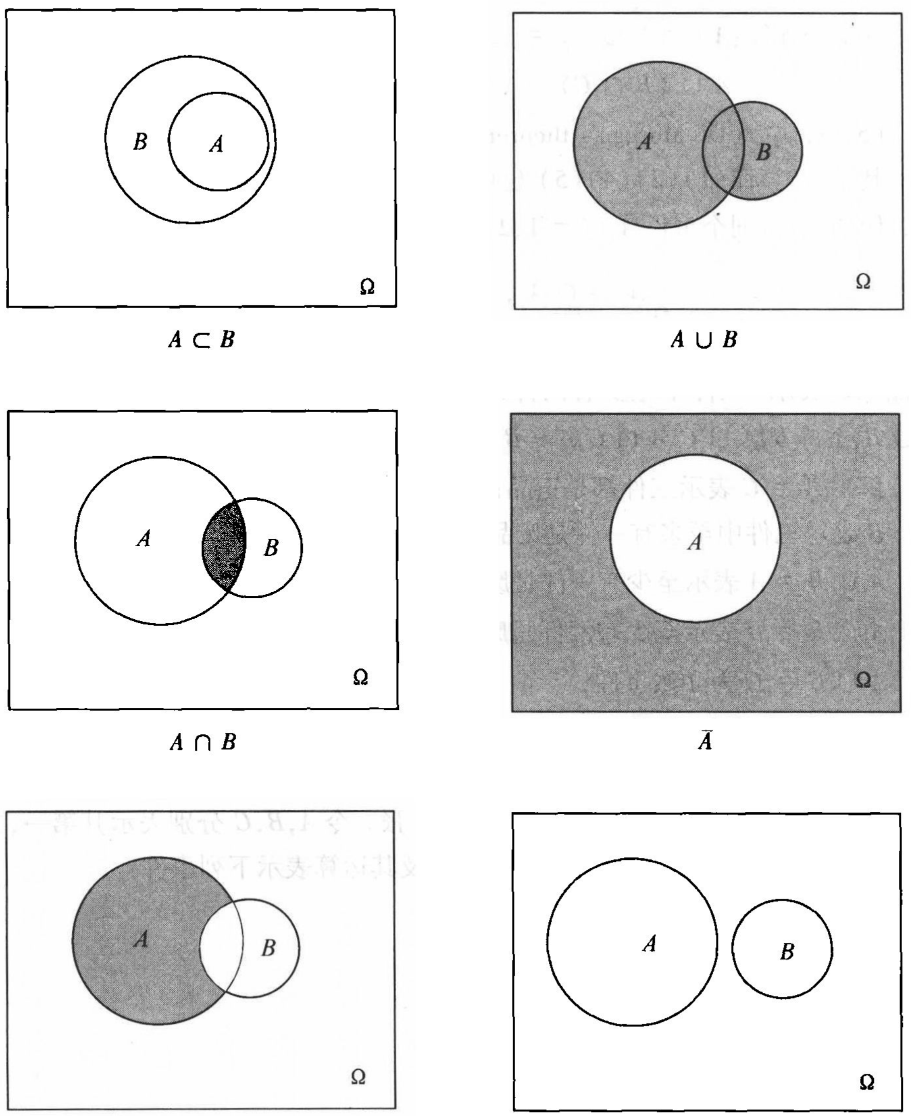
7. 互斥事件(互不相容)

若两个事件 A 与 B 满足关系 $A \cap B = \varnothing$,也就是说,如果 A 与 B 不能同时

发生,就称 A 与 B 互斥或互不相容.

显然,若 A 与 B 互为逆事件,则 A、B 一定互斥,但互斥事件不一定互为逆事件.

事件的关系与运算,可用集合论中的 Venn 图直观地予以表示(如图 1.1):



$A \subset B$　　$A \cup B$

$A \cap B$　　$\bar{A}$

$A - B$　　A、B 互斥

图 1.1

与集合的运算一样,事件的运算也满足如下规律:

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) 吸收律: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$;

(4) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(5) 对偶律(De Morgan's theorem): $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

其中,运算律(1)(2)(4)(5)也可以推广到任意有限个或可列个事件的情形. 例如,对可列个事件 $A_i(i = 1,2,\cdots)$,有对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

例2 从某厂的产品中随机抽取三件产品. 设A表示"三件中至少有一件是废品",B表示"三件中至少有两件是废品",C表示"三件都是正品",问: $\bar{A}, \bar{B}$, $A \cup B, A \cap B, A \cup C, A \cap C, A - B$ 各表示什么事件?

解 $\bar{A} = C$ 表示三件都是正品;

$\bar{B}$ 表示三件中至多有一件是废品;

$A \cup B = A$ 表示至少有一件是废品;

$A \cap B = B$ 表示至少有两件是废品;

$A \cup C = \Omega$ 为必然事件;

$A \cap C = \varnothing$ 为不可能事件;

$A - B$ 表示恰好有一件废品.

例3 某人连续三次购买彩票,每次一张. 令 A,B,C 分别表示其第一,二,三次所买的彩票中奖的事件,试用 A,B,C 及其运算表示下列事件:

(1) 恰有一次中了奖;

(2) 不止一次中奖;

(3) 只有第二次中奖;

(4) 一次奖也未中;

(5) 至多中奖两次.

解 (1) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(2) $AB \cup BC \cup AC$;

(3) $\bar{A}B\bar{C}$;

(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$;

(5) $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

习题 1.1

1. 试判断下列试验是否为随机试验：

(1) 在恒力的作用下一质点作匀加速运动；

(2) 在5个同样的球(标号1、2、3、4、5)中，任意取一个，观察所取球的标号；

(3) 在分析天平上称量一小包白糖，并记录称量结果.

2. 写出下列试验的样本空间.

(1) 将一枚硬币连掷三次；

(2) 观察在时间 $[0,t]$ 内进入某一商店的顾客人数；

(3) 将一颗骰子掷若干次，直至掷出的点数之和超过2为止；

(4) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标.

3. 将一颗骰子连掷两次，观察其掷出的点数. 令 A = "两次掷出的点数相同"，B = "点数之和为10"，C = "最小点数为4". 试分别指出事件 A、B、C 以及 $A \cup B$、ABC、$A - C$、$C - A$、$B\bar{C}$ 各自含有的样本点.

4. 在一段时间内，某电话交换台接到呼唤的次数可能是0次，1次，2次……记事件 $A_k(k = 1,2,\cdots)$ 表示"接到的呼唤次数小于 k"，试用 A_k 间的运算表示下列事件：

(1) 呼唤次数大于2；

(2) 呼唤次数在5到10次范围内；

(3) 呼唤次数与8的偏差大于2.

5. 试用事件 A、B、C 及其运算关系式表示下列事件：

(1) A 发生而 B 不发生；

(2) A 不发生但 B、C 至少有一个发生；

(3) A、B、C 中只有一个发生；

(4) A、B、C 中至多有一个发生；

(5) A、B、C 中至少有两个发生；

(6) A、B、C 不同时发生.

6. 在某大学金融学院的学生中任选一名学生. 若事件 A 表示被选学生是女生，事件 B 表示该生是大学二年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述 $AB\bar{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC = C$ 成立?

(3) 在什么条件下 $\bar{A} \subset B$ 成立?

7. 化简下列各事件：

(1) $(A-B)\cup A$;

(2) $(A-B)\cup B$;

(3) $(A-B)A$;

(4) $(A-B)B$;

(5) $(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup A)$.

8. 若 $AB=\bar{A}\bar{B}$，证明：A 与 B 互为逆事件.

§1.2 逻辑基础的建立(二)——概率公理化定义的形成

对于一个随机现象，我们不仅关心它可能出现那些结果，更需要知道某些结果出现的可能性的大小. 例如，商业保险机构为获得较大利润，就必须研究个别意外事件发生的可能性的大小，由此去计算保险费和赔偿费的多少. 人们希望用一个数值来度量事件发生的可能性大小，并将这个表征可能性大小的数值称之为事件的概率. 究竟怎样定义概率？为什么起源于赌博问题的概率论能够发展成为一个严格的数学学科？概率定义的数学本质是什么？上一节已经指出，将样本点抽象为“元素”；将随机事件抽象为“集合”是形成概率论逻辑基础的一个前提，而概率公理化定义的形成则是另一个重要前提. 如何定义概率，如何把概率论建立在严格的逻辑基础上，是概率论发展的困难所在，对这一问题的探索一直持续了近 300 年.

早期的概率定义源于计算与经验，因此我们首先从概率的计算方法开始讨论概率的定义.

一、概率的古典定义

概率的古典定义是人们确定随机事件发生可能性大小的最早的方法，由法国数学家 Laplace 在 1812 年给出定义.

定义 1.2 对于某一随机试验，若样本空间只有有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，且每个样本点在试验中都等可能出现，则称这种试验为古典概型. 在古典概型中，事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

其中 n_A 为事件 A 包含的样本点数.

对于古典概型,求事件 A 的概率的关键是正确求出样本空间中样本点总数以及事件 A 所包含的样本点个数,这种计算大多涉及排列组合的相关知识.

例 1 箱中有 6 个白球,4 个黑球,从中任取 3 个球.求下列事件的概率:(1) 取到的都是白球;(2) 取到 2 个白球 1 个黑球.

解 把任意取出的 3 个球作为一个样本点,样本点总数为 C_{10}^3,且每个样本点的出现是等可能的,因此本试验是古典概型.

(1) 设事件 A 表示"取到 3 个白球".因为 3 个白球只能从 6 个白球中取得,故 A 所包含的样本点数为 C_6^3,所以

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}\approx 0.167.$$

(2) 设事件 B 表示"取到 2 个白球,1 个黑球".因为 2 个白球是从 6 个白球中取得,1 个黑球是从 4 个黑球中取得,故由乘法原理,B 所包含的样本点数为 $C_6^2\cdot C_4^1$(把取 3 个球看成由两个步骤完成),因此

$$P(B)=\frac{C_6^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}=0.5.$$

需要注意的是,本题中的球均互不相同,若无特别说明,本书中提到的物件均互不相同.

例 2 (一次抽取与逐次抽取)将例 1 中的取球方式改成(1)不放回连取三次的取球方式;(2)放回连取三次的取球方式.分别求两种方式下"取到 2 个白球,1 个黑球"的概率.

解 同例 1 一样,仍设 B 表示"取到 2 个白球,1 个黑球".

(1) 把从袋中不放回地连取 3 只球作为一个样本点,则样本点总数为 $C_{10}^1\cdot C_9^1\cdot C_8^1$;而在三次取球中,可能一、二次取到白球,可能二、三次取到白球,也可能一、三次取到白球,因此,B 所包含的样本点数为 $C_3^2C_6^1C_5^1C_4^1$,故

$$P(B)=\frac{C_3^2C_6^1C_5^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1C_8^1}=\frac{1}{2}.$$

比较此结果与例 1 中(2)的结果,我们会发现,一次同时取 3 只球与不放回地逐一取出 3 只球,效果是完全一致的.因此,对不放回地逐一取球问题,样本点数可按一次性取出的情形求.

(2) 把从袋中有放回地抽取三个球作为一个样本点,则样本点总数为 10^3,B 所包含的样本点数为 $C_3^2 6^2\cdot 4$,于是

$$P(B)=\frac{C_3^2 6^2\cdot 4}{10^3}=0.432.$$

例3 （盒子模型）将k个小球随机地放入$N(N \geqslant k)$个盒子中，假定每个盒子可放的球数不限，且设每个球都以等概率放入任一盒子中．（通常称此问题为分房模型）现记

A =“在指定的k个盒子中各有一个球”；

B =“k个球放入k个不同的盒子中”；

C =“在某一指定的盒子中有m个球”．

求事件A,B,C的概率．

解 因为对盒子中小球的个数没有限制，所以每个小球都有N种放法，k个小球共有N^k种放法，即样本点总数为N^k.

对事件A，要使指定的k个盒子各有一个球，这是一个全排列的问题，样本点数为$k!$，故

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{k!}{N^k}.$$

对事件B，可以分两步进行：先在N个盒子中选定k个盒子，这有C_N^k种选法；再将k个小球放入选定的k个盒子中，每个盒子中各有一个球，此步有$k!$种放法．所以，由乘法原理，B包含的样本点数为$C_N^k \cdot k!$，于是

$$P(B)=\frac{n_B}{n}=\frac{C_N^k \cdot k!}{N^k}=\frac{A_N^k}{N^k}.$$

对事件C，也可以分两步进行：从k个小球中任意取出m个球，放入指定的盒子中，共有C_k^m种取法；余下的$k-m$个小球以任意的方式放入其余的$N-1$个盒子中，共有$(N-1)^{k-m}$种放法．由乘法原理，C包含的样本点数为$C_k^m \cdot (N-1)^{k-m}$. 故

$$P(C)=\frac{n_c}{n}=\frac{C_k^m \cdot (N-1)^{k-m}}{N^k}.$$

此模型可以应用到很多实际问题中，其中一个问题就是历史上有名的“生日问题”．把$N=365$看成一年中的365天，将k个人看成k个球，故k个人的生日都不相同的概率为

$$p_k=\frac{C_N^k \cdot k!}{N^k}=\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{365}\right).$$

也许你会认为在30个人的群体中，生日都不相同的可能性较大，甚至超过50%；那么在60个人的群体中，至少有两个人的生日相同的可能性又有多大呢？

事实上，30个人的群体中，生日都不相同的概率为$p_{30} \approx 30.37\%$，远远小于50%；而在60个人的群体中，生日都不相同的概率为$p_{60} \approx 0.0078$，几乎就不可